

Oplossing van een vraagstuk van G.R. Veldkamp

Citation for published version (APA):

Meiden, van der, W. (1975). *Oplossing van een vraagstuk van G.R. Veldkamp*. (Eindhoven University of Technology : Dept of Mathematics : memorandum; Vol. 7507). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1975

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

V-V
696542

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Memorandum 1975-07

juni 1975

Oplossing van een vraagstuk van G.R. Veldkamp

door

W. van der Meiden

Technische Hogeschool
Onderafdeling der Wiskunde
PO Box 513, Eindhoven
Nederland

Voor de voerstraal r en (in dit kwadrant) voor de hoek φ geldt

$$r^2 = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a} \tan t\right)$$

zodat

$$\begin{aligned} 0 = \text{opp sector } A'OA &= \frac{1}{2} \int_{\varphi(t)}^{\varphi(t')} r^2(\tau) d\varphi(\tau) = \frac{1}{2} \int_t^{t'} ab \, d\tau = \frac{1}{2} ab(t' - t) = \\ &= \frac{1}{2} ab \alpha_A. \end{aligned}$$

Zo lang men A en A' in het eerste kwadrant kiest is de tekenenderwijs aangebrachte beperking $t + \varphi(t) < \frac{\pi}{2}$ niet wezenlijk: $t' + \varphi(t') = \pi - (t + \varphi(t))$ en men kan de rol van A en A' verwisselen.

In het tweede kwadrant ligt één A'' met $OA'' \cdot OA = ab$. OA'' is het spiegelbeeld van OA' ten opzichte van de verticaal. Dus

$$t'' = \pi - t' = \frac{\pi}{2} + \varphi(t)$$

$$\varphi(t'') = \pi - \varphi(t') = \frac{\pi}{2} + t$$

en

$$\beta_A = \varphi(t'') - \varphi(t) = \frac{\pi}{2} + t - \left(t'' - \frac{\pi}{2}\right) = \pi - (t'' - t).$$

In dit geval vindt men $0 = \frac{1}{2} ab(\pi - \beta_A)$. De overige gevallen, A''' in het derde, A'''' in het vierde kwadrant, herleidt men nu met behulp van de oppervlakte πab van de ellips, tot een der voorgaande.

§ 2. Toepassing van het voorgaande

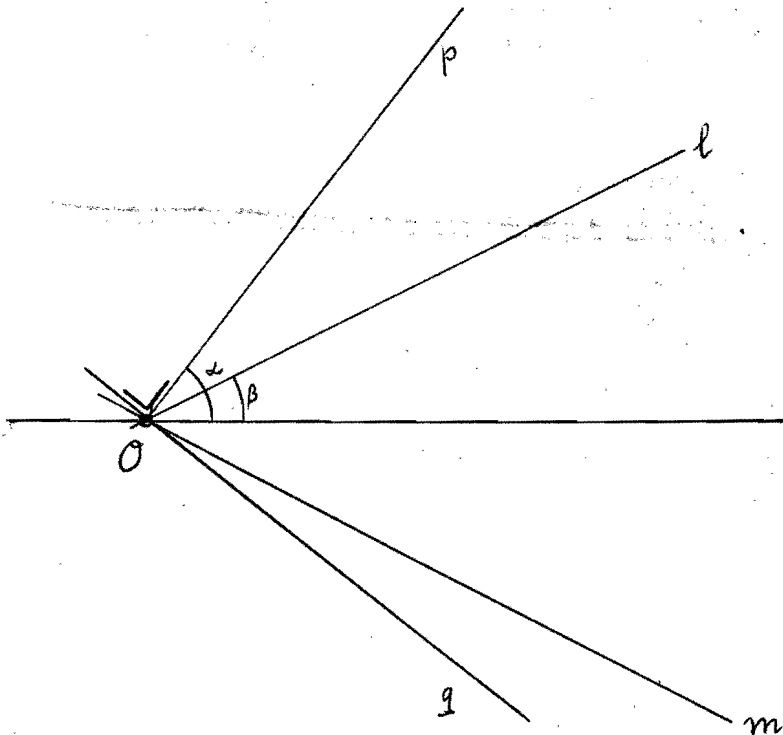
Beschouw in \mathbb{R}^2 de rechten ℓ en m door O , met als richtingsvectoren respectievelijk $\underline{e}_1 + k\underline{e}_2$ en $\underline{e}_1 - k\underline{e}_2$ ($0 < k < \infty$).

Op ℓ beweegt een punt L , op m beweegt een punt M zó dat $\|L - M\| = 1$; op LM ligt een punt P zó dat $P - M = u(L - M)$ ($u \neq 0, 1$).

De baan van P is een ellips (zoals bekend) en we vragen naar de oppervlakte van de sector die door ℓ en m uit deze ellips wordt gesneden.

Zij $L = \lambda(\underline{e}_1 + k\underline{e}_2)$, $M = \mu(\underline{e}_1 - k\underline{e}_2)$ dan is

$$\begin{aligned} P &= \mu(\underline{e}_1 - k\underline{e}_2) + u\{\lambda(\underline{e}_1 + k\underline{e}_2) - \mu(\underline{e}_1 - k\underline{e}_2)\} = \\ &= (\mu + u\lambda - u\mu)\underline{e}_1 + (-\mu k + u\lambda k + u\mu k)\underline{e}_2 = \\ &= (u\lambda + (1 - u)\mu)\underline{e}_1 + k(u\lambda + (u - 1)\mu)\underline{e}_2. \end{aligned}$$



Zij $\underline{x} = (x_1, x_2)^T$ de plaatsvector van P en zij $\underline{\lambda} = (\lambda, \mu)^T$; dan staat er

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} u & 1 - u \\ ku & -k(1 - u) \end{bmatrix} \underline{\lambda} .$$

Zij

$$-\Delta = \begin{vmatrix} u & 1 - u \\ ku & -k(1 - u) \end{vmatrix} = -2ku(1 - u) .$$

De matrix

$$\begin{bmatrix} u & 1 - u \\ ku & -k(1 - u) \end{bmatrix}$$

heeft een inverse

$$U_k = -\Delta^{-1} \begin{bmatrix} -k(1 - u) & -(1 - u) \\ -ku & u \end{bmatrix} = \Delta^{-1} \begin{bmatrix} k(1 - u) & 1 - u \\ ku & -u \end{bmatrix}$$

zodat

$$\underline{\lambda} = U_k \underline{x} .$$

Uit de voorwaarde $\|L - M\| = 1$ volgt

$$(\lambda - \mu)^2 + k^2(\lambda + \mu)^2 = 1$$

of

$$(k^2 + 1)\lambda^2 + 2(k^2 - 1)\lambda\mu + (k^2 + 1)\mu^2 = 1 ,$$

en indien we schrijven

$$K = \begin{bmatrix} k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ k^2 - 1 & k^2 + 1 \end{bmatrix}$$

gaat dit over in

$$\underline{\lambda}^T K \underline{\lambda} = 1,$$

$$\underline{x}^T U_k^T K U_k \underline{x} = 1.$$

$\det U_k = -\Delta^{-1}$, $\det K = 4k^2$ en $\det(U_k^T K U_k) = 4k^2 \Delta^{-2} = u^{-2} (1-u)^{-2} > 0$. Dus doorloopt P een ellips.

Voor de halve aslengten a en b van deze ellips geldt

$$a^2 b^2 = (\det(U_k^T K U_k))^{-1} = u^2 (1-u)^2$$

zodat

$$ab = |u(1-u)|.$$

Blijft nog de vraag of de lijnen ℓ en m door de hoofdassen p en q van de ellips worden gescheiden of niet. Zij $\beta := \arctan k = \frac{1}{2} \angle LOM$ en zij α de kleinste van de hoeken tussen de x_1 -as en de hoofdassen, zó dat $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$; zij voorts p die bij α horende hoofdas. Dan worden ℓ en m door p en q gescheiden als $(\ell, m, p, q) < 0$; nu is

$$\begin{aligned} d := (\ell, m, p, q) &= \frac{\sin(\ell, p)}{\sin(\ell, q)} : \frac{\sin(m, p)}{\sin(m, q)} = \\ &= \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha + \frac{\pi}{2})} : \frac{\sin(-\alpha - \beta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta)} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\beta - \alpha)} : \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Uit

$$A := [a_{ij}] := U_k^T K U_k = \begin{bmatrix} k^4 + k^2(1-2u)^2 & k(1+k^2)(1-2u) \\ k(1+k^2)(1-2u) & k^2(1-2u)^2 + 1 \end{bmatrix}$$

volgt

$$\tan 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{2k(1 - 2u)}{k^2 - 1} = (1 - 2u)\tan 2\beta .$$

Met $y := \tan \alpha$ en $k = \tan \beta$ elimineren we dus y uit

$$d \frac{y + k}{1 - yk} = \frac{y - k}{1 + yk}$$

en

$$\frac{2y}{1 - y^2} = (1 - 2u) \frac{2k}{1 - k^2} ,$$

die we eerst herleiden tot

$$\frac{y^2 + 1}{y} = \frac{(1 -) (1 + k^2)}{(1 +) k}$$

en

$$\frac{y^2 - 1}{y} = \frac{k^2 - 1}{k(1 - 2u)} .$$

Voor het gemak stellen we nog

$$c := \frac{1 - d}{1 + d} \text{ en } v := (1 - 2u)^{-1}$$

zodat

$$y + \frac{1}{y} = c(k + \frac{1}{k})$$

$$y - \frac{1}{y} = v(k - \frac{1}{k}) ,$$

waaruit door optellen en aftrekken

$$2y = k(c + v) + \frac{1}{k}(c - v)$$

$$\frac{2}{y} = k(c - v) + \frac{1}{k}(c + v)$$

en door vermenigvuldigen

$$4 = c^2(k + \frac{1}{k})^2 - v^2(k - \frac{1}{k})^2$$

of

$$c^2 = (k + \frac{1}{k})^{-2} (4 + v^2(k - \frac{1}{k})^2) .$$

Nu is $d < 0$ dan en slechts dan als $|c| > 1$ of

$$4 + v^2(k - \frac{1}{k})^2 > (k + \frac{1}{k})^2 ,$$

equivalent met

$$(v^2 - 1)(k - \frac{1}{k})^2 > 0 .$$

Voor $k \neq 1$ is dit weer equivalent met

$$v^2 > 1 ,$$

$$(2u - 1)^2 < 1 ,$$

$$u(1 - u) > 0 .$$

Voor $k = 1$ vallen de hoofdassen voor alle u samen met ℓ en m (zoals men aan de formule voor $\tan 2\alpha$ kan zien); voor $k \neq 1$ is in het kinematische geval juist $0 < u < 1$ en $u(1 - u) > 0$. Dus worden dan ℓ en m altijd gescheiden door de hoofdassen en geldt voor de oppervlakte (met $\omega := 2\beta$)

$$O = \frac{1}{2}u(1 - u)(\pi - \omega) .$$

Gevolg: Als L en M de zijden van een convexe n -hoek doorlopen (waarvan iedere zijde ≥ 1 is) dan is

$$\sum_i O_i = \frac{1}{2}u(1 - u)\sum_i (\pi - \omega_i) = \frac{1}{2}u(1 - u)(n\pi - (n - 2)\pi) = \pi u(1 - u) .$$