

## Op weg naar situaties van groter waarschijnlijkheid?

Stein, H.N.

Gepubliceerd: 01/01/1969

### *Document Version*

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

#### **Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the author's version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

OP WEG  
NAAR SITUATIES VAN  
GROTER WAARSCHIJNLIJKHEID?

DR. H. N. STEIN

OP WEG  
NAAR SITUATIES VAN  
GROTER WAARSCHIJNLIJKHEID?

OPENBARE LES

GEGEVEN BIJ DE AANVAARDING VAN HET AMBT  
VAN LECTOR IN DE ALGEMENE CHEMIE  
AAN DE TECHNISCHE HOGESCHOOL TE EINDHOVEN  
OP VRIJDAG 3 OKTOBER 1969

DOOR

DR. H. N. STEIN

*Mijne heren curatoren,  
Mijnheer de secretaris van deze hogeschool,  
Mijnheer de rector magnificus,  
Mijne heren hoogleraren en lectoren,  
Dames en heren leden van de wetenschappelijke, de technische en de administratieve staf,  
Dames en heren studenten,  
en voorts gij allen, die door het bijwonen van deze les blijkt geeft van Uw belangstelling,*

*Zeer gewaardeerde toehoorders,*

Bij het overdenken van de stof, die ik in de komende jaren aan deze hogeschool hoop te doceren, heb ik mij wel eens afgevraagd of niet van datgene, wat wij tijdens onze opleiding zoal moeten verwerken, juist de onopgeloste problemen het langst in de herinnering blijven. In zijn algemeenheid is deze stelling misschien niet juist; toch kan ik mij een gebeurtenis herinneren (nog daterend uit mijn lagere schooltijd) waar een onopgelost probleem een rol bij speelde.

Onze onderwijzer had ons attent gemaakt op het gevaar, dat een al te intensieve bebouwing voor de kwaliteit van landbouwgrond kan opleveren: een plant onttrekt voor zijn groei aan de grond bepaalde zouten, en als deze bij iedere oogst met het gewas telkens worden weggehaald, dan raakt uiteindelijk de grond „uitgeput”. Deze redenering was wel begrijpelijk, alsook de voorgestelde remedie: aanvulling door bemesting. Toch leek het ons niet waarschijnlijk, dat op deze wijze alle onttrokken zouten weer in de grond terecht zouden komen, immers niet alle afvalstoffen komen weer als mest op het land. Geen nood, men kan het ontbrekende aanvullen met kunstmest. Wij lieten de onderwijzer echter niet zo gauw met rust, en vroegen waar dan die kunstmest vandaan komt. Ja, die wordt wel ergens anders in de grond gevonden. Maar op deze wijze verschuift het probleem alleen: put men uiteindelijk de zoutafzetting niet evenzeer uit, als eerst de zouten in de grond?

Ik geloof niet, dat onze onderwijzer deze laatste vraag in positieve

zin kon waarderen. Het behoorde destijds niet tot de taak van leerlingen van een lagere school, vragen te stellen waar het onderwijzend personeel geen antwoord op wist. Maar het probleem blijft bestaan, zij het in een iets ingewikkelder vorm, ook wanneer wij de bereiding van kunstmest in een fabriek mede in de beschouwing betrekken.

Laten wij, om dit te doorzien, het probleem eens herleiden tot zijn essentiële onderdeel: in de grond is in het begin een zekere hoeveelheid zouten aanwezig, maar doordat deze eerst door planten worden opgenomen die naderhand door mens of dier worden verwijderd, worden zij verspreid, omgezet en vermengd met andere stoffen; uiteindelijk zullen zij zo sterk verspreid en vermengd zijn en omgezet tot zodanige produkten, dat het resulterende mengsel van stoffen niet zonder meer als kunstmest gebruikt kan worden. Hetzelfde lot ondergaan de door de mens als kunstmest toegevoegde stoffen, en als er verder niets zou gebeuren zou het uiteindelijke resultaat zijn dat zowel de oorspronkelijk in de grond aanwezige zouten alsook de zouten uit de zoutafzettingen teveel verspreid, verontreinigd en omgezet zouden zijn om nog voor plantengroei beschikbaar te zijn. Natuurlijk is het mogelijk deze verspreidings- en omzettingstendens tegen te gaan; we zouden b.v. de zouten opnieuw kunnen isoleren uit zeewater, respectievelijk opnieuw kunnen synthetiseren uit de omzettingsprodukten. Maar dat gaat niet zonder meer: zowel voor de isolering alsook voor de synthese moeten wij aan de stoffen in de vorm, waarin wij hen in de natuur aantreffen, energie toevoeren.

Hier vinden wij een essentieel aspect van wat men in de chemie de „tweede hoofdwet van de thermodynamica” noemt. De eerste hoofdwet is de wet van behoud van energie, de tweede kan men als volgt formuleren: in een systeem waar geen energie aan wordt toegevoerd, dat zelf geen arbeid verricht op een ander systeem en waarop door geen ander systeem arbeid wordt verricht, verloopt ieder proces in een zodanige richting, dat een toestand van groter waarschijnlijkheid wordt bereikt.

Zo'n uitspraak is zinloos zonder definitie van de „waarschijnlijkheid” van een bepaalde toestand. Terwille van de volledigheid zij het mij vergund daar in het kort iets over te zeggen, op het gevaar af dat ik de chemici en fysici onder de aanwezigen ter zake weinig nieuws vertel.

Een makroskopische toestand van een systeem kan atomair op een groot aantal manieren worden gerealiseerd. Als ik b.v. aangeef een bepaald volume te beschouwen dat een zekere hoeveelheid van een

bepaalde stof bij een gegeven temperatuur bevat, dan is mijn systeem aldus *makroskopisch* gedefinieerd. *Atomair* nog bij lange niet: de atomen, waaruit de bewuste stof bestaat, kunnen nog een groot aantal posities en snelheden hebben die alle verenigbaar zijn met de gegevens van het systeem, zoals deze makroskopisch zijn vastgelegd. Welnu, de waarschijnlijkheid van een bepaalde toestand kan worden gemeten aan het aantal mogelijke atomaire toestanden dat met de gegeven condities verenigbaar is. Stel dat zich in het betreffende volume een gas bevindt, dat eerst slechts een deel van het volume beslaat; dit gas zal zich over het gehele volume trachten te verspreiden, omdat een verdeling over het gehele volume „waarschijnlijker” is (nl. atomair op meer manieren realiseerbaar) dan de uitgangstoestand. Deze uitgangstoestand bevindt zich óók – naast vele andere – te midden van de realiseringsmogelijkheden van het uiteindelijke systeem; op de implicaties daarvan kom ik straks nog terug. Men kan een zekere grootheid, de entropie, definiëren die een functie is van het aantal realiseringsmogelijkheden van een systeem; met behulp hiervan kan men de tweede hoofdwet als volgt formuleren: in een geïsoleerd systeem neemt de entropie nooit af. Men kan deze wet ook uitdrukken in termen afkomstig uit de informatietheorie, zoals dit door o.a. Brillouin <sup>1)</sup>, Jaynes <sup>2)</sup> en Shannon <sup>3)</sup> is gedaan. Immers, een onwaarschijnlijke toestand vertegenwoordigt meer informatie over een systeem dan een waarschijnlijke toestand. Stel namelijk dat van een systeem (b.v. het zojuist genoemde gas dat zich over een groter volume kan uitbreiden zonder dat er energie aan wordt toegevoegd en zonder dat het arbeid verricht) bekend is dat het zich in een onwaarschijnlijke toestand bevindt, dus in een toestand die slechts op een relatief gering aantal manieren atomair realiseerbaar is, zoals een verdeling over slechts een deel van het volume. In dit geval beschikt men over meer informatie over het systeem dan wanneer alleen bekend zou zijn dat het zich „ergens” in het betreffende volume bevindt. Zoals von Neumann <sup>4)</sup> het uitdrukte: het aantal atomaire toestanden, dat verenigbaar is met een gegeven makroskopische toestand, correspondeert met de hoeveelheid mikroskopische informatie die wij *missen* als ons alleen de makroskopische toestand gegeven is.

In deze termen zou de wet van toenemende entropie de wet van „afnemende informatie” worden: de kennis van een buitenstaander over een geïsoleerd systeem kan niet toenemen, hoogstens afnemen. Beide formuleringen zijn equivalent; dit blijkt misschien het duidelijkst daaruit, dat het mogelijk is een door Glansdorff en Prigogine <sup>5)</sup> op

basis van de thermodynamica der irreversibele processen opgesteld criterium voor „streven naar evenwicht” informatietheoretisch af te leiden <sup>6)</sup>).

De eerste indruk, die deze „tweede hoofdwet” op een buitenstaander maakt, zal vermoedelijk die van een volslagen trivialiteit zijn. Een aan zichzelf overgelaten systeem gaat niet vanuit een waarschijnlijke in een onwaarschijnlijke toestand over – kan het triviale? En toch kent deze wet nog voetangels en klemmen.

Er is namelijk een tegenstelling tussen het *onomkeerbare* karakter van deze tweede hoofdwet, en het *omkeerbare* karakter van de wetten die de bewegingen van afzonderlijke atomen beheersen. Men denke bij voorbeeld aan een stroming in een vloeistof, op gang gebracht door erin te roeren. Een aantal moleculen in die vloeistof beweegt zich met snelheden die een zekere voorkeursrichting vertonen; makroskopisch is dit zichtbaar als een stroming; maar deze stroming sterft langzaam weg, doordat een toestand zonder voorkeursrichtingen waarschijnlijker is. De energie van de stroming is uiteindelijk nog wel in het systeem aanwezig, maar dan als energie van ongeordende beweging zonder voorkeursrichting; tijdens het wegsterven van de stroming is dus energie van beweging met een voorkeursrichting omgezet in energie van ongeordende thermische beweging. Dit is duidelijk onomkeerbaar: een stilstaande vloeistof gaat niet uit zichzelf een makroskopisch waarneembare stroming vertonen. Toch zijn de wetten die dit proces op atomaire schaal beheersen, omkeerbaar: als ik tegen het einde van het proces, dus als alle zichtbare stroming nagenoeg is weggeëbd, alle atomen hun bewegingsrichting zou doen omkeren, zou ik een *mogelijk* proces krijgen, waarbij de atomen net toevallig zo zouden bewegen dat zij de beweging van een aantal van hen in één bepaalde richting steeds intensiever maken. Maar dit „net toevallig” is een zo kleine kans, dat dit proces in werkelijkheid niet optreedt. Het belang hiervan voor de praktijk van de ingenieur is duidelijk genoeg: een groot deel van de taken van een chemisch ingenieur bestaat eruit, de materiële zijde van het nastreven van menselijke doeleinden te realiseren, hetgeen in de meeste gevallen het verrichten van arbeid met zich meebrengt. Welnu, hierbij zitten wij niet in de eerste plaats verlegen om energie, doch om een tekort aan entropie. De energie kan nl. in een zodanige vorm aanwezig zijn – te weten in de vorm van energie van ongeordende thermische beweging, zoals tegen het einde van het genoemde proces – dat er geen

arbeid mee verricht kan worden. In de uitgangstoestand daarentegen, dus de toestand van een makroskopisch waarneembare stroming, heeft men de mogelijkheid om arbeid te verrichten, men kan b.v. via een dynamo elektrische spanning opwekken e.d. Als ik voor de taak sta, arbeid te verrichten, en ik vraag energie, dan kan iemand mij b.v. een systeem ter beschikking stellen dat zich op een hoge, uniforme temperatuur in evenwicht bevindt, met de woorden: daar zit toch een grote hoeveelheid thermische energie in. Op zichzelf heb ik daar niets aan. Maar wanneer een deel van het systeem zich op een lagere temperatuur bevindt, dan kan ik dit temperatuurverschil gebruiken om er arbeid mee te verrichten, al is de totale hoeveelheid energie die ik tot mijn beschikking heb dan lager. Wanneer in de kranten van zekere overheidsorganen gevraagd wordt met een „energienota” voor de dag te komen en een „energiebeleid” te voeren, dan zal het op grond van het voorgaande duidelijk zijn dat het eerder een „entropienota” zal moeten zijn waarin het „entropiebeleid” uit de doeken wordt gedaan.

Dergelijke overwegingen mogen aardige woordspelletjes opleveren voor taalpuristen, zij vormen nog geen principiële moeilijkheden van de theorie. Deze liggen op een ander vlak: als men vraagt, of de tweede hoofdwet wel beschouwd mag worden als een natuurwet, dus als een kernachtige samenvatting van een groot aantal waarnemingen waar geen uitzonderingen op mogelijk zijn, dan zal het antwoord deels bevestigend, deels ontkennend moeten luiden. Bevestigend in die zin, dat de tweede hoofdwet inderdaad een samenvatting is van een grote hoeveelheid feiten. Ontkennend echter in zoverre, dat het wel degelijk mogelijk is dat er uitzonderingen op zijn. Immers, een minder waarschijnlijke uitgangstoestand blijft tot de realiseringsmogelijkheden van het uiteindelijke systeem behoren, zodat de omkering van een irreversibel proces een mogelijk, zij het zeer onwaarschijnlijk proces is. Boltzmann heeft de hypothese opgesteld, dat een aan zichzelf overgelaten systeem in de loop der tijden uiteindelijk alle, zelfs de meest onwaarschijnlijke configuraties, die verenigbaar zijn met zijn condities, weer inneemt; en al blijkt deze z.g. „ergodische” hypothese bij nader inzien wiskundig niet houdbaar te zijn <sup>7)</sup>, zij kan vervangen worden door een „quasi-ergodische” hypothese (Ehrenfest) die praktisch hetzelfde zegt. Als ik een vloeistof maar lang genoeg aan zichzelf overlaat, zal hij ooit nog eens een keer uit zichzelf gaan stromen, doordat de bewegingen van de moleculen net toevallig zo samenwerken dat er een makroskopische stroming resulteert. Maar kan men dan niet door tijdig ingrijpen van zo'n



toestand gebruik maken om arbeid te verrichten? Als ik 1 liter water tot mijn beschikking heb en ik weet dat overmorgen een toestand optreedt waarin de vloeistof uit zichzelf gaat stromen, kan ik dan niet door inbouw van een turbine elektriciteit opwekken? Stel dat ik op een gegeven ogenblik plaats, oriëntatie en snelheid van alle moleculen weet, dan moet zo'n voorspelling toch mogelijk zijn?

Dit laatste is nu juist niet het geval. Allereerst om praktische redenen: in die liter water zitten zo'n  $10^{26}$  atomen, waarvan ik  $2 \cdot 10^{26}$  getallen zou moeten weten; deze gegevens alleen al zouden een „boek” vullen ter dikte van 10000 lichtjaren, en dan zouden deze gegevens nog verwerkt moeten worden in talloze vergelijkingen. Maar goed: stel dat er een of andere demon zou bestaan die de beschikking heeft over een super-computer en tot deze wiskundige krachttoer in staat is – dan nog zou deze taak principieel onmogelijk zijn: ten gevolge van de onnauwkeurighedsrelatie van Heisenberg kunnen wij niet van een atoom – laat staan van  $10^{26}$  atomen – plaats en snelheid tegelijk zo nauwkeurig te weten komen als voor zo'n voorspelling nodig is. Zoals Born heeft aangetoond <sup>8)</sup>, is deze onbepaaldheid net datgene wat de tweede hoofdwet in principe mogelijk maakt. Een systeem moge vanzelf tijdelijk in een minder waarschijnlijke toestand kunnen overgaan, maar niemand, zelfs geen demon met wiskundige supercapaciteiten, kan voorspellen wanneer dit precies gebeuren zal. In laatste instantie blijkt de tweede hoofdwet dus mogelijk te worden door de onnauwkeurigheid, waarmee onze kennis is verbonden. Daar ligt voor sommigen iets onbevredigends in – Einstein althans <sup>9)</sup> schreef hierover, min of meer verwijtend, aan Born: „Du glaubst an den würfelnden Gott” – maar zo dient het toch wel gesteld te worden.

De vraag naar mogelijke afwijkingen van de tweede hoofdwet is van meer dan academisch belang, omdat een strikte toepassing van deze wet tot eigenaardige consequenties zou leiden. Immers, de tweede hoofdwet voorspelt voor ieder geïsoleerd systeem een verloop van alle processen in een zekere richting, te weten de richting van toenemende waarschijnlijkheid, van toenemende entropie. Als er in een afgesloten systeem entropie geproduceerd wordt, kan dit alleen door ingrijpen van buiten weer ongedaan worden gemaakt: zo'n systeem streeft naar een zekere evenwichtstoestand. Hoe nu, als wij als „systeem” het heelal nemen? Dit zou toch het meest volmaakt geïsoleerde systeem moeten zijn, dat denkbaar is: alle moeilijkheden die men in de praktijk ontmoet bij het experimenteel realiseren van de voorwaarden: energie constant, en geen arbeid verricht, zijn hier a

priori opgelost! Als de tweede hoofdwet ook hier geldt, dan moeten wij met Clausius tot de conclusie komen: „Die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu” – of, populair gezegd: het universum is een „aflopende zaak”. Hoe zou die toestand van maximale entropie er dan wel uitzien? En ligt dan niet de conclusie voor de hand, dat het universum nog maar een eindige tijd bestaat? De bewuste evenwichtstoestand, de „warmtedood” of „entropiedood”, is immers nog steeds niet ingetreden; hetgeen duidelijk moge blijken uit het grote aantal makroskopisch zichtbare processen, dat wij dagelijks om ons heen zien gebeuren.

Laten wij eerst eens nagaan, wat over deze toestand van maximale entropie bij de huidige stand van onze kennis gezegd kan worden. Veel is dit niet, want het karakter van deze toestand is afhankelijk van temperatuur, druk etc., en wij weten natuurlijk niet hoe deze grootheden ooit geweest zijn of zullen worden. Het enige, waar wij enige speculaties over kunnen wagen, is de toestand die in de omgeving van onze aarde eigenlijk zou moeten intreden bij de gegeven energie en dichtheid. Laten wij daarvoor een volume-element beschouwen, dat zo groot is dat het gemiddeld evenveel straling ontvangt als uitstraalt. De oppervlakkige beoordelaar zal bij een toestand van maximale waarschijnlijkheid aan een gelijkmatige vulling van de ruimte door een soort gas denken; maar dat is niet onder alle omstandigheden het geval. Een gelijkmatige verdeling van de atomen over de beschikbare ruimte is inderdaad de meest waarschijnlijke verdeling over de ruimtelijke coördinaten; de toestand van de atomen wordt echter niet alleen door hun plaats op een gegeven ogenblik, maar ook door andere parameters, b.v. hun snelheid bepaald. Voor een volledige beschrijving van een systeem hebben wij niet alleen plaats-, maar ook andere, b.v. snelheidscoördinaten nodig; in de fysica spreekt men i.p.v. over „snelheidscoördinaten” liever over „impulscóördinaten”. Een gelijkmatige verdeling over de ruimtelijke coördinaten kan wel eens een zeer onwaarschijnlijke verdeling over de snelheids- of impulscóördinaten zijn. Als b.v. helium als gas in de buurt van het absolute nulpunt gelijkmatig over de ruimte verdeeld is, dan zouden praktisch alle atomen zich in dezelfde energietoestand (nl. het laagste energieniveau) bevinden, hetgeen een zeer onwaarschijnlijke verdeling over de impulscóördinaten betekent. Condensatie tot vloeibaar helium gaat gepaard met warmteontwikkeling, als de warmte niet wordt afgevoerd dus met temperatuurverhoging, en deze heeft weer een waarschijnlijker verdeling over de impulscóördinaten tot gevolg

doordat een groter aantal atomen toegang krijgt tot hogere energieniveaus; daarom zal deze condensatie plaatsvinden zolang de entropiewinst (ten gevolge van de waarschijnlijker verdeling over de impulscoördinaten) opweegt tegen het entropieverlies (veroorzaakt doordat de atomen in een vloeistofdruppel ruimtelijk meer beperkt zijn dan in een gas). Zolang wij met chemische interactie-energieën te maken hebben, kunnen wij de druk van het gas steeds zo laag kiezen dat condensatie niet optreedt. Daarnaast is er echter nog de gravitatie; deze is weliswaar veel kleiner dan de chemische interactie, zolang wij met systemen op laboratoriumschaal te maken hebben, maar neemt veel minder snel af bij toenemende afstand. Aldus kunnen wij in systemen van zeer grote afmetingen tot een entropiewinst bij ongelijke verdeling van de materie komen: een deel van het gas trekt zich samen, en wordt ten gevolge van de hierbij vrijkomende gravitatie-energie warmer. De temperatuur kan tot enorme waarden oplopen.

Een eerste gevolg daarvan is, dat de gaswolk gaat stralen; zo'n systeem heet in het dagelijks leven een ster. Vanuit het oogpunt van entropieproductie kunnen wij in dit stralingsverschijnsel twee effecten zien: de entropie van het stralende lichaam neemt af, ten gunste van een entropiewinst ten gevolge van de verspreiding van de stralingsenergie over een groter deel van de ruimte. Het stralende lichaam zelf is nu niet meer een systeem van constante energie, zodat wij hierop niet meer de tweede hoofdwet (althans niet meer in de door ons gegeven formulering) mogen toepassen; wel daarentegen op ster + omgevende ruimte.

Een tweede gevolg: in de ster gaan processen verlopen die bij lagere temperatuur veel te langzaam zijn om te kunnen worden waargenomen. Met name vindt er een combinatie van atoomkernen (kernfusie) plaats waarbij energie vrijkomt, zodat de temperatuur steeds verder tracht op te lopen. Ook hier weer *entropieverlies* doordat materie, die eerst over een groot aantal deeltjes verdeeld gedacht kon worden, uiteindelijk in een geringer aantal deeltjes wordt gevonden waardoor de verdeling over ruimtelijke coördinaten minder waarschijnlijk wordt; *entropiewinst* doordat de resulterende deeltjes ten gevolge van hun hogere energie toegang hebben tot een groter aantal energieniveaus.

Waarheen zouden deze processen ons uiteindelijk moeten voeren? Bij die temperatuur en druk, die wij in het ons omgevende deel van de ruimte aantreffen, tot een materie in de vorm van die elementen

waarbij de bindingsenergie per kernonderdeel zo groot mogelijk is. Zoals bekend, komt er energie vrij bij splitsing van elementen met grote massa, en bij fusie van elementen met kleine massa; ergens in het midden van het periodiek systeem, in de buurt van ijzer, bevinden zich die elementen waarvan de bindingsenergie per kernonderdeel maximaal is. Verder kan men verwachten, dat er een bepaalde „kritische massa” bestaat; als deze overschreden wordt, dan wordt de gravitatie in het systeem zo groot dat de druk uitgeoefend door de elektronen overtroffen wordt: de afzonderlijke atomen verdwijnen, het materiaal wordt tot kerndichtheden samengeperst <sup>10)</sup>). Een ijzeren lichaam van de afmetingen van onze maan zou nog stabiel zijn, 1000 „ijzeren manen” bij elkaar echter niet meer. En als wij ergens een mechanisme weten te bewerkstellingen waarbij zich direkt evenwicht tussen materie en straling kan instellen – welnu, dan zou verreweg het grootste deel van (materie + straling) in straling moeten worden omgezet. Zoals Tolman heeft afgeleid <sup>11)</sup> kan dan alleen bij zeer hoge temperatuur en druk de verhouding materie/straling nog noemenswaard van 0 verschillen.

Deze confrontatie met de te verwachten evenwichtssituatie moge volstaan om U ervan te overtuigen dat wij daar nog heel ver van verwijderd zijn. Zowel de frequentie van het voorkomen van de elementen alsook de verhouding materie/straling zijn nog bij lange niet zo, als de geschetste ontwikkeling ons zou doen vermoeden. Mocht zo’n toestand ooit bereikt worden, dan zal er geen makroskopisch proces meer plaats kunnen vinden; wel zullen er locale fluctuaties optreden: omzettingen van atomen in straling of in andere atomen, maar deze zullen met een aan zekerheid grenzende waarschijnlijkheid tot mikroskopische dimensies beperkt moeten blijven. Von Smoluchowski <sup>12)</sup> heeft de tijd uitgerekend die men gemiddeld moet wachten om een fluctuatie van 1% te vinden in het aantal moleculen in een volume van een gas van normale druk en temperatuur, om dus in de plaats van 1,00 maal het gemiddelde aantal 1,01 of 0,99 maal dit getal te vinden. Is dit volume een bol met een straal van  $10^{-5}$  cm (dat is nog niet zichtbaar in een optische mikroskoop), dan vindt hij een wachttijd van  $10^{-11}$  seconde, een tijd die zo kort is dat hij niet gemeten kan worden. Is de straal 3 x zo groot, dus  $3 \cdot 10^{-5}$  cm (dat is mikroskopisch nog steeds niet zichtbaar), dan wordt de wachttijd al  $10^6$  seconden, d.i. van de orde van 10 dagen; en als de straal van de bol 1 cm is, dan wordt de wachttijd  $10^{(10^{14})}$  jaren, dus een aantal jaren, weer te geven door een 10 tot een macht verheven, die uit een 1 met

14 nullen bestaat! Dergelijke fluctuaties zijn zo zeldzaam, dat we met een toestand te maken zouden hebben zoals die door Goethe als ideaal aan Mephistopheles in de mond wordt gelegd <sup>13)</sup>:

„ . . . denn alles, was entsteht,  
ist wert dass es zu Grunde geht,  
drum besser wärs, wenn nichts entstünde”.

Moeten wij nu werkelijk aannemen, dat dit het toekomstig lot van ons universum zal zijn? Mogen wij de wetten van de thermodynamica wel toepassen op een zo groot systeem, of hebben wij hier te maken met wat ik zou willen noemen een „op hol slaan” van de theorie, waarbij men zich door de kernachtige formulering ervan laat meeslepen om haar toe te passen op een terrein waar zij niet geldig is? Dit gevaar is bij natuurwetenschappelijke theorieën niet denkbeeldig. Immers, het is de taak van een natuurwetenschappelijke theorie, verband te leggen tussen waarnemingen, het is niet haar taak uitgaande van aprioristische overwegingen een wereldbeeld te scheppen. Integendeel, de ontwikkeling van de natuurwetenschappen in de laatste halve eeuw, met name van relativiteitstheorie en quantenmechanica, heeft ons achterdochtig gemaakt tegen begrippen, die misschien wel geëist worden door zekere theorieën maar niet voor meting toegankelijk zijn. Anderzijds kan men zich toch niet helemaal aan de indruk onttrekken, dat door de tegenstanders van de toepasbaarheid van de tweede hoofdwet op het onderhavige probleem wel eens onhoudbare argumenten gebruikt zijn.

Zo heeft men de vraag gesteld: de tweede hoofdwet geldt voor een geïsoleerd systeem; waartegen is het universum dan wel geïsoleerd? En zolang deze vraag niet beantwoord kan worden, zou de tweede hoofdwet niet meer gelden. Dit argument heeft veel weg van wat men in de spreektaal een „dooddoener” noemt: „geïsoleerd systeem” is een verkorte uitdrukking voor „systeem van constante energie, dat zelf geen arbeid verricht op een ander systeem en waarop niet door een ander systeem arbeid wordt verricht” – en aan deze voorwaarden is in ons geval toch wel voldaan.

Een tweede argument is erop gebaseerd, dat de tweede hoofdwet berust op experimenten verricht op aarde, en dus niet toegepast zou mogen worden op buitenaardse problemen en processen. Het eerste deel van deze stelling is inderdaad juist: al onze natuurwetenschappelijke inzichten zijn gebaseerd op aardse gegevens; misschien moet ik

dit laatste in het tijdperk van de ruimtevaart iets voorzichtiger formuleren: gebaseerd op gegevens verkregen op aarde en in de naaste omgeving daarvan. Nog niemand is – gelukkig! – in staat geweest een experiment te verrichten op een zodanige schaal, dat het gehele universum erbij betrokken was. Maar de astrofysicus, die de temperatuur van een ster of de snelheid van een extragalactisch sterrenstelsel uit spectrale gegevens berekent, doet ook niet anders dan „aardse” natuurkunde toepassen onder omstandigheden, waar deze nooit getoetst is. Het moge waar zijn, dat het toepassen van de tweede hoofdwet op steeds groter systemen een extrapolatie inhoudt – maar dat is dan een extrapolatie in een richting waarin, voor zover wij weten, de tweede hoofdwet steeds strenger geldt. Naarmate het systeem groter wordt, worden fluctuaties van steeds minder belang, zoals met het zojuist vermelde voorbeeld van de dichtheidsfluctuaties in een gasvolume toegelicht werd.

Dit brengt mij op een derde, vanuit een logisch oogpunt nogal zwaarwegend argument tegen de entropiedood: de tweede hoofdwet geldt niet zonder uitzonderingen. De kans op afwijkingen van de evenwichtstoestand is klein, maar zij is er. Als U zich nog herinnert, hoe lang men wachten moet om in een bol met een straal van 1 cm een dichtheidsfluctuatie van 1% te vinden, dan kunt U zich wel voorstellen hoe klein de kans is om een ruimte van kosmische afmetingen zover uit zijn evenwicht te brengen als de omgeving van onze aarde is: naar mate het aantal deeltjes, dat bij zo'n onwaarschijnlijke toestand betrokken is, groter wordt nadert de waarschijnlijkheid ervan tot 0. Als wij zouden aannemen, dat deze toestand toevallig ontstaan is, postuleren wij dan niet het bestaan van grote gebieden van ruimte en tijd waarin al onze fysische wetten van kracht blijven, alleen de tweede hoofdwet en haar consequenties niet? En maken wij ons daarmee niet schuldig aan het gedeeltelijk in stand houden, gedeeltelijk buiten werking stellen van onze fysische wetmatigheden, waarbij wij de grens willekeurig daar trekken waar het in onze kraam te pas komt?

Boltzmann, een van de meest welsprekende verdedigers van het toevallig ontstaan van de onwaarschijnlijke begintoestand, ziet die moeilijkheid ook wel. Om deze te omzeilen, schetst hij <sup>14)</sup> het beeld van een universum van zodanige dimensies dat de afmetingen van onze sterrenhemel er klein bij zijn; hierin heerst bijna overal thermisch evenwicht, slechts relatief kleine gebieden, „Einzelwelten” in Boltzmann's terminologie, wijken gedurende relatief korte tijd noemenswaard van hun evenwichtstoestand af. Zijn redenering is:

natuurlijk, de kans op een zo onwaarschijnlijke begintoestand is heel klein, maar het universum is ook heel groot. Wil deze redenering opgaan, dan moeten er inderdaad buiten onze „Einzelwelt” grote gebieden zijn die in thermisch evenwicht verkeren; als dit niet het geval zou zijn, zou de kans op een afwijking van het evenwicht juist kleiner worden met toenemende afmetingen van het systeem. In het model van Boltzmann zouden even vaak processen van toenemende als van afnemende waarschijnlijkheid optreden: de twee richtingen van de tijd zijn hierin evenmin onderscheidbaar als er in de ruimte een „boven” of „beneden” bestaat. Zoals von Smoluchowski het uitdrukte: onomkeerbaarheid is een menselijke illusie.

Het antwoord op de vraag, of deze uitspraak acceptabel is, is in laatste instantie een kwestie van smaak: het hangt ervan af, of men de eigen ervaring dan wel de fysische wetmatigheden als „werkelijkheid” opvat. Ik kan mij voorstellen, dat velen het sproeien van een tuin een ander proces zullen blijven vinden dan het hanteren van een soort waterstofzuiger, al zijn dan beide gebeurtenissen met dezelfde vergelijkingen te beschrijven alleen door de tijdvariabele van teken te doen omkeren. Atomair gesproken is er niet een kwalitatief, slechts een kwantitatief verschil tussen reversibele fluctuaties en irreversibele processen: de fluctuaties veroorzaken een „rimpel” in de makroskopische verschijnselen, en wij nemen eigenlijk alleen een superpositie van beide waar. Volgens Boltzmann zijn de makroskopische processen uiteindelijk op een rimpel van gigantische afmetingen te herleiden – maar dit verschil in afmetingen tussen reversibel en irreversibel proces is zo groot dat het haast kwalitatief wordt. Voor ons als levende wezens is het maar goed, dat onze levensprocessen doorgaans boven de rimpel uitgaan: wie zou er nog natuurkunde kunnen bedrijven als de gravitatie van Newton experimenteel niet goed te verifiëren is, doordat een steen, die aangetrokken wordt door de aarde, in bijna evenveel gevallen naar boven valt (ten gevolge van fluctuaties) als naar beneden? Schrödinger<sup>15)</sup> heeft aannemelijk gemaakt, dat al onze waarnemingen slechts mogelijk zijn doordat de processen boven het rimpel-niveau uitgaan. Onwillekeurig zetten wij ons schrap tegen Boltzmann's model: als al onze makroskopische processen op een toevallige afwijking uit het thermische evenwicht berusten, zijn de processen zelf ook niet anders dan toevallig – maar wie zou dit voor zichzelf kunnen verdedigen bij het luisteren naar een strijkkwartet van Mozart? De eerlijkheid gebiedt natuurlijk, hieraan toe te voegen dat het bij het luisteren naar muziek

van meer recente datum wel eens veel moeilijker is, de indruk van toevalligheid bij conceptie en uitvoering ervan te ontwijken.

Er zijn echter nog meer principiële bezwaren tegen Boltzmann's model, die misschien het best als volgt kunnen worden toegelicht: Voor diegenen, die de entropiedood vrezen, zal het perspectief van Boltzmann geen soelaas kunnen bieden: onze „Einzelwelt” zou inderdaad de entropiedood sterven; maar na onvoorstelbaar lange tijden zou lokaal een soortgelijke afwijking van de meest waarschijnlijke toestand, zoals deze aan het begin van onze „Einzelwelt” gestaan heeft, zich opnieuw vanzelf instellen. Vraag niet hoe lang men op zo'n gebeurtenis zou moeten wachten; hoe lang het b.v. geleden is, dat een dubbelganger van mij in een analoog gezelschap een voordracht over de tweede hoofdwet van de thermodynamica hield. Niet alleen dat wij tot een getal zouden komen dat al onze voorstellingsmogelijkheden overschrijdt: de principiële moeilijkheid is, dat de tijd slechts een zinvolle fysische parameter is zolang er processen zijn waarmee hij gemeten kan worden, en als onze „Einzelwelt” aan de entropiedood toe is, is dit laatste (voor zover onze huidige waarnemingsmogelijkheden gaan) niet meer het geval. Immers, al onze processen om de tijd te meten berusten op entropieproductie; zelfs wanneer wij een reversibel proces – een wrijvingsloze slinger, of fluctuaties van aantallen gasmoleculen in een gegeven volume – als maat voor de tijd zouden definiëren, dan zou een dergelijk proces nog geregistreerd en geteld moeten worden: en dit gaat met entropieproductie gepaard die dan niet meer mogelijk is. Dit is duidelijk een andere situatie dan b.v. bij gebeurtenissen uit de tijd van de dinosauriërs: deze zijn evenmin door homo sapiens geobserveerd, maar lieten sporen achter zodat zij voor natuurwetenschappelijk onderzoek toegankelijk worden. In tegenstelling hiermee kan er in een afgesloten systeem geen spoor zijn van een situatie van thermisch evenwicht, daar zo'n situatie volstrekt geheugenloos is.

Een fundamenteel fysisch begrip als de tijd verliest zijn betekenis – hieruit blijkt misschien al een tekort van het model van Boltzmann: hij hanteert begrippen die buiten onze waarneming liggen. In zijn tijd lag er niets bijzonders in de veronderstelling, dat onze „Einzelwelt” ingebed zou zijn in een grote ruimte waarin thermisch evenwicht heerst; tegenwoordig zouden wij toch benieuwd zijn, waarom wij van deze gebieden niets waarnemen, noch straling, noch gravitatievelden. Bij nader inzien begrijpen wij echter, dat wij gebieden die in thermisch evenwicht verkeren nooit kunnen waarnemen: immers als



dat wel kon, dan zouden deze gebieden in wisselwerking staan met onze „Einzelwelt” die kennelijk niet in evenwicht is – en bijgevolg zouden zij zelf ook niet in evenwicht zijn! Wij zien, dat wij met dit model op een terrein terecht komen waar wij geen experimentele gegevens over kunnen hebben, en zolang wij eerlijke fysica of chemie bedrijven moeten wij ons daar toch wel een van de bekende blauw-zwarte bordjes met witte lettertjes geplaatst denken, waarop het priemgetal 461 gecorreleerd wordt met het Wetboek van Strafrecht.

De klassieke fysica zal aldus naar mijn mening het antwoord schuldig moeten blijven op de vraag naar de processen, die aan het begin van onze ervaringswereld een zeer onwaarschijnlijke toestand teweeg hebben gebracht, eenvoudig omdat wij met deze vraag de grenzen van onze ervaring overschrijden. Kunnen ons de theorieën die sinds Boltzmann's tijden ontwikkeld zijn, ter zake niet wijzer maken? Ik denk hierbij met name aan de relativiteitstheorie; immers, het is bekend dat een van de motieven van Einstein bij het opstellen van zijn relativistisch „kosmologisch model” was, dat men volgens Newton slechts een model met een eindige levensduur kon construeren <sup>16)</sup> – met andere woorden: een van Einstein's motieven was, aan de entropiedood te willen ontkomen. De vraag ligt dus voor de hand, wat thermodynamica en relativiteitstheorie elkaar op dit punt te leren hebben.

Er is bij mijn weten één onderzoeker geweest, die deze vraag heeft durven stellen en die ook getracht heeft, er een antwoord op te geven: Tolman. Straks zal blijken, dat zijn antwoord mij niet bevredigt; dat weerhoudt mij er echter niet van om mijn waardering uit te spreken over de wijze waarop hij het probleem aanpakte. Met name doe ik dit, omdat ik mij ten volle realiseer dat het veel moeilijker is een probleem aan te pakken dan achteraf het resultaat te kritiseren – om het met de woorden van Heine <sup>17)</sup> te zeggen: de dwerg, die op de schouders van een reus staat, kijkt verder dan de reus. Deze overweging ontheft ons echter niet van het recht, zelfs de plicht kritisch te blijven ten opzichte van de door onze voorgangers bereikte resultaten.

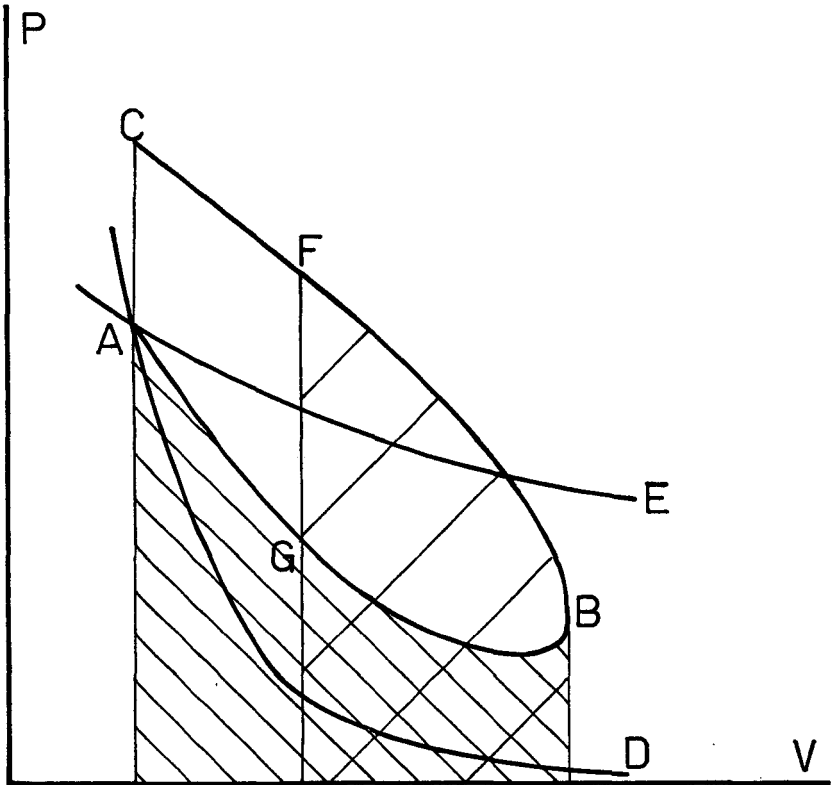
Tolman's argument loopt als volgt <sup>17)</sup>: Het oorspronkelijke relativistische model van het heelal, zoals dat door Einstein en de Sitter werd ontwikkeld <sup>18)</sup>, was statisch van aard, dichtheid en druk waren onafhankelijk van de tijd. Spoedig echter werd opgemerkt, dat zo'n statisch geheel niet in overeenstemming is met onze experimentele gegevens: de spectra van verre sterrenniveaus konden worden

geïnterpreteerd als een aanwijzing, dat deze systemen zich alle van ons en van elkaar verwijderen. De relativiteitstheorie legt bepaalde beperkingen op aan de vorm, waarin zo'n beweging kan optreden; afhankelijk van de keuze van zekere parameters kan men hetzij een voortdurende expansie verwachten, hetzij een pulsatie tussen een grootste en een kleinste afmeting, waarbij deze laatste zelfs puntvormig zou moeten zijn: de gehele kosmos zou, volgens deze oplossing, van tijd tot tijd tot een punt ineenschrompelen.

Nu is dit model nog zuiver mechanisch van aard; bij de afleiding zijn alle dissipatieve processen vermeden. In werkelijkheid treden deze toch op; hoe beïnvloeden zij het resultaat? Het is te verwachten, dat een voortdurend expanderend model wel zonder veel moeite in overeenstemming gebracht zal kunnen worden met de thermodynamica: hierin verlopen alle processen in één bepaalde richting, als er dissipatie optreedt dan toch vermoedelijk in de richting van toenemende entropie, en het karakter van de expansie zal misschien wel kwantitatief, maar niet kwalitatief anders worden. Voor een pulserend model is dit echter nog helemaal niet zeker. Zolang er geen dissipatie is, kunnen we een voortdurende pulsatie verwachten, ongeveer analoog aan een op de grond stuitende knikker, die ook eindeloos door zou blijven stuiten wanneer alle dissipatie verwaarloosd wordt (luchtwrijving, omzetting van kinetische in thermische energie ten gevolge van niet volledig elastisch stuiten enz.).

Om de invloed van dissipatieve processen in dit model na te gaan, beschouwt Tolman een specifiek geval: een gebrek aan instelling van een dissociatie-associatie-evenwicht. Hij denkt zich het model opgebouwd uit volume-elementen, homogeen gevuld met een dissocieerbare materie; om de gedachten te bepalen kan men hierbij aan  $H_2 \rightleftharpoons 2H$  denken. Bij expansie en contractie van het model zal ieder volume-element zich adiabatisch gedragen, ten gevolge van het isotrope karakter van het model: ieder volume-element verliest evenveel aan straling en warmte als het ontvangt. Een volume-element zal dus kolossale afmetingen moeten hebben, indien wij een verband willen leggen met de ons omringende ruimte, maar dat is geen principieel bezwaar. Tijdens de expanderende fase neemt het volume toe, de druk bijgevolg af. Tolman stelt nu, dat er door gebrek aan instelling van het dissociatie-evenwicht tijdens expansie een lagere druk zal heersen dan eigenlijk bij een gegeven afmeting van het volume-element hoort, tijdens contractie een hogere druk. Een en ander kan misschien het best duidelijk worden gemaakt aan de hand

van een figuur, waarin schematisch de druk van een volume-element als functie van zijn volume is uitgezet.



*Schematisch  $pV$ -diagram voor een pulserend volume-element. Verklaring der letters in de tekst.*

Bij het begin van een expansie zij de druk gegeven door A: het volume is klein, de druk hoog, de dissocieerbare vulstof zal voornamelijk in geassocieerde vorm aanwezig zijn (dus b.v., als we het evenwicht  $H_2 \rightleftharpoons 2H$  beschouwen, in de vorm van  $H_2$ ). Tijdens de expansie zou de druk lijn AD volgen zolang er geen dissociatie optreedt; stelt het evenwicht zich telkens volledig in, m.a.w. kan de dissociatie de volume-verandering op de voet volgen, dan zou de druk b.v. lijn AE moeten volgen: ten gevolge van de optredende dissociatie wordt bij een gegeven volume de druk hoger. In werkelijkheid zal het evenwicht niet steeds gehandhaafd blijven, zodat de druk een

lijn tussen AD en AE, b.v. lijn AGB zal volgen. Tijdens de expansie verricht het volume-element een arbeid, waarvan de grootte gegeven wordt door het oppervlak onder curve AGB (in de figuur dicht gearceerd), de desbetreffende energie wordt „opgeslagen” als gravitatie-energie.

Als nu bij B expansie overgaat in contractie, zal het dissociatie-evenwicht het proces weer niet helemaal kunnen volgen. Bij gelijk volume zal daarom tijdens de contractie de druk hoger zijn dan tijdens de expansie: de druk van het volume-element volgt tijdens contractie b.v. lijn BFC. Maar dan zou, aldus Tolman, hieruit eigenlijk moeten volgen dat ieder volume-element bij het doorlopen van een cyclus energie wint: immers, de tijdens contractie op het volume-element verrichte arbeid wordt gegeven door het onder de curve BFC gelegen oppervlak, zodat er tijdens contractie meer arbeid *op* het volume-element wordt verricht dan het volume-element zelf verricht tijdens expansie. Aldus zou ieder volume-element bij het doorlopen van een aantal pulsaties steeds energierijker worden, en hetzelfde zou voor de verzameling van alle volume-elementen, het heelal, moeten gelden!

Thermodynamisch is dit correct, zolang het volume-element na het doorlopen van een cyclus inderdaad weer tot zijn uitgangspunt terugkeert: wij kunnen een systeem, waarin irreversibele processen optreden, alleen op een gewenst tijdstip in zijn oorspronkelijke toestand terugbrengen door energie toe te voeren. Analooq in het geval van een stuitende knikker: *als* deze na het stuiten weer tot zijn oorspronkelijke hoogte terugkeert terwijl er toch irreversibele processen hebben plaatsgevonden, dan moet energie zijn toegevoerd.

De vraag is echter niet, of de conclusie uit de premisse volgt, maar of aan de premisse wel voldaan is. Volgt werkelijk uit de relativistische vergelijkingen, dat het volume-element na een pulsatie tot zijn oorspronkelijk volume terugkeert? Deze vraag is zeer moeilijk te beantwoorden, omdat juist de overgang van contractie naar expansie („puntvormige dimensies”) analytisch niet te beschrijven is: een aantal grootheden wordt daar oneindig. Vanuit thermodynamisch standpunt zou men eerder verwachten, dat het volume-element na één pulsatie niet meer tot zijn oorspronkelijke volume kan terugkeren: het zal niet verder kunnen komen dan punt F, zodanig gelegen dat het onder curve BF gelegen oppervlak (in de figuur licht gearceerd) hoogstens gelijk is aan het onder curve AGB gelegen oppervlak (in de figuur dicht gearceerd). Als wij rekening houden met andere dissipatieve processen (viscositeit, warmtegeleiding etc.),

zouden wij zelfs moeten concluderen dat het licht gearceerde oppervlak nog iets kleiner zou moeten zijn dan het dicht gearceerde oppervlak. Met andere woorden: de pulsaties zouden ten gevolge van dissipatieve processen een gedempt karakter moeten hebben, ook een pulserend heelal zou dus een entropiedood tegemoet gaan. Het zou wel eens interessant zijn, een nauwkeuriger berekening van dit model uit te voeren, temeer daar recente waarnemingen<sup>19)</sup> eerder in overeenstemming met een pulserend dan met een voortdurend expanderend universum schijnen te zijn.

*Dames en Heren,*

Het voorgaande moge U een indruk gegeven hebben van het zeer algemene karakter van de tweede hoofdwet der thermodynamica. En het merkwaardige is, dat deze algemene wet uiteindelijk op onwetendheid berust – namelijk op onze onbekendheid met de nauwkeurige atomaire parameters van een systeem, en ons ook aan de andere kant met de grenzen van onze kennis confronteert: immers, zij houdt in dat wij en al onze makroskopisch waarneembare processen een stadium vormen in een ontwikkeling die met een zeer onwaarschijnlijke toestand begon en naar een toestand van grote waarschijnlijkheid leidt; een ontwikkeling, die vanuit een zeker standpunt als „illusoir” beschreven kan worden, maar alleen op basis van een theorie die de grenzen van het waarneembare overschrijdt. Wat er buiten deze ontwikkeling plaats gevonden heeft of plaats zal vinden, of er een „buiten” is in de zin van een fysisch waarneembare realiteit – dit zijn vragen waar de thermodynamica evenmin antwoord op geeft als andere fysische theorieën, vragen, die fysisch pas zinvol worden zodra er een experimentele benadering voor gevonden is.

Ik dank U voor Uw aandacht.

## Referenties

- 1) L. Brillouin, *Science and Information Theory*, Academic Press 1962.
- 2) E. T. Jaynes, *Phys. Rev.* 106 (1957), 620.
- 3) C. E. Shannon en W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*, University of Illinois Press, Urbana 1949.
- 4) J. von Neumann, *Theory of Self-Reproducing Automata*, University of Illinois Press, Urbana, Londen 1966, p. 61.
- 5) P. Glansdorff en I. Prigogine. *Physica* 30 (1964), 351.
- 6) F. Schlögl, *Phys. Lett. A* 24 (7) (1967), 393; *Zeitschr. f. Physik* 198 (1967), 559.
- 7) R. Becker, *Theorie der Wärme*, Heidelberger Taschenbücher, Band 10, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1966, p. 97.
- 8) M. Born, *Natural Philosophy of Cause and Chance*, Oxford, Clarendon Press 1949.
- 9) Brief van 7.11.1944, geciteerd in ref. 8)
- 10) J. A. Wheeler, in: Hong-Yee Chin en W. F. Hoffman (ed.), *Gravitation and Relativity*, W. A. Benjamin, New York, Amsterdam 1964, p. 195-230.
- 11) R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*; Oxford, Clarendon Press 1934.
- 12) M. von Smoluchowski, *Sitzungsber. Akad. Wissenschaften Wien, Ila*, 124 (1915), 339.
- 13) J. W. von Goethe, *Faust I*, Reclams Universal-Bibliothek Nr. 1/1a 1948, v. 1339 evgg.
- 14) L. Boltzmann, *Nature* 51 (1895), 413; *Vorlesungen über Gastheorie*, II. Theil, VII. Abschnitt § 90, Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1898, p. 256.
- 15) E. Schrödinger, *What is life?*, Cambridge, University Press 1948.
- 16) A. Einstein, *Relativity*, Hartsdale House Inc., New York 1947, p. 125-127.
- 17) H. Heine, *Zur Geschichte der Religion und Philosophie in Deutschland*, 1834; *Sämtliche Werke* (G. Karpeles, ed.; Leipzig, Max Hesses Verlag) VII p. 32.
- 18) A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, 4th Ed., Methuen & Co Ltd., London 1950, p. 98-103.
- 19) A. Sandage, *The Observatory* 88, 91 (1968)