Eindhoven University of Technology

BACHELOR

Een moeilijke instantie voor farthest insertion

Pieterse, A.

Award date:
2013

Link to publication

Disclaimer
This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Download date: 20. Jan. 2026

Een moeilijke instantie voor Farthest Insertion

Astrid Pieterse (0743073)
Begeleider: dr.ir. C.A.J. Hurkens

Bachelorproject (2J008)
Technische Universiteit Eindhoven

16 augustus 2013

Inhoudsopgave

1 Inleiding **3**

2 Farthest insertion **3**

3 Een vervelende instantie voor farthest insertion **4**

3.1 Viaduct 4

3.2 Ladder 5

3.3 Combinatie 5

4 Volgorde van toevoegen door Farthest insertion **8**

4.1 Initialisatiefase 8

4.2 Iteraties 9

5 Cheapest insertion **12**

5.1 Initialisatiefase 12

5.2 Iteraties 13

5.2.1 Lemma 1 14

5.2.2 Lemma 2a 14

5.2.3 Lemma 2b 14

5.2.4 Lemma 3 14

5.2.5 Lemma 4 15

5.2.6 Lemma 5 15

5.2.7 Lemma 6 15

5.2.8 Gevolg 1 15

6 Circuitlengte **21**

7 Conclusie **22**

1 Inleiding

Het Traveling Salesman Problem is een bekend probleem. Gegeven een volledige, gewogen graaf, vindt een Hamilton circuit met minimaal gewicht. Hierbij gaan we ervanuit dat de gegeven graaf symmetrisch is, en dat de driehoeksongelijkheid geldt. De beslissingsvariant van dit probleem is NP-compleet, wat de reden is dat er allerlei verschillende benaderingsalgoritmes voor het probleem zijn bedacht. Farthest insertion is een zo een algoritme, het algoritme is behoorlijk vergelijkbaar met bijvoorbeeld nearest insertion en cheapest insertion. Ik zal het algoritme kort toelichten in sectie 2. Van zowel nearest als cheapest insertion is bekend dat ze een circuit geven dat maximaal twee keer zolang is als het optimale circuit, het zijn dus 2-benaderingsalgoritmes. Van farthest insertion is dit echter niet bekend. Enige tijd werd gedacht dat farthest insertion ook een bovengrens van twee zou hebben, tot er een voorbeeld werd gevonden waarbij het circuit dat farthest insertion gaf meer dan twee keer het optimum was. In praktijk werkt het algoritme prima, vaak zelfs iets beter dan nearest en cheapest insertion, maar of er een constante bovengrens bestaat is niet bekend. In dit verslag zal ik een instantie voor farthest insertion uitwerken, waar farthest insertion een circuit kan geven dat tot vijf keer zolang is als het optimum.

2 Farthest insertion

Farthest insertion is een algoritme dat in de basis vergelijkbaar is met bijvoorbeeld nearest insertion, cheapest insertion en random insertion. Van zowel nearest insertion als cheapest insertion is al langer bekend dat dit 2-benaderingsalgoritmes zijn, het circuit dat gevonden wordt door zo een algoritme is maximaal twee keer zo lang als het optimale. Van random insertion is bekend dat er geen constante bovengrens is [1]. Laat P een lijst zijn met de punten in de volgorde zoals in het circuit, P_2 een lijst met punten die nog niet in het circuit voorkomen. We definiëren $d(v, P)$ voor een vertex v dan als

$$d(v, P) = \min\{d(v, p) | p \in P\}$$

FarthestInsertion($G = (V, E)$)

$P_2 = V$, $P = \emptyset$

Kies een willekeurig startpunt $v_0 \in V$

$P_2 \leftarrow P_2 \setminus v_0$

$P \leftarrow [v_0]$

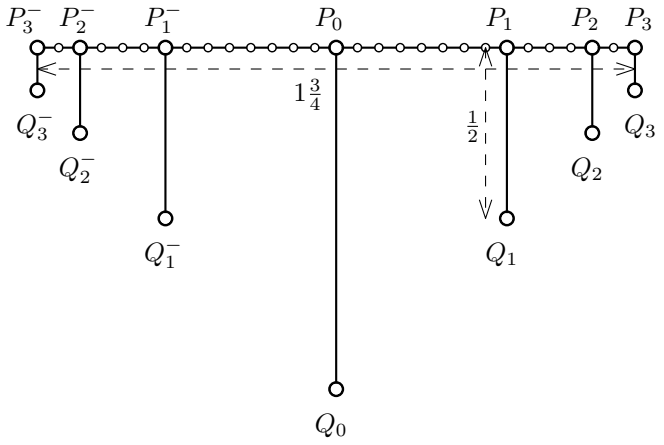
while $P_2 \neq \emptyset$

Kies $v \in P_2$ met $d(v, P) = \max\{d(u, P) | u \in P_2\}$

Voeg v toe in P tussen twee opeenvolgende punten u_1 en u_2 zodat $d(v, u_1) + d(v, u_2) - d(u_1, u_2)$ minimaal is.

$P_2 \leftarrow P_2 \setminus v$

end while



Figuur 1: Een voorbeeld van een viaduct.

3 Een vervelende instantie voor farthest insertion

Met deze instantie zullen we farthest insertion een route laten geven die bijna 5 keer zolang is als de optimale route. Deze instantie zal worden beschreven als een graaf met kanten die ieder een lengte hebben. Deze graaf is een complexe structuur, bestaande uit twee soorten deelgrafen: viaducten en ladders. We zullen eerst deze deelgrafen beschrijven, om ze vervolgens te combineren tot de uiteindelijke graaf. Deze graaf is geen volledige graaf, de afstandsmatrix voor farthest insertion zal worden gedefinieerd door het kortste pad tussen twee punten binnen deze graaf. Dit voorbeeld is gebaseerd op [2].

3.1 Viaduct

We kiezen om te beginnen een getal natuurlijk getal M. Een viaduct bestaat dan uit een pad van lengte $2 * (1 - 2^{-M})$, waarover een aantal knopen verdeeld liggen. Deze liggen op onderling gelijke afstand, die gelijk is aan $2^{-\mu}$ voor een zekere gekozen waarde van μ met $\mu > M$.

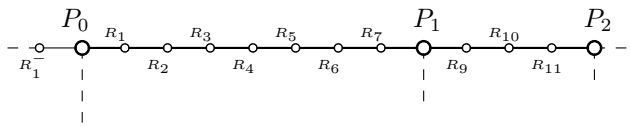
Een viaduct is symmetrisch dus zal alleen de rechterhelft worden besproken. Een deel van deze knopen krijg een label in de vorm van P_i, het "spiegelbeeld" van de betreffende knoop heet dan P_i^-, behalve voor P_0 die zijn eigen spiegelbeeld is. Hierbij geldt dat $0 \leqslant i \leqslant M$. De middelste knoop van het pad van lengte $2 - 2^{1-M}$ noemen we P_0. Voor de overige knopen geldt dat

$$d(P_j, P_0) = 1 - 2^{-j}, 0 < j \leqslant M$$

Dat wil eigenlijk zeggen dat we steeds de rechterhelft van het pad weer in tweeën delen.

Verder is knoop P_i verbonden met een zekere knoop Q_i. Als er straks meerdere viaducten gecombineerd worden, zal blijken dat sommige vertices Q_i samenvallen. De afstand van P_i tot Q_i is gelijk aan 2^{-i} voor $i \leqslant M$. Zie figuur 1 voor een afbeelding met $M = 3, \mu = 4$.

Langs het pad van lengte $2 - 2^{1-M}$ liggen nu nog ongelabelde punten. Ze krijgen een label R_i, of in het gespiegelde geval R_i^-. Ze worden genummerd vanaf P_0, het punt R_i heeft afstand $i * 2^{-\mu}$ tot P_0. Zie afbeelding 2.



Figuur 2: Een uitvergroting van een deel van het viaduct met alle labels.

3.2 Ladder

Een voorbeeld van een ladder is te zien in figuur 3. De definitie voor $i > 0$ is als volgt: Ladder $L(i)$ heeft $2i + 2$ knopen, gelabeld LL_j voor de linkerkant van de ladder en LR_j voor de rechterkant, waar $0 \leqslant j \leqslant i$.

De edges die in de tekening horizontaal zijn, dus edges van de vorm $(LL_j, LR_j), 0 \leqslant j \leqslant i$ hebben lengte 2^{2-j}.

Verder zijn er nog edges van de volgende vormen: $(LL_j, LL_k), (LL_j, LR_k), (LR_j, LR_k), (LR_j, LR_k)$ waar $0 \leqslant j < k \leqslant i$. Deze hebben allemaal een lengte van 2^{1-j}.

We noemen het pad LL_0, LL_1, LR_1, LR_0 de *basis* van een ladder.

Voor $i = 0$ krijgen we dus ladder $L(0)$ en deze heeft een andere definitie. Dit is namelijk een ladder met 6 punten, gelabeld LL_j en LR_j met $j \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. De ladder is volledig weergegeven in figuur 4.

3.3 Combinatie

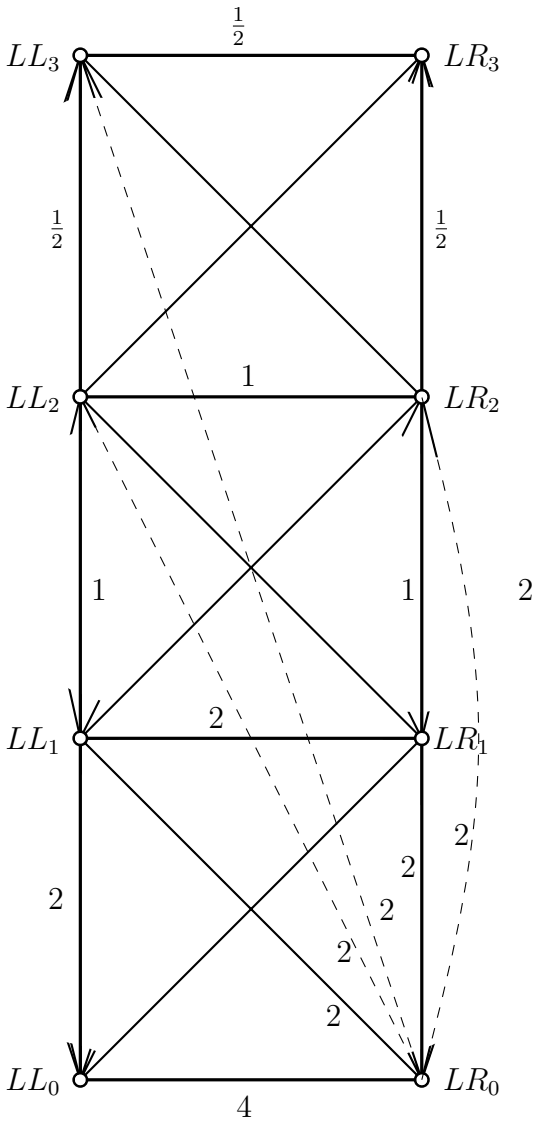
We kiezen een zekere waarde voor M en $\mu > M$ voor onze viaducten. We kiezen ook een natuurlijk getal N. Nu gaan we $N * 2^M$ viaducten gebruiken (waarbij bepaalde nodes van viaducten samen zullen gaan vallen). Elk viaduct wordt gelabeld als $Via(n, X)$, waarbij $1 \leqslant n \leqslant N$ en verder $0 \leqslant X < 2^M$. We labelen knopen binnen een viaduct door het label van de knoop gevolgd door het label van het viaduct, bijvoorbeeld $P_0(1, 1)$.

Nu zullen we aangeven welke knopen met label Q_i aan elkaar gelijk zijn. Voor elk paar viaducten: $Via(n_1, X_1)$ en $Via(n_2, X_2)$ bekijken we de binaire representatie van de getallen X_1 en X_2, die elk een M-bits getal opleveren.

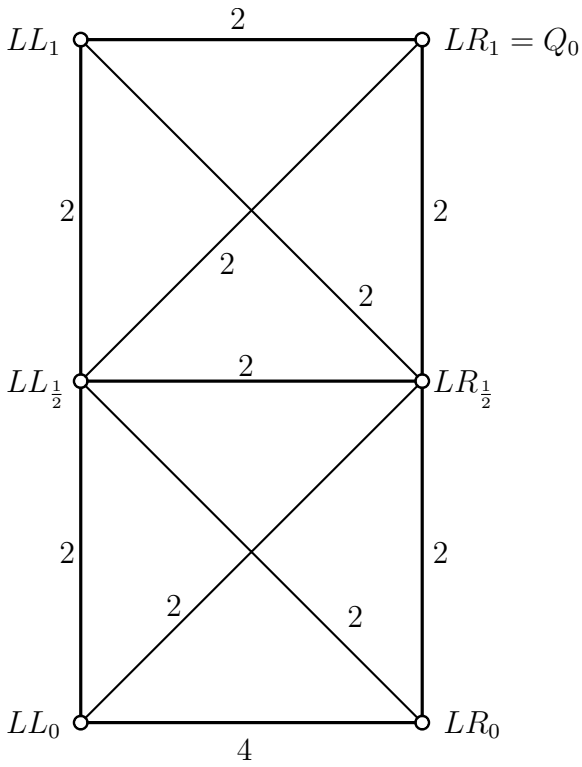
Er geldt dat $Q_i(n_1, X_1) = Q_i(n_2, X_2)$ indien $X_1 \mod 2^i \equiv X_2 \mod 2^i$, ofwel als de laatste i bits van X_1 en X_2 gelijk zijn. Voorgaande geldt ook voor vertices van de vorm Q_i^-. Uit deze definitie volgt direct dat er in de graaf 2^i verschillende punten Q_i zijn. Bovenstaande definitie hangt niet af van n_1 en n_2, vandaar dat we bij deze nodes n net zo goed uit het label kunnen weglaten. Bovendien kunnen we voor elk punt Q_i, $0 < i \leqslant M$ met oorspronkelijk label (n, X) een bitstring van lengte i als representant kiezen, namelijk $X \mod 2^i$. Het punt Q_0 zullen we niet labelen, aangezien uit de definitie volgt dat er maar 1 punt Q_0 is.

Nu zullen we de ladders en de viaducten gaan combineren en dan is de graaf gedefinieerd. Voor elk punt $Q_i(X)$ of $Q_i^-(X)$,$1 \leqslant i \leqslant M$, definiëren we een ladder $L(i, X)$ of $L^-(i, X)$. Hierbij bepaalt i het aantal knopen in de ladder, samen met X vormt dit het label van deze ladder. Hierbij geldt dat $Q_i(X) = LR_i(i, X)$, ofwel Q_i is de rechterbovenhoek van de bijbehorende ladder. Voor Q_0 hebben we echter een iets andere definitie, de bijbehorende ladder van Q_0 is ladder $L(0)$, en Q_0 is hier gelijk aan het punt LR_1 van deze ladder.

Nu kiezen we een cyclische volgorde Ω van alle ladders. We bepalen dat LR_0 van ladder j samenvalt met LL_0 van ladder nummer $j + 1$ binnen ordening Ω.



Figuur 3: Een voorbeeld van een ladder.



Figuur 4: Een afbeelding van de ladder $L(0)$.

Nu de graaf volledig beschreven is, definiëren we de afstand tussen twee punten, als de lengte van het kortste pad binnen deze graaf. Op deze manier is per definitie aan de driehoeksongelijkheid voldaan.

We laten zien dat als twee punten A en B binnen de graaf zijn verbonden door een kant E, dan geldt dat $d(A, B) = l(E)$. Er zijn een aantal gevallen te onderscheiden:

- A en B liggen in ladder 0. Als $d(A, B) = 2$ bestaat er geen korter pad, alle uitgaande edges uit A en B hebben lengte minstens 1. Als $d(A, B) = 4$ moet gelden dat $(A, B) = (LL_0, LR_0)$, en deze punten hebben uitgaande edges van lengte minimaal 2, dus bestaat er geen korter pad. In de rest van het bewijs zullen we dan ook aannemen dat we het niet over ladder 0 hebben.

- A en B zijn van de vorm LL_i of LR_i en LL_j of LR_j, binnen dezelfde ladder ongelijk $L(0)$, met $i \neq j$. We nemen zonder verlies van algemeenheid aan dat $i < j$, dan geldt dat $l(E) = 2^{1-i}$. Als dit niet de afstand van A naar B is, dan moet er een ander, korter, pad van A naar B zijn. Echter, edges vanuit A hebben lengte minimaal 2^{1-i}, dus zo een pad kan nooit korter zijn.

- A is gelijk aan LL_i en B aan LR_i binnen dezelfde ladder, ongelijk aan $L(0)$. Dan geldt $l(E) = 2^{2-i}$. Er zijn nu twee mogelijkheden, namelijk:

  $B = Q_i(X)$ met $0 < i \leqslant M$ voor zekere X, dan geldt dat de edge (A, B) de kortste edge uit A is, en deze heeft lengte 2^{2-i}.

  $B \neq Q_i(X)$ voor zekere X, dan hebben zowel edges uit A als edges uit B lengte minimaal 2^{1-i}, dus een ander pad dat vertrekt uit A en terugkomt in B, heeft lengte minimaal $2 * 2^{1-i} = 2^{2-i}$. Dus $d(A, B) = l(E)$.

- A en B zijn twee punten R_i en R_{i+1}, danwel een punt R_i, en een punt P_i. Er bestaat geen korter pad, want elke uitgaande edge van A en B is al even lang als edge E.
- A is gelijk aan P_i, verbonden met een punt B gelijk aan Q_i. Om vanuit $P_i(n, X)$ indirect naar Q_i te komen moet viaduct (n, X) verlaten worden via een van de punten $Q_j(X)$, maar $d(P_i, Q_j) \geqslant d(P_i, Q_i) \forall j$, dus er is geen korter pad van Q_i naar P_i.

4 Volgorde van toevoegen door Farthest insertion

In deze sectie zullen we een mogelijke volgorde geven waarin we de punten uit de graaf aan het circuit zullen toevoegen. Vervolgens zullen we laten zien dat deze volgorde voldoet aan de regels van het farthest insertion algoritme. Het is dus een volgorde die door farthest insertion kan worden gekozen.

4.1 Initialisatiefase

We noemen de verzameling punten in het huidige circuit van Farthest insertion tijdelijk F. Farthest insertion begint met een willekeurig punt, dus mogen we hiervoor het punt Q_0 kiezen, dus om te beginnen geldt $F = \{Q_0\}$.

Afstand 4 Op dit moment is de maximale afstand van een punt tot F gelijk aan 4.
Stel namelijk dat er een node A is gegeven, dan moet zijn afstand naar Q_0 kleiner of gelijk aan 4 zijn. Als A in een van de viaducten ligt, dan is het bereikbaar met het pad $Q_0 \to P_0 \to A$ (waarbij P_0 van hetzelfde viaduct is als A) en dit pad heeft een lengte kleiner gelijk 2. Ligt A in een ladder ongelijk aan $L(0)$ dan is het te bereiken via een vergelijkbaar pad als boven, namelijk $Q_0 \to P_0(X, 0) \to P_i(X, 0) \to Q_i(X) \to A$ voor bepaalde X en i. Dit geeft de afstand die kleiner gelijk aan $1 + 1 + 2 = 4$ is.

We kunnen nu de volgende twee dingen bewijzen:

De punten $LR_0(j, X)$ *met* $j \neq 0$ *liggen op afstand* 4 *van* Q_0.
Elk pad om vanuit LR_0 naar Q_0 te gaan, moet immers de ladder verlaten, dit kost minimaal 2, en om vervolgens via een viaduct weer in de ladder van Q_0 te komen kost ook minimaal $1 + 1 = 2$. Geeft afstand minimaal 4.

De afstand tussen een punt $LR_0(j_1, X_1)$ *en een punt* $LR_0(j_2, X_2)$ *met* $X_1 \neq X_2$ *is groter gelijk aan* 4.
Een rechtstreekse edge heeft kosten 4. Is zo een kant er niet, dan is tweemaal een uitgaande kant nodig met lengte groter gelijk aan 2, wat ook een afstand van minimaal 4 geeft.

De maximale afstand tot het circuit , ofwel Q_0, is gelijk aan 4, de punten LR_0 liggen op afstand 4 van Q_0 en hebben bovendien onderlinge afstand 4, dus kunnen we alle punten LR_0 een voor een toevoegen aan F. De volgorde waarin dit gebeurt kunnen we zelf kiezen en zullen we vastleggen in het volgende hoofdstuk. Merk op dat het toevoegen van alle punten LR_0 meteen betekent dat alle punten LL_0 in F zitten.

Afstand 2 Als alle punten LR_0 aan F zijn toegevoegd, is de maximale afstand tot het circuit gelijk aan 2. Dit laten we zien door een willekeurige node A te bekijken met $A \notin F$. Als A in een van de viaducten (inclusief de punten Q_i) ligt, dan is de afstand tot Q_0 maximaal 2 en Q_0 zit in het circuit . Verder heeft elk punt dat niet in F zit in een ladder ongelijk $L(0)$ een afstand van maximaal 2 tot het punt LR_0 van deze ladder. In ladder $L(0)$ heeft elk punt dat niet in F zit afstand maximaal 2 tot Q_0.

De punten LL_1 en $LR_1 \neq Q_0$ liggen op precies afstand 2 van het circuit : $d(LL_1(i,X), LL_0(i,X)) = d(LL_1(i,X), LR_0(i,X)) = 2$. Dit zijn de enige punten binnen de ladder die al in het circuit liggen, dus als er een punt B op het circuit is met $d(B, LL_1(i,X)) < 2$ moet deze in een andere ladder liggen. Echter, naar een andere ladder gaan en daar naar een punt in het circuit komen heeft kosten minimaal 2: $d(LL_1(i,X), Q_i(X)) = 1$, dan naar een andere ladder, waarin je omlaag moet naar punt LL_0 of LR_0, totale kosten minimaal 2. De enige ander optie is naar Q_0 gaan, echter via het viaduct moet je dan edge (P_0, Q_0) nemen en deze heeft lengte 1, geeft ook een afstand van minimaal 2. Analoog voor LR_1.

Ook de punten $LL_{\frac{1}{2}}$ en $LR_{\frac{1}{2}}$ in ladder $L(0)$ liggen op afstand minimaal 2 van het circuit , al hun uitgaande edges hebben immers lengte minimaal 2.

We hebben net laten zien dat LR_1, LL_1,$LL_{\frac{1}{2}}$ en $LR_{\frac{1}{2}}$ maximale afstand tot het circuit hebben, dus deze mogen worden toegevoegd aan de tour. Omdat altijd geldt dat de onderlinge afstand van dit soort punten minimaal 2 is, kunnen ze in willekeurige volgorde aan het circuit worden toegevoegd, deze volgorde wordt verder uitgewerkt in hoofdstuk 5.

Hiermee worden dus ook alle punten Q_1 en Q_1^- aan de tour toegevoegd, waardoor de maximale afstand tot de tour gelijk wordt aan 1. Immers, een punt in een viaduct heeft afstand kleiner gelijk 1 tot een zeker punt Q_1 en een punt in een ladder dat niet in F zit heeft afstand maximaal 1 tot een punt LL_1 in dezelfde ladder.

4.2 Iteraties

Het verloop van de rest van het algoritme zullen we omschrijven met een aantal fasen. Het idee is dat aan het begin van fase K de afstand tot de tour gelijk is aan 2^{-K} met $0 \leqslant K \leqslant \mu$. Zoals beschreven in de initialisatie fase, is bij de 0'de iteratie de afstand ook inderdaad gelijk aan $2^{-0} = 1$.

Punten in de tour na ronde $K-1$ Voor het begin van ronde K zitten (per inductie) de volgende vertices in de tour:

- De vertices Q_j met $0 \leqslant j \leqslant \min\{K+1, M\}$ (als $K \geqslant M-1$ zitten dus alle vertices van de vorm Q_j in de tour)
- De vertices LL_j en LR_j met $0 \leqslant j \leqslant \min\{K+1, M\}$
- De vertices P_j met $0 \leqslant j \leqslant \min\{K-1, M\}$ (voor $K = 0$ de lege verzameling)
- De vertices R_j met afstand $t * 2^{-K+1}$ tot P_0, voor $t \in \mathbb{N}$. We noemen $d = 2^{\mu-K+1}$, dan zijn dit de punten R_j waarvoor geldt dat $j = t * d$.

Merk op dat voor het begin van ronde 0 ook inderdaad alle vertices LL_0, LL_1, $LL_{\frac{1}{2}}$, $LR_{\frac{1}{2}}$, LR_0 en LR_1 in de tour zitten.

Maximale afstand voor ronde K We zullen nu laten zien dat de maximale afstand tot de tour in ronde K ook gelijk is aan 2^{-K}, waarbij we ervanuitgaan dat bovenstaande punten in het circuit liggen. Dat deze afstand ook daadwerkelijk gehaald wordt, zal blijken in de rest van het bewijs.
Laat dus een willekeurig punt A gegeven zijn, met $A \notin F$.
Als A in een viaduct (zonder de punten Q_i) ligt, dan heeft A een afstand van maximaal 2^{-K} tot een van de punten R die al in het circuit zitten, want deze liggen met regelmatige onderlinge

afstand van 2^{-K+1} over het viaduct, of A heeft afstand maximaal 2^{-K} tot het punt Q_{K+1}.
Als A in een ladder ligt, dan heeft A een afstand van (maximaal) 2^{-K} tot het punt LL_{K+1}, dat in F zit. Dus de afstand van een punt tot F is maximaal 2^{-K}.

Punten die worden toegevoegd in ronde K In ronde K selecteren we de punten P_K, LL_{K+2}, LR_{K+2} en R_j's met $t * 2^{-K} = d(R_j, P_0) \leqslant 1 - 2^{-K}$ en t oneven, waarbij R_j niet samenvalt met een punt P. We zullen in dit stuk aantonen dat dit ook inderdaad mogelijk is volgens de regels van farthest insertion.

Als $K \leqslant M$, dus als nog niet alle punten P_K aan de tour zijn toegevoegd, kunnen we laten zien dat $d(P_K, F) = 2^{-K}$. Dat wil dus zeggen dat P_K op dit moment een maximale afstand tot de tour heeft.

In onderstaand bewijs gaan we er niet vanuit dat dit het eerste punt P_K is dat aan de tour wordt toegevoegd, er kunnen al willekeurig andere punten P_K zijn toegevoegd, om te garanderen dat we straks zelf een volgorde kunnen kiezen waarin de punten worden toegevoegd.
De afstand van P_K naar een punt wordt bepaald door de minimale afstand binnen de graaf. Om van P_K naar een punt in de ladders te komen of naar een ander viaduct te gaan, moet het viaduct worden verlaten via een punt Q_i en de afstand van P_K tot een willekeurige Q_i is al minstens gelijk aan 2^{-K}. Verder zijn er punten R en punten $P_j \neq P_M$ die al aan het viaduct zijn toegevoegd. Echter binnen hetzelfde viaduct zijn dit altijd punten R die liggen tussen P_{K-1} en P^-_{K-1} en dus is ook $d(P_K, P_j)$ groter gelijk aan 2^{-K}. Dus $d(P_K, F) = 2^{-K}$ en ditzelfde geldt voor de punten P^-_K. We mogen dus alle punten P_K toevoegen aan het circuit , in een zelfgekozen volgorde.

Ook de punten $LL_{K+2}(j, X)$ en $LR_{K+2}(j, X)$ met $j = K+2, \ldots, M$ en $0 \leqslant X \leqslant 2^M$ kunnen worden toegevoegd.
De kortste weg om een viaductpunt te bereiken is namelijk $LL_{K+2}(j, X) \to Q_j(X) \to P_j \to P_K$ met lengte minimaal

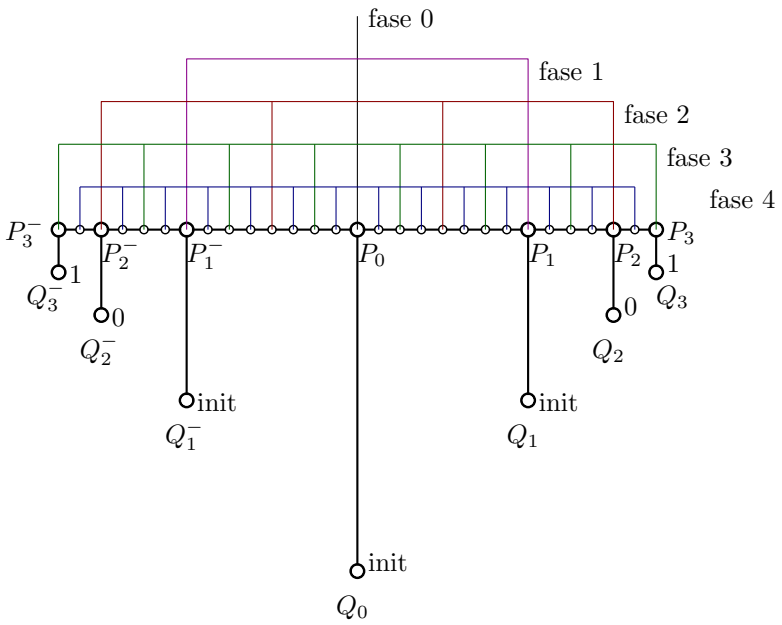
$$d(LL_{K+2}, Q_j) + d(Q_j, P_j) + d(P_j, P_K) \geqslant 0 + 2^{-K-1} + 2^{-K-1} = 2^{-K}$$

Het dichtstbijzijnde ladderpunt dat al is toegevoegd aan het circuit is $LL_{K+1}(j, X)$ en ook dit ligt op een afstand van 2^{-K}, naar een andere ladder gaan is niet dichterbij, de enige korte manier om de ladder te verlaten is via P_j (kosten 2^{-K-1}) vervolgens moet er naar een andere ladder worden gegaan, dus het viaduct moet worden verlaten, kosten opnieuw 2^{-K-1}, dus ook deze afstand wordt minimaal 2^{-K}.

Voor zowel $1 < K \leqslant M$ als $M < K \leqslant \mu$ moeten er nu nog punten R_j worden toegevoegd. Dit zijn in ronde K de punten die een afstand van 2^{-K} tot de tour hebben. Deze liggen sowieso tussen P^-_{K-1} en P_{K-1}, want anders liggen ze te dicht bij een van de punten P_K die zojuist zijn toegevoegd aan de tour. Je kan deze punten ook zien als de punten die op het viaduct liggen op afstand $t * 2^{-K}$ van P_0 voor $t \in \mathbb{N}$ oneven, dus $j = t * 2^{-K}$, behalve de punten R_j die samenvallen met een punt P_K.

Voor een verduidelijking, zie figuur 5.

We hebben in ronde K dus de punten R op afstand 2^{-K} toegevoegd, als $K + 2 \leqslant M$ de punten



Figuur 5: Rondes waarin de verschillende viaductpunten worden toegevoegd voor $M = 3$. (init = initialisatiefase)

LL_{K+1} en LR_{K+2} en als $K \leqslant M$ alle punten P_K. Dit zorgt ervoor dat voor het begin van de volgende ronde weer de juiste punten in de tour zitten, zoals beschreven in paragraaf *Punten in de tour na ronde* $K - 1$.

5 Cheapest insertion

In dit hoofdstuk zullen we bespreken hoe de route eruit kan komen te zien, binnen de regels van farthest insertion. Voor het gemak houden we hier dezelfde twee fasen aan als in het vorige hoofdstuk, eerst een initialisatiefase en vervolgens een aantal iteraties.

5.1 Initialisatiefase

Afstand 4 In hoofdstuk 4 is globaal de volgorde gegeven waarin punten worden toegevoegd. We willen natuurlijk weten wat voor circuit dit oplevert en dus moeten we de punten toevoegen volgens cheapest insertion. Als eerste wordt het punt Q_0 toegevoegd en vervolgens worden de punten LR_0 toegevoegd. Zoals we hebben gezien, mogen deze in willekeurige volgorde toegevoegd worden. We kiezen ervoor om ze toe te voegen in de volgorde waarin de ladders voorkomen in Ω. We beginnen bij $LR_0(0)$.

Dan kunnen we volgens de regels van farthest insertion bereiken dat de volgorde van de punten in het circuit , ook precies wordt gelijk is aan de volgorde van hun ladders in Ω. Specifieker: We schrijven de punten LR_0 als $Q_0, V_1, V_2, \ldots$, volgens de volgorde waarin ze voorkomen in Ω.

Basis We beginnen met Q_0 en punt V_1 in Ω. Voegen we vervolgens het derde punt V_2 toe, dan is hiervoor maar 1 mogelijkheid en die behoudt de goede volgorde, geeft als circuit $Q_0 \to V_1 \to V_2 \to Q_0$.

Inductie Stel we hebben al een circuit F, startend en eindigend in Q_0, met i punten die in dezelfde volgorde, opeenvolgend, in Ω voorkomen. De laatste 2 punten zijn dus V_{i-2} en V_{i-1}, waar V_{i-1} is gelegen tussen V_{i-2} en Q_0. Het punt dat we gaan toevoegen is V_i. We moeten aan cheapest insertion voldoen en moeten V_i op een zo goedkoop mogelijke manier invoegen. We moeten het punt echter altijd invoegen tussen 2 opeenvolgende punten V_j en V_{j+1} in het circuit , $j < i-1$. De kosten hiervoor zijn $d(V_j, V_i) + d(V_{j+1}, V_i) - d(V_j, V_{j+1})$. We weten $d(V_j, V_{j+1}) = 4$, immers de afstand tussen twee opeenvolgende punten in Ω is vier. Doordat de afstand van V_i tot het circuit gelijk aan 4 is (eerder bewezen), weten we dat zowel $d(V_j, V_i)$ als $d(V_{j+1}, V_i)$ groter gelijk zijn aan vier dus de kosten zijn minimaal.

$$d(V_j, V_i) + d(V_{j+1}, V_i) - d(V_j, V_{j+1}) \geqslant 4$$

Als we nu V_i invoegen tussen V_{i-1} en Q_0 dan krijgen we kosten $d(V_{i-1}, V_i) + d(Q_0, V_i) - d(V_j, V_{j+1}) = 4 + 4 - 4 = 4$, en omdat dit minimale kosten heeft mogen we V_i aan het circuit toevoegen tussen V_{i-1} en Q_0. Zo kunnen we het circuit dezelfde volgorde geven als de bijbehorende ladders in Ω.

Afstand 2 We zullen nu de punten LL_1 en LR_1, $LL_{\frac{1}{2}}$ en $LR_{\frac{1}{2}}$ aan de tour gaan toevoegen. We mogen om te beginnen $LL_{\frac{1}{2}}(0)$ gratis toevoegen tussen $LL_0(0)$ en Q_0 en we kunnen $LR_{\frac{1}{2}}$ gratis toevoegen tussen Q_0 en LR_0.

We gaan verder met de punten $LR_1(i, X)$. Deze kunnen gratis worden toegevoegd tussen $LL_0(i, X)$ en $LR_0(i, X)$. Immers:

$$d(LL_0(i, X), LR_1(i, X)) + d(LR_1(i, X), LR_0(i, X)) - d(LL_0(i, X), LR_0(i, X)) = 2 + 2 - 4 = 0$$

Vanwege de driehoeksongelijkheid zijn kosten altijd niet-negatief. Daarom kunnen we $LR_1(i, X)$ volgens farthest insertion toevoegen tussen $LL_0(i, X)$ en $LR_0(i, X)$. Het punt $LL_1(0)$ kan nu tegen

kosten 2 worden toegevoegd tussen $LL_{\frac{1}{2}}$ en Q_0. Deze kosten zijn minimaal omdat alle edges in F lengte 2 hebben, net als alle edges uit LL_1, geeft kosten $\geqslant 2+2-2=2$.

Vervolgens gaan we de punten LL_1 aan het circuit toevoegen. Zoals aangetoond in [sectie 4.1, paragraaf: *Afstand 2*] is $d(LL_1, F)$ op het moment dat we enig punt LL_1 toe willen voegen, gelijk aan 2. Bovendien hebben alle edges in het circuit op dit moment lengte 2. Als we dus twee punten A en B op het circuit hebben, krijgen we als kosten:

$$d(A, LL_1) + d(B, LL_1) - d(A, B) \geqslant 2+2-2=2$$

Dus de kosten om LL_1 toe te voegen zijn minimaal 2.

We voegen nu ieder punt $LL_1(i, X)$ toe tussen de punten $LL_0(i, X)$ en $LR_1(i, X)$ met kosten 2, en zoals boven bewezen zijn deze kosten inderdaad minimaal. Nu hebben alle kanten in de ladder lengte 2 en is de maximale afstand tot het circuit gereduceerd tot 1.

5.2 Iteraties

We bekijken eerst hoe het circuit eruit ziet voor aanvang van ronde K. Om het enigszins gemakkelijk te houden, bekijken we dit per ladder $L(i, X)$. Het pad door de ladder komt in elk geval binnen via $LL_0(i, X)$ en verlaat de ladder via $LR_0(i, X)$. Daartussen loopt het pad of geheel door de ladder, of verlaat het de ladder via $Q_i(X)$ om vervolgens door een aantal viaducten te lopen en weer terug in de ladder te komen bij $Q_i(X)$. De ladders worden bezocht in volgorde Ω, zoals in de initialisatiefase ook het geval was. Voor het pad langs de ladder zijn een aantal gevallen te onderscheiden. We definiëren om te beginnen d als $d = 2^{-K+1} * 2^{\mu} = 2^{\mu-K+1}$. We kijken nu naar de edges die bij ladder $L(i, X)$ horen, voor $i \leqslant M$.

- $K-1 < i \leqslant M$ – Edges op het pad die binnen deze ladder liggen zijn: $(LL_j(i, X), LL_{j+1}(i, X))$, $(LL_{K+1}(i, X), LR_{K+1}(i, X))$ en $(LR_{j+1}(i, X), LR_j(i, X))$ waar in alle gevallen $0 \leqslant j \leqslant K$.
- $i = K-1$ – Edges in deze ladder zijn (van de vorm):
  - $(LL_j(i, X), LL_{j+1}(i, X))$ en $(LR_{j+1}(i, X), LR)$; waar $0 \leqslant j \leqslant \min\{K, M\}$.
  - Edges van de vorm: $(P_i(n_1, Y_1), P_i(n_2, Y_2))$ met $Y_1 \equiv Y_2 \equiv X \mod 2^i$, maar $Y_1 \neq Y_2 \mod 2^{i+1}$. (Lengte is 2^{1-i})
  - Precies een edge van de vorm: $(LL_i(i, X), P_i(n, Y))$ met $Y \equiv X \mod 2^i$. De edge heeft lengte $2^{2-i} + 2^{-i}$.
  - Precies een edge van de vorm $(P_i(n, Y), Q_i(X))$ met $Y \equiv X \mod 2^i$, lengte is 2^{-i}.
- $0 \leqslant i \leqslant K-2$ –Edges op het pad die bij deze ladder liggen horen voor $i \neq M$ en Y zodat viaduct (n, Y) vastzit aan punt $Q_i(X)$:
  - $(LL_j(i, X), LL_{j+1}(i, X))$ en $(LR_{j+1}(i, X), LR)$; waar $0 \leqslant j \leqslant i$.
  - Een edge van $LL_i(i, X)$ naar een van de met $Q_i(X)$ verbonden punten $P_i(n, Y)$.
  - $(P_i(n, Y), R_j(n, Y))$. Met $L = \sum_{l=1}^{i} 2^{-i} * 2^{\mu}$ als $i < M$ en $L = 2^{\mu}$ als $i = M$, geldt $j = L - d$ en $Y \equiv X \mod 2^i$. Deze R_j ligt dan tussen P_{i-1} en P_i, op afstand 2^{1-K} van P_i.
  - $(R_j(n, Y), R_{j-d}(n, Y)$ met $d|j$ en $Y \equiv X \mod 2^i$. Verder moet gelden met $L_1 = \sum_{l=1}^{i-1} 2^{-}i * 2^{\mu}$ en $L_2 = \sum_{l=1}^{i} 2^{-}i * 2^{\mu}$ als $i < M$ en $L_2 = 2^{\mu}$ als $i = M$ dat $L_1 < j - d < j < L_2$. Deze punten R_j liggen allen tussen P_{i-1} en P_i met onderlinge afstand 2^{1-K}.

- Edges van de vorm $(R_j(n, Y), P_i(n_2, Y_2))$ met $Y \neq Y_2 \mod 2^{i+1}$ en $Y \equiv Y_2 \equiv X \mod 2^i$.
- Een edge $(R_j(n, Y), Q_i(X))$ met $Y \equiv X \mod 2^i$ en $d|j$. Deze R_j ligt tussen P_i en P_{i-1}, op afstand 2^{1-K} van P_{i-1}.

Nu volgen een aantal lemma's over de kosten van het toevoegen van een punt in een bepaalde edge. Dit gaat altijd over de lengte van een pad van een punt A naar een punt B, zonder het kortste pad tussen deze twee punten volledig te gebruiken. Hieruit is af te leiden wat de kosten zijn om een punt tussen A en B in te voegen in het pad.

5.2.1 Lemma 1

Voor een paar punten A,B gelegen in eenzelfde viaduct, tussen punten P_{i-1} en P_i, heeft een AB-pad dat niet alle kanten tussen A en B gebruikt, minimaal een lengte van $7 * 2^{-i}$.

We moeten dus het viaduct van A en B tweemaal verlaten, een keer aan de kant van P_{i-1} en een keer aan de kant van P_i, kosten $2^{-i+1} + 2^i$, vervolgens moeten we buitenom het viaduct van de ene naar de andere kant komen. Dit is te duur (4) om via de ladders te doen, dus moet het via een ander viaduct, kosten $2^{-i+1} + 2 * 2^i$ (denk aan het pad $A \to P_i \to Q_i \to P'_i \to P'_{i-1} \to Q_{i-1} \to P_{i-1} \to B$, al zijn er meer mogelijkheden). Dit is dus een afstand van een afstand van $7 * 2^{-i}$. Kosten zijn dan $7 * 2^{-i} - d(A, B)$.

5.2.2 Lemma 2a

Een pad van LL_1 in ladder $L(0)$, naar P_0 dat niet via Q_0 loopt, heeft lengte minimaal 5. Dat is een omweg van minstens 2.

Vanuit LL_1 naar de basis van ladder 0 heeft afstand 2, om vervolgens een viaduct te bereiken is nogmaals afstand 2 nodig. Om van de rand van het viaduct bij P_0 te komen is een afstand van 1, geeft een totale afstand van 5. Het kortste pad is $LL_1 \to Q_0 \to P_0$ en heeft lengte 3, dus de omweg heeft lengte $5 - 3 = 2$.

5.2.3 Lemma 2b

Een pad van $LL_i(i, X)$ naar $P_i(n, Y)$ met $X \equiv Y \mod 2^i$ voor $i > 0$ dat niet via $Q_i(X)$ loopt, heeft lengte minimaal $4 + 2^{-i}$. Dat is een omweg van $4 - 4 * 2^{-i}$. Voor $i \geqslant 1$ is dit dus minimaal 2.

Als we niet via Q_i de ladder van LL_i kunnen verlaten, is het noodzakelijk om via LL_0 of LR_0 te gaan, afstand 2. Vervolgens zullen we op een gegeven moment via een andere ladder via punt Q_j naar een viaduct moeten, afstand nogmaals 2. Om vanuit P_i een willekeurig punt Q_j te bereiken kost minimaal 2^{-i}, totaal $4 + 2^{-i}$. Het kortste pad van LL_i naar P_i is het pad $LL_i \to Q_i \to P_i$ met lengte $2^{2-i} + 2^{-i}$. Geeft een omweg van $(4 + 2^{-i}) - (2^{2-i} + 2^{-i}) = 4 - 4 * 2^{-i}$.

5.2.4 Lemma 3

Een pad van $P_i(n_1, X_1)$ naar $P_i(n_2, X_2)$ met $X_1 \equiv X_2 \mod 2^i$ maar $X_1 \not\equiv X_2 \mod 2^{i+1}$ dat niet via Q_i loopt, heeft lengte minimaal $6 * 2^{-i}$, wat tot een omweg van $4 * 2^{-i}$ leidt.

Weglaten van Q_i zorgt ervoor dat de enige manier om naar ladder (n_2, X_2) te komen via Q_j met $j < i$ of via de (basis van) ladders is. Via de ladders is echter te ver om, kost namelijk minimaal $4 + 2 * 2^{-i} \geqslant 6 * 2^{-i}$. Via het punt Q_{i-1} zijn de kosten het kleinst, met $6 * 2^{-i}$, wat een omweg is van $6 * 2^{-i} - 2 * 2^{-i} = 2^{2-i} = 2^{2-i}$. Dit is meer dan 2^{1-K} indien $K \geqslant i - 1$.

5.2.5 Lemma 4

Een pad van Een pad van $P_i(n, X)$ naar $Q_i(Y)$ met $X \equiv Y \mod 2^i$ dat geen gebruik maakt van de edge $(P_i(n, X), Q_i(Y))$ heeft lengte minimaal $3 * 2^{-i}$ wat leidt tot een omweg van minimaal 2^{-i+1}.

Er zijn twee andere mogelijkheden om bijQ_i te komen. De eerste is via de basis van enkele ladders, maar dit levert sowieso een omweg van vier op en is geen optie. De andere is om via een punt Q_j te gaan en het pad $P_i(n, X) \to Q_j \to P_i(n_2, X_2) \to Q_i(n, X)$ te nemen, lengte minimaal $3 * 2^{-i}$. Aangezien $d(P_i, Q_i) = 2^{-i}$ is dit een omweg van $2 * 2^{-i}$.

5.2.6 Lemma 5

Een pad van $R_j(n_1, Y_1)$ naar $P_i(n_2, Y_2)$ met $Y_1 \equiv Y_2 \mod 2^i$ en $Y_1 \not\equiv Y_2 \mod 2^{i+1}$ en R_j gelegen tussen P_{i-1} en P_i van viaduct (n_1, Y_1) dat niet via Q_i verloopt heeft een lengte van tenminste $d(R_j, P_{i-1}) + 5 * 2^{-i}$, dit betekent dus een omweg van $2 * d(R_j, P_{i-1}) + 2^{1-i}$.

Aangezien $Y_1 \not\equiv Y_2$ is het niet mogelijk om alleen via een Q_j met $j > i$ rechtstreeks van viaduct (n_1, Y_1) naar (n_2, Y_2) te komen en via de ladders gaan is te duur. De goedkoopste weg is nu via een punt P_{i-1} en Q_{i-1} met lengte

$$d(R_j, P_{i-1}) + d(P_{i-1}(n_1, Y_1), Q_{i-1}) + d(Q_{i-1}, P_{i-1}(n_2, Y_2)) + d(P_{i-1}(n_2, Y_2), P_i(n_2, Y_2)) =$$

$$d(R_j, P_{i-1}) + 5 * 2^i$$

Het kortste pad van R_j naar P_i loopt via $R_j(n_1, Y_1) \to P_i(n_1, Y_1) \to Q_i \to P_i(n_2, Y_2)$ en heeft lengte $d(R_j, P_i) + 2^{1-i} = 2^{2-i} - d(R_j, P_{i-1})$. Dit voor de een omweg een lengte van $2 * d(R_j, P_{i-1}) + 2^{1-i}$.

5.2.7 Lemma 6

Een pad van $R_j(n, X)$ naar $Q_i(Y)$ met $X \equiv Y \mod 2^i$ en R_j tussen P_{i-1} en P_i dat niet via (P_i, Q_i) gaat, heeft lengte minimaal $3 * 2^{-i} + d(R_j, P_i)$.

Om van R_j de ladder te verlaten kost minimaal $2^{-i} + d(R_j, P_i)$, bijvoorbeeld via P_{i+1} indien deze bestaat. Om vervolgens door een ander viaduct naar Q_i te komen kost dan $2 * 2^{-i}$ wat een totaal geeft van $3 * 2^{-i} + d(R_j, P_i)$. Aangezien de minimale afstand gelijk is aan $2^{-i} + d(R_j, P_i)$ is dit een omweg van 2^{-i+1}.

5.2.8 Gevolg 1

Laat punten A, B en C gegeven, met A en B uit een van bovenstaande lemma's. Het punt C mag niet op het kortste pad tussen A en B liggen en heeft afstand minimaal L tot punten A en B. Dan zijn de invoegkosten het minimum van de lengte van de omweg van A naar B zoals in het lemma dat van toepassing is, en $2 * L$. Immers, als het kortste pad van A naar B niet volledig wordt gebruikt, volgen de kosten direct uit bovenstaande lemma's. Wordt dit pad wel volledig gebruikt, dan kunnen de kosten niet kleiner zijn dan $2 * L$ omdat er anders een korter pad van A naar B te vinden zou zijn.

Bekijken we nu de edges die tijdens ronde K in het pad kunnen zitten, en nemen we aan dat we een punt C toevoegen op afstand 2^{-K} van het pad, kunnen we uit deze lemma's nog wat meer concluderen. De kosten zijn dan het minimum van 2^{1-K} en de lengte van een omweg van A naar B, en dit blijkt altijd gelijk te zijn aan 2^{1-K}, op voorwaarde dat C niet op het kortste pad

van A naar B ligt. Uit de edges die in ronde K in het pad zitten volgt dan onmiddellijk dat de kosten om punt C toe te voegen tussen twee punten die niet beide ladderpunten zijn, gelijk is aan 2^{1-K}.

Voor lemma 1 geldt dat twee punten A en B in dezelfde ladder, ongelijk aan Q_i, onderlinge afstand 2^{1-K} of 2^{-K} hebben en dat de edges in de ladder tussen P_K en P_K^- liggen, ofwel $i \leqslant K$. Dit geeft dat de kosten om C toe te voegen daarmee $7 * 2^{-i} - 2 * 2^{-K} \geqslant 5 * 2^{-K}$ zijn. Kosten van toevoegen zijn dus minstens 2^{1-K}.
In lemma 2(a en b) volgt uit $K \geqslant 0$ dat de omweg van 2 altijd groter gelijk is aan 2^{1-K}.
In lemma 3 geldt $i \leqslant K \Rightarrow 2^{2-i} > 2^{1-K}$
Uit lemma 4 volgt met $i \leqslant K$ dat de kosten maximaal 2^{1-K} zijn.
In ronde K geldt $d(R_j(n, Y), P_i(n, Y)) \geqslant 2^{-K}$ als de edge in het pad zit, dus volgt voor de kosten met $i \leqslant K$ uit lemma 5 dat de kosten minimaal $2^{1-K} + 2^{1-i} \geqslant 2^{1-K}$ zijn.
Uit lemma 6 volgt voor $i \leqslant K$ ook dat er een omweg wordt gemaakt van minimaal 2^{1-K}

Toevoegen van de punten P_0 In ronde 0 zullen de punten P_0 als eerste aan het circuit worden toegevoegd. Omdat dit iets anders gaat dan voor punten P_j met $j > 0$, wordt dit geval hier apart beschreven. We noemen de verzameling met alle punten P_0 Π. We verdelen Π in twee even grote verzamelingen Π_0 en Π_1 op de volgende manier:

$$\Pi_j = \{P_0(n, Y) \in \Pi | Y = j \mod 2\}$$

De punten P_0 mogen in willekeurige volgorde worden toegevoegd, dus we voegen ze zo toe dat ze om en om uit Π_0 en Π_1 komen. Het eerste punt $P_0(n, X)$ dat wordt toegevoegd willen we toevoegen tussen LL_1 en Q_0. De kosten hiervoor zijn:

$$d(P_0, Q_0) + d(P_0, LL_1) - d(LL_1, Q_0) = 1 + (2 + 1) - 2 = 2$$

Ieder volgend punt $P_0(n, X)$ willen we toevoegen tussen $P_0(m, Y)$ en Q_0, kosten:

$$d(P_0(n, X), P_0(m, Y)) + d(P_0(n, X), Q_0) - d(Q_0, P_0(m, Y)) = 2 + 1 - 1 = 2$$

Nog aan te tonen is dat deze kosten minimaal zijn. Tijdens het invoegen van de punten P_0 hebben alle edges in het circuit lengte 2, 3 of 1. De enige edge met lengte 3 is $(LL_1, P_0(m, Y))$ en de enige edge met lengte 1 is $(P_0(1, 0), Q_0)$, voor zekere m en Y.

Verder geldt dat $d(P_0, F \setminus Q_0 \setminus \{Q_1(n, X)\}) = 2$. P_0 toevoegen tussen twee punten A en B in $F \setminus \{Q_0, Q_1(n, X)\}$ met $d(A, B) \leqslant 2$ kost dus minimaal 2 en is niet goedkoper. We houden nu dus nog een aantal gevallen over, die ongelijk zijn aan de edge (A, B) waar we P_0 willen gaan invoegen:

- $(A, B) = (Q_0, LR_{\frac{1}{2}})$ – kosten zijn $d(P_0, Q_0) + d(P_0, LR_{\frac{1}{2}}) - d(Q_0, LR_{\frac{1}{2}}) = 1 + (1 + 2) - 2 = 2$.
- $(A, B) = (Q_1(m, Y), LR_0(1, Y))$ – Kosten zijn $d(P_0, Q_1(m, Y)) + d(P_0, LR_0(1, Y)) - d(LR_0(1, Y), Q_1(m, Y)) \geqslant 1 + (1 + 2) - 2 = 2$.
- $(A, B) = (LL_1(1, Y), Q_1(m, Y))$ – Kosten zijn $d(P_0, Q_1(m, Y)) + d(P_0, LL_1(1, Y)) - d(LL_1(1, Y), Q_1(m, Y)) \geqslant 1 + (1 + 2) - 2 = 2$.
- $d(A, B) > 2$, dan moet gelden dat $(A, B) = (LL_1, P_0(m, Y))$ – Geeft kosten $d(LL_1, P_0(n, X)) + d(P_0(n, X), P_0(m, Y)) - d(LL_1, P_0(m, Y)) = (2 + 1) + 2 - 3 = 2$. Dit geval is er niet bij het eerste punt P_0 dat wordt toegevoegd.

Er is geen goedkopere manier om $P_0(n, X)$ in te voegen in het circuit dan tussen een zeker punt $P_0(m, Y)$ en Q_0, danwel voor het eerste punt P_0, tussen Q_0 en LL_1. We voegen dus alle punten P_0 aan het circuit toe.

Toevoegen van punten P_K
Volgorde van toevoegen
In ronde $M \geqslant K > 0$ beginnen we met het toevoegen van de vertices P_K. Elk punt P_K is voor verbonden met een punt Q_K in de graaf, er zijn echter meer punten P_K dan Q_K. We definiëren $\Pi(K, X)$ als de verzameling van P_K's die verbonden zijn met een van de $Q_K(X)$. Formeler gezegd:

$$\Pi(K, X) = \{P_K(n, Y) | X \equiv Y \mod 2^K\}$$

We verdelen Π nu in 2 even grote verzamelingen, Π_0 en Π_1. We schrijven Y binair als $Y = \sum_{l=0} Y_l * 2^l$

$$\Pi_j(K, X) = \{P_K(n, Y) \in \Pi(K, X) | Y_K = j\}$$

Omdat de punten P_K in willekeurige volgorde kunnen worden toegevoegd, kunnen we ervan uitgaan dat ze om en om uit Π_0 en Π_1 worden toegevoegd.

Plaats van toevoegen
We willen dat een nieuw punt $P_K(n, X)$ wordt toegevoegd tussen het bijbehorende punt $Q_K(X)$ en het punt dat hiervoor in het circuit komt. In eerste instantie is dit een punt $LL_K(K, X)$ en daarna zal dit een ander punt P_K zijn. De kosten van deze eerste toevoeging zijn:

$$d(LL_K, P_K) + d(P_K, Q_K) - d(LL_K, Q_K) = (2^{-K} + 2^{2-K}) + 2^{-K} + -2^{2-K} = 2^{-K+1}$$

Als er al punten P_K zijn toegevoegd, zijn de kosten om een nieuw punt $P_K(n_2, X_2)$ toe te voegen tussen Q_K en het voorgaande punt $P_K(n_1, X_1)$:

$$d(P_K(n_1, X_1), P_K(n_2, X_2) + d(P_K(n_2, X_2), Q_K(X)) - d(P_K(n_1, X_1), Q_K(n, X)) =$$

$$2 * 2^{-K} + 2^{-K} - 2^{-K} = 2^{-K+1}$$

We moeten laten zien dat er geen goedkopere manieren zijn om een punt $P_K(n, X)$ toe te voegen.

Het toevoegen van een punt P_K in een ladder kost 2^{-K+1}:
Als we punt P_K in een ladder aan het circuit willen toevoegen, verbreken we daarvoor dus een zekere edge (A, B) van lengte 2^{-l} die al in het circuit zit. Merk op dat edges in het circuit binnen de ladders ook edges zijn in de graaf die de afstanden definieert, en dus volgt uit sectie 3.3 en de definitie van de graaf dat deze altijd een tweemacht als lengte hebben.

We hebben nu feitelijk twee relevante opties:

- A of B is gelijk aan Q_i, zvva $B = Q_i$, waaruit volgt dat $A = LL_i$. Kosten zijn

$$d(Q_i, P_K) + d(LL_i, P_K) - d(Q_i, LL_i) =$$

$$d(Q_i, P_K) + (d(Q_i, P_K) - d(Q_i, LL_i)) - d(Q_i, LL_i) =$$

$$2 * d(Q_i, P_K) \geqslant 2^{-K+1}$$

- Anders – Zowel A als B hebben uitgaande edges van lengte minimaal 2^{-l-1}. De ladder moet voor het kortste pad naar P_K worden verlaten via het rechtsbovenpunt Q_i. Geeft voor de kosten dan

$$d(P_K, A) + d(P_K, B) - d(A, B) =$$

$$d(A, Q_i) + d(B, Q_i) + 2 * d(Q_i, P_K) - d(A, B) \geqslant$$

$$2 * 2^{-l-1} + 2 * 2^{-K} - 2^{-l} = 2^{-K+1}$$

Dus een punt P_K binnen een ladder aan het circuit toevoegen is geen goedkopere optie.

Wat als we een edge verbreken binnen een viaduct? Er zijn dan een aantal verschillende mogelijkheden, allemaal besproken in lemma 1 tot en met 7 . Er blijkt dan uit *5.2.8 Gevolg 1* dat P_K niet kan worden toegevoegd tegen kosten minder dan 2^{1-K}.

Aangezien 2^{-K+1} de minimale kosten zijn voor het toevoegen van een punt $P_K(n, X)$, kunnen we het tegen deze kosten invoegen tussen een zekere $P_K(n_1, X_1)$ en $Q_K(X)$.

Toevoegen van punten LR_{K+2} Vervolgens voegen we $LL_{K+2}(j, X)$ en $LR_{K+2}(j, X)$ toe. Dit willen we doen op zo een manier dat we binnen een ladder het pad $LL_{K+1}(j, X) \to LL_{K+2}(j, X) \to LR_{K+2}(j, X) \to LR_{K+1}(j, X)$ krijgen, waar we eerst de edge $LL_{K+1} \to LR_{K+1}$ hadden.

Als we in ronde $K-1$ dezelfde techniek hebben toegepast, dan weten we dat $LL_{K+1}(j, X)$ en $LR_{K+1}(j, X)$ opeenvolgend in het circuit zitten. Ook na de eerste ronde, waarin LL_0 en LR_0 worden toegevoegd is dit zo doordat we daar de volgorde Ω hebben aangehouden. Als eerste mogen alle punten $LR_{K+2}(j, X)$ worden toegevoegd na $LL_{K+1}(j, X)$, want de kosten hiervoor zijn

$$d(LR_{K+2}(j, X), LL_{K+1}(j, X)) + d(LR_{K+2}(j, X), LR_{K+1}(j, X)) - d(LL_{K+1}(j, X), LR_{K+1}(j, X))$$

$$= 2^{-K} + 2^{-K} - 2^{-K+1} = 0$$

En 0 zijn duidelijk de minimale kosten, aangezien deze kosten door de driehoeksongelijkheid niet negatief kunnen zijn.

Toevoegen van de punten LL_{K+2} Nu gaan we de punten $LL_{K+2}(j, X)$ toevoegen, en we moeten laten zien dat die mogen worden toegevoegd tussen $LL_{K+1}(j, X)$ en $LR_{K+2}(j, X)$. De kosten hiervoor zijn dan

$$d(LR_{K+2}(j, X), LL_{K+2}(j, X)) + d(LL_{K+2}(j, X), LL_{K+1}(j, X)) - d(LR_{K+2}(j, X), LL_{K+1}(j, X))$$

$$= 2^{-K} + 2^{-K} - 2^{-K} = 2^{-K}$$

Nu moeten we nog laten zien dat er geen goedkopere manier is om LL_{K+2} toe te voegen. Als we LL_{K+2} toe willen voegen tussen twee punten in dezelfde ladder, dan verbreken we daarvoor dus een zekere edge van lengte 2^{-l} die al in het circuit zit.

Dit is een edge van LL_{l+2} naar LL_{l+1} of van LR_{l+2} naar LR_{l+1}. We gaan even uit van het eerste geval, de tweede gaat analoog.

Dan weten we voor $l < K$ $d(LL_{l+2}, LR_{K+2}) = 2^{-l-1}$ en $d(LL_{l+1}, LR_{K+2}) = 2^{-l}$, geeft voor de kosten 2^{-l-1}. Omdat $l < K$ geldt dat de kosten minimaal 2^{-K} moeten zijn.

Voor $l = K$ geldt $d(LL_{l+2}, LR_{K+2}) = d(LL_{K+2}, LR_{K+2}) = 2^{-l}$ en $d(LL_{K+1}, LR_{K+2}) = 2^{-l}$. Dit geeft als kosten precies 2^{-K}.

Bovenstaande geldt ook voor twee punten van de vorm LR_{l+1} en LR_{l+2}. Merk op dat l hier niet gelijk kan zijn aan K omdat deze edge nog niet in het circuit zit.

Het punt LL_{K+2} toevoegen in een viaduct is niet goedkoper vanwege *5.2.8 Gevolg 1*.

Ongelabelde vertices Tot slot worden alle vertices R_j die op afstand $t * 2^{-K}$ van het circuit liggen toegevoegd, voor $t \in \mathbb{N}$ oneven. Deze punten liggen tussen P_{K-1} en P^-_{K-1}. Een deel van deze punten kan gratis worden toegevoegd, maar per viaduct worden er ook enkele punten R_j en R^-_j toegevoegd tegen kosten 2^{-K+1}.

Toevoegen van gratis punten R_j Punten die worden toegevoegd zijn punten R_j met $j = t * 2^{-K+1+\mu}$, met t oneven. Deze punten kunnen gratis worden toegevoegd tussen R_k en R_l met $k = (t-1) * 2^{-K+1+\mu}$ en $l = (t+1) * 2^{-K+1+\mu}$, mits R_k niet samenvalt met een punt P. Als R_l samenvalt met een punt P kan R_j gratis worden toegevoegd tussen dit punt P en R_l.

Toevoegen van eerste punten R_j Op dit moment zitten er tussen de punten P_{K-1} nog geen punten R, we beginnen dus met het toevoegen van de eerste rij van deze punten. Het tussenvoegen van $R_j(n, X)$ die midden tussen P_{K-1} en P_{K-2} ligt, tussen $P_{K-1}(n, X)$ en $P_{K-1}(m, Y)$ kost dan

$$d(P_{K-1}(n, X), R_j(n, X)) + d(P_{K-1}(m, Y), R_j(n, X)) - d(P_{K-1}(m, Y), P_{K-1}(n, X)) =$$

$$2^{-K} + (2^{-K} + 2^{-K+2}) - 2^{-K+2} = 2^{-K+1}$$

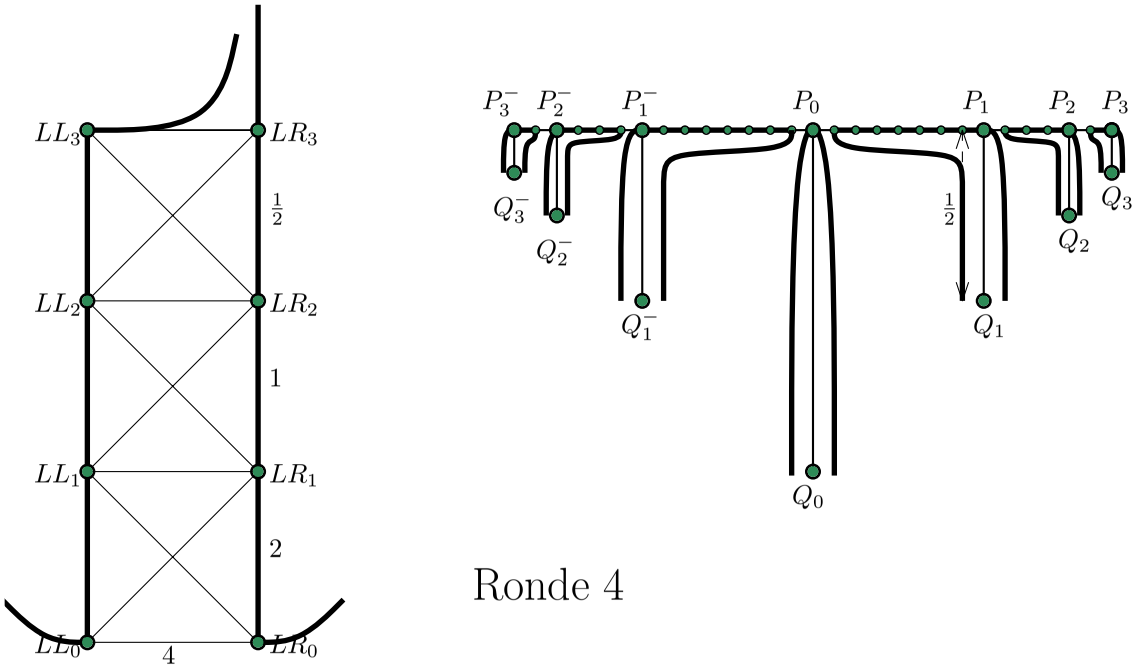
Dit punt toevoegen binnen een ladder is niet goedkoper, als we een edge van lengte l in een ladder hebben, is de afstand om deze ladder te verlaten (via een punt Q) en weer terug te komen ook al gelijk aan (minimaal) l. De afstand om vanuit R_j een punt Q te bereiken is groter dan 2^{-K+1} (omdat dit de afstand is om vanuit P_{K-1} een punt Q te bereiken).

Er zijn nu nog een aantal andere opties om het punt $R_j(n, X)$ in het circuit te voegen. In sectie 4.2 is aangetoond dat R_j's die in deze ronde worden toegevoegd een afstand van 2^{-K} tot het circuit hebben, waardoor we uit het *5.2.8 Gevolg 1* kunnen concluderen dat er geen goedkopere manier is om R_j in te voegen.

Invoegen van niet-gratis punten R_j Nu is er nog het geval waar R_k samenvalt met een punt P. Op dit moment is het niet meer mogelijk om R_j gratis aan het circuit toe te voegen, maar moet deze worden toegevoegd tegen meerkosten 2^{-K+1}, tussen R_l en het opeenvolgende punt $P_i(m, Y)$.

Andere toevoegingen zijn met dezelfde argumenten als boven niet goedkoper.

In figuur 6 is voor een ladder en een viaduct aangegeven hoe het circuit er nu doorheen loopt. Bij het viaduct is goed te zien dat veel afstanden dubbel worden afgelegd.



Figuur 6: Het circuit dat farthest insertion geeft binnen een viaduct en een ladder.

6 Circuitlengte

In dit hoofdstuk zullen we naar het verschil met een veel korter circuit kijken. We laten zien dat het pad dat farthest insertion kan vinden bijna vijf keer zolang is als dit kortere circuit .

Een korter circuit F_2 Het is niet moeilijk om een circuit te construeren dat veel korter is dan het circuit dat farthest insertion heeft gekozen, we noemen dit circuit F_2 en het circuit dat farthest insertion heeft gegeven noemen we F.

Het circuit F_2 loopt op vergelijkbare manier door de ladders als het circuit dat farthest insertion koos. Het gaat echter niet bij elk punt Q de viaducten in maar blijft door de ladder lopen. Alleen bij de punten Q_M (niet de punten Q_M^-) worden de viaducten bezocht, het circuit loopt dan van Q_M naar Q_M^- over het ene viaduct en terug over een ander viaduct, net zolang tot alle N viaducten die aan Q_M vastzitten aan de beurt zijn geweest. Vervolgens gaat het circuit weer verder door alle ladders.

Het verschil In circuit F_2 is de afgelegde afstand door de ladders gelijk aan die van F. De afstand afgelegd door een ladder van hoogte i noemen we $A(i) = 2^{2-i} + 2 * \sum_{j=0}^{i-1} 2^{1-j} = 2 * \sum_{j=0}^{i} 2^{1-j}$ dus

$$A(i) = \sum_{j=0}^{i} 2^{2-j} = 6 + \sum_{j=0}^{i-2} 2^j \Rightarrow$$

$$A(i) = 6 + 2(1 - 2^{1-i}) = 8 - 2^{2-i} < 8$$

Er zijn 2^i ladders $L(i)$ en dan nog 2^i ladders $L^-(i)$ en een extra ladder $L(0)$. Dus de afstand door de ladders is dan:

$$L = 10 + \sum_{k=1}^{M} 2^{k+1} * A(k) \Rightarrow$$

$$L \leqslant 10 + M * 2^{M+1} * 8 \leqslant 10 + M * 2^{M+4}$$

Voor de viaducten ligt het anders, we bekijken de afstand per viaduct. In F_2 is die gelijk aan precies 2, namelijk $2 * 2^{-M} + 2 * (1 - 2^{-M})$. Geeft door de viaducten een afstand van $N * 2^{M+1}$. In F echter niet. Om te beginnen lopen we het horizontale pad (door de refinement vertices) vrijwel twee keer, door μ voldoende groot te kiezen komen we zo bij een afstand willekeurig dicht bij 4. Verder lopen we elk van de afstanden $d(P_i, Q_i)$ en $d(P_i^-, Q_i^-)$ twee keer, geeft in totaal per viaduct:

$$V = 2 * 2(1 - 2^{-M}) - M * 2^{-\mu+1} + 2 + 2 * \sum_{i=1}^{M-1} 2 * 2^{-i} \Rightarrow$$

$$V = 4 - 2^{-M+1} - M * 2^{-\mu+1} + 2 + \sum_{i=1}^{M-1} 2^{-i+2} \Rightarrow$$

$$V = 4 - 2^{-M+1} - M * 2^{-\mu+1} + 4 + 2(1 - 2^{-M+1}) \Rightarrow$$

$$V = 10 - 2^{-M+1} - M * 2^{-\mu+1} - 2^{-M+2} \Rightarrow$$

$$V = 10 - M * 2^{-\mu+1} - 3 * 2^{-M+1}$$

Voor F krijgen we dan een totale afstand van

$$(N * 2^M) * V + L$$

En voor F_2 hebben we:

$$(N * 2^M) * 2 + L$$

Laat nu $\varepsilon > 0$ gegeven. We kiezen nu $M - 1 > -^2 \log \frac{\varepsilon}{3}$, zodat $3 * 2^{-M+1} < \varepsilon$ en $\mu > \max\{1 -^{\varepsilon} \log M, M + 1\}$, dan krijgen we dat

$$10 > V \geqslant 10 - 2\varepsilon$$

Dit komt dicht bij 10 voor epsilon klein. We bekijken nu hoe de lengte van het totale circuit F zich verhoudt tot de lengte van F_2:

$$\frac{(N * 2^M) * V + L}{N * 2^{M+1} + L} = \frac{2^M * V + \left(\frac{L}{N}\right)}{2^{M+1} + \left(\frac{L}{N}\right)}$$

We kiezen nu $N > \frac{M * 2^{M+4} + 10}{\varepsilon}$ zodat geldt dat $\frac{L}{N} \leqslant \varepsilon$. Merk op dat N groter kiezen geen invloed heeft op de afgelegde afstand door de ladders. Dit geeft dan:

$$\frac{2^M * V + \left(\frac{L}{N}\right)}{2^{M+1} + \left(\frac{L}{N}\right)} \geqslant \frac{2^M * V + \varepsilon}{2 * 2^M + \varepsilon} = \frac{V + \frac{\varepsilon}{2^M}}{2 + \frac{\varepsilon}{2^M}} \geqslant$$

$$\frac{10 - 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2M}}{2 + \frac{\varepsilon}{2M}} \to 5 \text{ voor } \varepsilon \downarrow 0$$

Dus als we M, N en μ voldoende groot kiezen, kan farthest insertion een circuit geven dat willekeurig dicht bij vijf keer zolang is als het optimale circuit .

7 Conclusie

We hebben een instantie voor farthest insertion gevonden, waar voor $\varepsilon > 0$ willekeurig klein, farthest insertion een circuit kan geven dat minimaal $5 - \varepsilon$ keer zolang is als het optimale circuit binnen deze instantie. Het farthest insertion algoritme kan dus niet beter zijn dan een 5-benaderingsalgoritme.

Referenties

[1] Yossi Azar. Lower bounds for insertion methods for tsp. *Combinatorics, Probability and Computing*, 3:285–292, 9 1994.

[2] Cor A. J. Hurkens. Nasty tsp instances for farthest insertion. *Proceedings of the 2nd Integer Programming and Combinatorial Optimization Conference, Pittsburg, PA*, pages 346–352, May 1992.