Oplossing van een vraagstuk van G.R. Veldkamp

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Memorandum 1975-0~~6~~7

juni 1975

Oplossing van een vraagstuk van G.R. Veldkamp

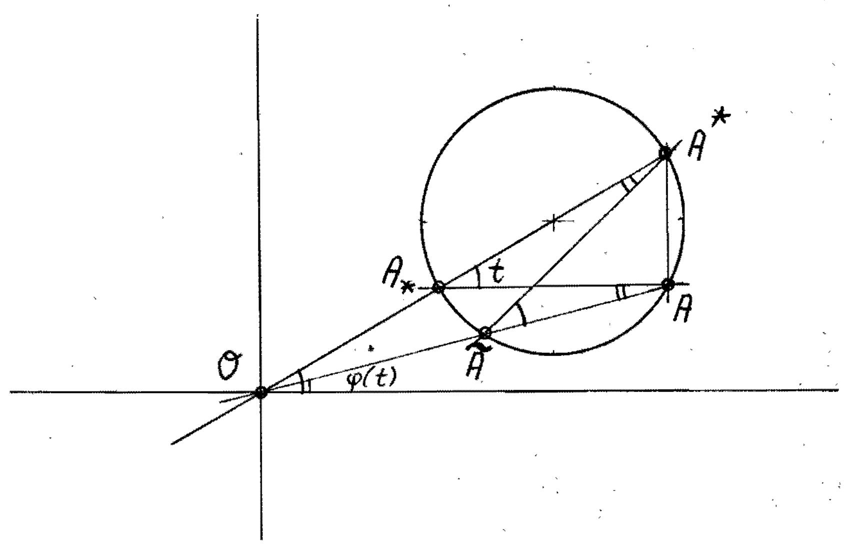
door

W. van der Meiden

Technische Hogeschool
Onderafdeling der Wiskunde
PO Box 513, Eindhoven
Nederland

Op een ellips (middelpunt 0, halve assen a en b) liggen de punten A en B, zodanig dat $\angle AOB = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$ en $OA \times OB = ab$. Bewijs dat de oppervlakte van de ellipssector AOB gelijk is aan $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)ab$ of $\frac{1}{2}\alpha ab$ al naar gelang de middellijnen door A en B al dan niet door de symmetrieassen worden gescheiden.

§ 1. Oplossing. Veronderstel dat $a > b$; dit is geen wezenlijke beperking. Beschouw de vlagconstructie voor een punt A van de ellips dat afkomstig is van een punt A^* van de omcirkel $S(0,a)$ van de ellips, en van een punt A_* van de incirkel $S(0,b)$ van de ellips. De omcirkel Γ_A van ΔAA^*A_* heeft als middelpunt $\frac{1}{2}(A^* + A_*)$ en als middellijn $a - b$.



Zij t de poolhoek van A^*, $\varphi(t)$ die van A. Zij $\tilde{A}$ het andere snijpunt van OA met Γ_A (in de tekening is $t + \varphi(t) < \frac{\pi}{2}$, zodat $\tilde{A}$ tussen 0 en A valt). $O\tilde{A} * OA = OA_* * OA^* = ab$. Aangezien $\alpha_A = \angle AA_*\tilde{A} = \frac{\pi}{2} - t - \varphi(t)$ verkrijgt men in het eerste kwadrant een punt A' van de ellips met $OA' * OA = ab$ door de figuur om 0 te draaien over een hoek $\alpha_A = \frac{\pi}{2} - t - \varphi(t)$.
Voor de daarbij behorende parameters t' en $\varphi(t')$ geldt

$$t' = t + \alpha_A = \frac{\pi}{2} - \varphi(t)$$

$$\varphi(t') = \varphi(t) + \alpha_A = \frac{\pi}{2} - t$$

zodat in het bijzonder

$$\alpha_A = t' - t = \varphi(t') - \varphi(t) .$$

Voor de voerstraal r en (in dit kwadrant) voor de hoek φ geldt

$$r^2 = a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\tan t\right)$$

zodat

$$O = \text{opp sector } A'OA = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi(t)}^{\varphi(t')} r^2(\tau)\,d\varphi(\tau) = \tfrac{1}{2}\int_{t}^{t'} ab\,d\tau = \tfrac{1}{2}ab(t'-t) =$$

$$= \tfrac{1}{2}ab\alpha_A \;.$$

Zo lang men A en A' in het eerste kwadrant kiest is de tekenenderwijs aangebrachte beperking $t + \varphi(t) < \frac{\pi}{2}$ niet wezenlijk: $t' + \varphi(t') = \pi - (t + \varphi(t))$ en men kan de rol van A en A' verwisselen.
In het tweede kwadrant ligt één A'' met $OA'' * OA = ab$. OA'' is het spiegelbeeld van OA' ten opzichte van de verticaal. Dus

$$t'' = \pi - t' = \frac{\pi}{2} + \varphi(t)$$

$$\varphi(t'') = \pi - \varphi(t') = \frac{\pi}{2} + t$$

en

$$\beta_A = \varphi(t'') - \varphi(t) = \frac{\pi}{2} + t - \left(t'' - \frac{\pi}{2}\right) = \pi - (t'' - t) \;.$$

In dit geval vindt men $O = \frac{1}{2}ab(\pi - \beta_A)$. De overige gevallen, A''' in het derde, A'''' in het vierde kwadrant, herleidt men nu met behulp van de oppervlakte πab van de ellips, tot een der voorgaande.

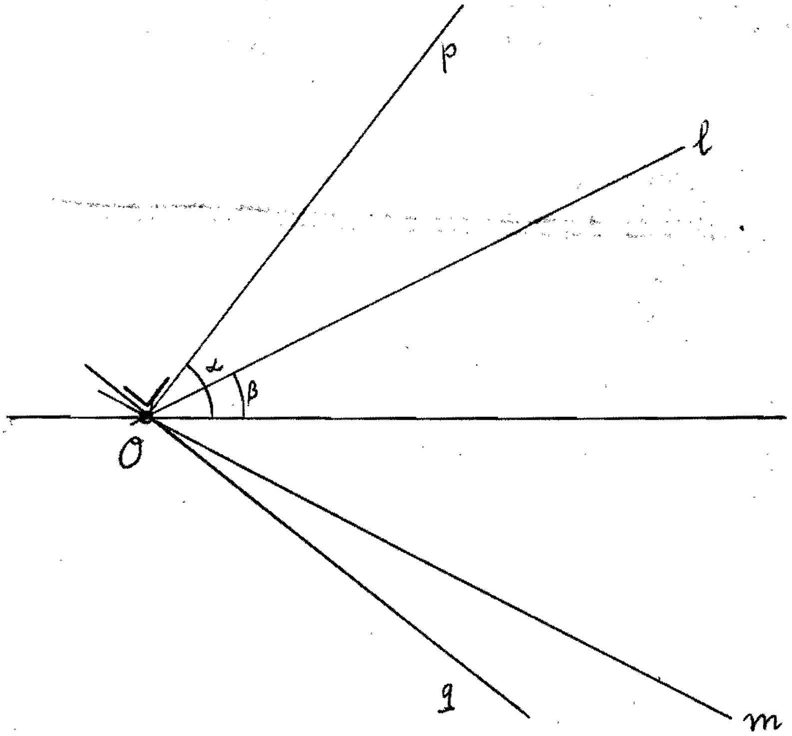
§ 2. Toepassing van het voorgaande

Beschouw in $\mathbb{R}^2$ de rechten ℓ en m door 0, met als richtingsvectoren respectievelijk $\underline{e}_1 + k\underline{e}_2$ en $\underline{e}_1 - k\underline{e}_2$ $(0 < k < \infty)$.
Op ℓ beweegt een punt L, op m beweegt een punt M zó dat $\|L - M\| = 1$; op LM ligt een punt P zó dat $P - M = u(L - M)$ $(u \neq 0,1)$.
De baan van P is een ellips (zoals bekend) en we vragen naar de oppervlakte van de sector die door ℓ en m uit deze ellips wordt gesneden.
Zij $L = \lambda(\underline{e}_1 + k\underline{e}_2)$, $M = \mu(\underline{e}_1 - k\underline{e}_2)$ dan is

$$P = \mu(\underline{e}_1 - k\underline{e}_2) + u\{\lambda(\underline{e}_1 + k\underline{e}_2) - \mu(\underline{e}_1 - k\underline{e}_2)\} =$$

$$= (\mu + u\lambda - u\mu)\underline{e}_1 + (-\mu k + u\lambda k + u\mu k)\underline{e}_2 =$$

$$= (u\lambda + (1-u)\mu)\underline{e}_1 + k(u\lambda + (u-1)\mu)\underline{e}_2 \;.$$



Zij $\underline{x} = (x_1,x_2)^T$ de plaatsvector van P en zij $\underline{\lambda} = (\lambda,\mu)^T$; dan staat er

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} u & 1-u \\ ku & -k(1-u) \end{bmatrix} \underline{\lambda} .$$

Zij

$$-\Delta = \begin{vmatrix} u & 1-u \\ ku & -k(1-u) \end{vmatrix} = -2ku(1-u) .$$

De matrix

$$\begin{bmatrix} u & 1-u \\ ku & -k(1-u) \end{bmatrix}$$

heeft een inverse

$$U_k = -\Delta^{-1} \begin{bmatrix} -k(1-u) & -(1-u) \\ -ku & u \end{bmatrix} = \Delta^{-1} \begin{bmatrix} k(1-u) & 1-u \\ ku & -u \end{bmatrix}$$

zodat

$$\underline{\lambda} = U_k \underline{x} .$$

Uit de voorwaarde $\| L - M \| = 1$ volgt

$$(\lambda - \mu)^2 + k^2(\lambda + \mu)^2 = 1$$

of

$$(k^2 + 1)\lambda^2 + 2(k^2 - 1)\lambda\mu + (k^2 + 1)\mu^2 = 1 ,$$

en indien we schrijven

$$K = \begin{bmatrix} k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ k^2 - 1 & k^2 + 1 \end{bmatrix}$$

gaat dit over in

$$\underline{\lambda}^T K \underline{\lambda} = 1,$$

$$\underline{x}^T U_k^T K U_k \underline{x} = 1 .$$

det $U_k = -\Delta^{-1}$, det $K = 4k^2$ en $\det(U_k^T K U_k) = 4k^2\Delta^{-2} = u^{-2}(1 - u)^{-2} > 0$. Dus doorloopt P een ellips.

Voor de halve aslengten a en b van deze ellips geldt

$$a^2 b^2 = (\det(U_k^T K U_k))^{-1} = u^2(1 - u)^2$$

zodat

$$ab = |u(1 - u)| .$$

Blijft nog de vraag of de lijnen ℓ en m door de hoofdassen p en q van de ellips worden gescheiden of niet. Zij $\beta := \arctan k = \frac{1}{2} \angle$ LOM en zij α de kleinste van de hoeken tussen de x_1-as en de hoofdassen, zō dat $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$; zij voorts p die bij α horende hoofdas. Dan worden ℓ en m door p en q gescheiden als $(\ell,m,p,q) < 0$; nu is

$$d := (\ell,m,p,q) = \frac{\sin(\ell,p)}{\sin(\ell,q)} : \frac{\sin(m,p)}{\sin(m,q)} =$$

$$= \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha + \frac{\pi}{2})} : \frac{\sin(-\alpha - \beta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta)} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\beta - \alpha)} : \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} .$$

Uit

$$A := [a_{ij}] := U_k^T K U_k = \begin{bmatrix} k^4 + k^2(1 - 2u)^2 & k(1 + k^2)(1 - 2u) \\ k(1 + k^2)(1 - 2u) & k^2(1 - 2u)^2 + 1 \end{bmatrix}$$

volgt

$$\tan 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{2k(1 - 2u)}{k^2 - 1} = (1 - 2u)\tan 2\beta \ .$$

Met y := tan α en k = tan β elimineren we dus y uit

$$d\,\frac{y + k}{1 - yk} = \frac{y - k}{1 + yk}$$

en

$$\frac{2y}{1 - y^2} = (1 - 2u)\frac{2k}{1 - k^2} \ ,$$

die we eerst herleiden tot

$$\frac{y^2 + 1}{y} = \frac{(1 - \quad)(1 + k^2)}{(1 + \quad)k}$$

en

$$\frac{y^2 - 1}{y} = \frac{k^2 - 1}{k(1 - 2u)} \ .$$

Voor het gemak stellen we nog

$$c := \frac{1 - d}{1 + d} \text{ en } v := (1 - 2u)^{-1}$$

zodat

$$y + \frac{1}{y} = c(k + \frac{1}{k})$$

$$y - \frac{1}{y} = v(k - \frac{1}{k}) \ ,$$

waaruit door optellen en aftrekken

$$2y = k(c + v) + \frac{1}{k}(c - v)$$

$$\frac{2}{y} = k(c - v) + \frac{1}{k}(c + v)$$

en door vermenigvuldigen

$$4 = c^2(k + \frac{1}{k})^2 - v^2(k - \frac{1}{k})^2$$

of

$$c^2 = (k + \frac{1}{k})^{-2}(4 + v^2(k - \frac{1}{k})^2) \ .$$

Nu is $d < 0$ dan en slechts dan als $|c| > 1$ of

$$4 + v^2(k - \frac{1}{k})^2 > (k + \frac{1}{k})^2 \ ,$$

equivalent met

$$(v^2 - 1)(k - \frac{1}{k})^2 > 0 .$$

Voor $k \neq 1$ is dit weer equivalent met

$$v^2 > 1 ,$$

$$(2u - 1)^2 < 1 ,$$

$$u(1 - u) > 0 .$$

Voor $k = 1$ vallen de hoofdassen voor alle u samen met ℓ en m (zoals men aan de formule voor tan 2α kan zien); voor $k \neq 1$ is in het kinematische geval juist $0 < u < 1$ en $u(1 - u) > 0$. Dus worden dan ℓ en m altijd gescheiden door de hoofdassen en geldt voor de oppervlakte (met $\omega := 2\beta$)

$$O = \tfrac{1}{2}u(1 - u)(\pi - \omega) .$$

Gevolg: Als L en M de zijden van een convexe n-hoek doorlopen (waarvan iedere zijde ≥ 1 is) dan is

$$\Sigma_i O_i = \tfrac{1}{2}u(1 - u)\Sigma_i(\pi - \omega_i) = \tfrac{1}{2}u(1 - u)(n\pi - (n - 2)\pi) = \pi u(1 - u).$$