

MASTER

Berekeningen over niet-lineaire optica

Sarluy, P.H.A.

*Award date:*  
1964

[Link to publication](#)

**Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

**BEREKENINGEN OVER NIET-LINEAIRE OPTICA**

**AFSTUDEERVERSLAG VAN P.H.A. SARLUY**

**SUPERVISIE: PROF. DR. L.J.F. BROER**

## Samenvatting

Na een inleiding over niet-lineaire optische verschijnselen worden oplossingen gegeven voor terugkaatsing en breking van een lineair gepolariseerde vlakke lichtgolf, die vanuit vacuum in willekeurige richting invalt op het platte grensvlak van een oneindig uitgebreid, homogeen, niet-lineair medium zonder dispersie.

Deze oplossingen omvatten zowel een exacte oplossing als een benaderde oplossing via een reeksontwikkeling in de elektrische veldsterkte van het invallende licht.

Ten slotte wordt de buiging aan een één-dimensionaal niet-lineair tralie behandeld met behulp van een eenvoudig model van zeer dunne niet-lineaire draden.

## Inhoud

1. Inleiding
2. Loodrechte inval, benaderde oplossing
3. Scheve inval, benaderde oplossing
4. Loodrechte inval, exacte oplossing
5. Scheve inval, exacte oplossing
6. Niet-lineair tralie.

## 1. Inleiding

Volgens de electromagnetische theorie van het licht wordt de lichtvoortplanting beschreven door de vergelijkingen van Maxwell:

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{Y} \equiv 0 \quad \text{voor doorzichtig medium} \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad \rho \text{ kan } \equiv 0 \text{ genomen worden,} \quad (4)$$

waarin:  $\vec{E}$  = elektrische veldsterkte in v/m,  $\vec{H}$  = magnetische veldsterkte in A/m

$\vec{D}$  = diëlectrische verplaatsing in Asec/m<sup>2</sup>  $\vec{B}$  = magnetische inductie in Vsec/m<sup>2</sup>

$\vec{Y}$  = geleidingsstroombichtheid in A/m<sup>2</sup>.  $\rho$  = ruimteladingsdichtheid in Asec/m<sup>3</sup>.

Deze vergelijkingen moeten nog worden aangevuld met de z.g. materiaalvergelijkingen, welke het verband tussen  $\vec{D}$  en  $\vec{E}$ , resp.  $\vec{B}$  en  $\vec{H}$  bepalen:

In vacuum geldt:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (6)$$

De Maxwell-vergelijkingen worden dan:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \text{rot } \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0 \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{div } \vec{E} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Hieruit volgt een golfvergelijking voor  $\vec{E}$ :

$$-\text{rot rot } \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{met } (\epsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}} = c_0$$

wegens  $\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$  en  $\text{div } \vec{E} = 0$  wordt dit

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

een analoge vergelijking geldt voor  $\vec{B}$ .

Oplossing hiervan is:

$$\vec{E} = F\left(t - \frac{x}{c_0}\right),$$

dus  $c_0$  = lichtsnelheid in vacuum.

In een medium kan bij optische frequenties aangenomen worden, dat

$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  voor  $\vec{D}$  neemt men in de lineaire theorie:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (9)$$

$\chi$  = susceptibiliteit van het medium.  $\epsilon$  = dielectrische constante van het medium.

De golfvergelijkingen voor  $E$  en  $B$  worden dan:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \quad (10)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = F\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad \text{met } \frac{c_0}{c} = n = (1 + \chi)^{\frac{1}{2}}.$$

$n$  = brekingsindex.

Doordat de materiaalvergelijkingen (6) tot en met (9) lineair zijn, blijven de Maxwell-vergelijkingen lineair.

Voor de oplossingen geldt het superpositie-principe: een lineaire combinatie van oplossingen is weer een oplossing. De fysische betekenis hiervan is, dat de wetten van voortplanting terugkaatsing en breking van het licht onafhankelijk zijn van de intensiteit van het invallende licht of van de aanwezigheid van ander licht.

Het is echter te verwachten dat bij hoge intensiteiten (9) niet meer op zal gaan.  $\vec{D}$  wordt dan in het algemeen een willekeurige functie van  $\vec{k}$ .

De precieze vorm van de fenomenologische materiaalvergelijking moet worden afgeleid uit de microscopische theorie met behulp van de quantummechanica. Hiertoe berekent men de verstrooiing van de invallende lichtquanta aan de atomen van het medium.

Men onderscheidt hierbij coherente of Rayleigh-verstrooiing, waarbij de energie van de atomen onveranderd blijft (dus elastische botsing tussen quant en atoom) en incoherente of Raman-verstrooiing, waarbij het atoom naar een andere energietoestand overgaat.

Alleen de coherente verstrooiing is van belang voor de brekingsindex van het medium, dus voor terugkaatsing en breking van het licht.

Bij deze coherente verstrooiing geldt nl. voor elk verstrooiingscentrum afzonderlijk, dat er een bepaald verband bestaat tussen fase van invallend en verstrooid licht.

Hierdoor ontstaat door interferentie van de verstrooide lichtgolven een gebroken lichtgolf die dezelfde gedaante heeft als de invallende lichtgolf, alleen een kleinere voortplantingssnelheid.

N.B. Bij gebruik van een normale (dus niet-coherente) lichtbron is de door coherente verstrooiing ontstane gebroken lichtgolf dus niet coherent.

Bij gestimuleerde emissie in een LASER of bij de onlangs aangetoonde gestimuleerde Raman-emissie<sup>1)</sup> bestaat een verband tussen de fasen van de golven, die worden verstrooid door verschillende atomen. Hierbij ontstaat een coherente lichtgolf, terwijl het invallende licht incoherente is. Uit de quantummechanische berekening volgt evenals uit de berekening volgens de klassieke electronentheorie dat in de atomen tijdsafhankelijke elektrische en magnetische dipoolmomenten, quadrupoolmomenten,....enz. worden geïnduceerd.

De elektrische dipoolmomenten overwegen hierbij. We kunnen dit zien aan een waterstofatoom als karakteristiek systeem.

De verhouding tussen elektrisch dipoolmoment en elektrisch quadrupoolmoment is ongeveer  $r_H/\lambda$ , met  $r_H$  = straal waterstofatoom en  $\lambda$  = golflengte gebruikte licht. Met  $r_H = 5 \cdot 10^{-9}$  en  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  wordt de intensiteit van de elektrische dipoolstraling  $10^4$  maal groter dan die van de elektrische quadrupoolstraling.

Evenzo wordt de verhouding tussen elektrisch dipoolmoment en magnetisch dipoolmoment  $lr_H: \frac{1}{2mc_0} M_H \approx 600$ , met  $m$  = massa electron,  $M_H$  = baanimpulsmoment van het electron  $\approx \hbar$ .

De intensiteit van de elektrische dipoolstraling wordt dus ongeveer  $10^5$  maal groter dan die van de magnetische dipoolstraling<sup>2)</sup>.

Alleen als de elektrische dipoolovergangen verboden zijn worden de elektrische quadrupool- en magnetische dipoolstraling van belang.

De geïnduceerde elektrische dipoolmomenten kunnen berekend worden met behulp van storingsrekening. In eerste orde volgt hieruit de lineaire optica, de polarisatie/ $m^3$  d.w.z. de dipoolmomenten gemiddeld over een volumelement wordt evenredig met de veldsterkte van het invallende licht. Klassiek gesproken wil dit zeggen dat de electronen harmonische trillingen uitvoeren met de frequentie van het invallende licht. Quantummechanisch betekent dit dat één quantum virtueel geabsorbeerd en weer uitgezonden wordt.

Bij voortzetting van de storingsrekening komen er ook termen in de polarisatie, die evenredig zijn met het kwadraat, de derde macht enz. van de invallende veldsterkte. Klassiek gesproken trillen de electronen bij grotere uitwijkingen niet meer zuiver harmonisch, de trillingsvorm gaat ook boventonen bevatten.

Quantummechanisch gezien worden meerdere fotonen geabsorbeerd en als één quantum weer uitgezonden.



Enkele experimenteel aangetoonde voorbeelden van deze niet-lineaire optische effecten zijn<sup>1)5)</sup>:

het opwekken van hogere (tweede en derde) harmonischen in reflectie en transmissie,

vorming van som- en verschilfrequentie van verschillende laserbundels.

gelijkspanningseffect: het opwekken van een gelijkspanning in de richting van de elektrische veldsterkte van het invallende licht en evenredig met het kwadraat hiervan. Dit staat gelijk met het opwekken van nulde harmonischen: verschilfrequentie van de bundel met zichzelf.

anti-Stokes-effect: door absorptie van twee quanta wordt een hoger niveau aangeslagen. Dit geeft aanleiding tot fluorescentie met hogere frequentie dan de invallende straling.

Bij al deze effecten is er dus geen energie-overdracht tussen straling en medium. Toch is het medium hiervoor essentieel. In vacuum blijven de Maxwell-vergelijkingen lineair. Bij nog veel hogere intensiteiten volgt uit de quantumelectrodynamica, dat in vacuum verstrooiing van het licht door licht kan plaats vinden. Twee quanta kunnen dan twee nieuwe quanta vormen met dezelfde frequentie, maar verschillende voortplantingsrichting.

De niet-lineaire optische effecten kunnen beschreven worden door Maxwell-vergelijkingen en niet-lineaire materiaalvergelijkingen. Algemeen zou gelden:

$$\vec{P} = \vec{P}(E), \text{ resp. } \vec{D} = \vec{D}(E), \tag{11}$$

dus  $\vec{P}$  en dus ook  $\vec{D}$  willekeurige functies van  $\vec{E}$ .

Dan wordt dus ook  $c = c(E)$  een willekeurige functie van  $\vec{E}$ . Voor  $c$  schrijven we naar analogie van  $c^{-2} = \epsilon\mu$ ,  $c(E)^{-2} = \mu \frac{dD}{dE}$ . Voor vlakke gepolariseerde golven krijgen we dan een golfvergelijking voor  $\vec{E}$  van de gedaante:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c(E)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0, \tag{12}$$

Exacte oplossing van het reflectieprobleem van deze vergelijking is gegeven in<sup>3)</sup> voor loodrechte inval. Dit wordt verder berekend in 4. en 5. van dit verslag.

We kunnen ook  $\vec{P}$  of  $\vec{D}$  ontwikkelen in een reeks naar machten van  $\vec{E}$ .

$$\vec{P} = \vec{P}_{\text{lineair}}(1 + \alpha E + \dots) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(1 + \alpha E + \dots) \quad (13)$$

of:

$$\vec{D} = \vec{D}_{\text{lineair}}(1 + \alpha E + \dots) = \epsilon_0 (1 + \chi)^{\frac{1}{2}} \vec{E}(1 + \alpha E + \dots) = \epsilon \vec{E}(1 + \alpha E + \dots). \quad (14)$$

De golfvergelijking voor  $\vec{E}$  wordt nu:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\alpha \chi}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}^2}{\partial t^2} \quad \text{dus niet-lineaire D.V.} \quad (15)$$

N.B.  $\alpha$  is hier de  $\alpha$  uit (13).

Deze vergelijking is exact op te lossen met de methode van (12).

Benaderde oplossingen kunnen worden gegeven door de oplossing te ontwikkelen naar machten van de storingsparameter  $\alpha$  uit (13) of (14):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \alpha \vec{E}_1 + \alpha^2 \vec{E}_2 + \dots \quad (16)$$

Voor  $\vec{E}_0$  vinden we de waarde van de lineaire theorie,  $E_1$  en  $E_2$  kunnen worden berekend uit lineaire differentiaalvergelijkingen. Dit gebeurt voor het reflectieprobleem in 2. en 3. van dit verslag.

Bij de experimenten over niet-lineaire optica speelt de kristalsymmetrie van het medium een rol. Uit (13) zien we, dat de factor  $\epsilon \chi \alpha$  die het verband tussen de vector  $\vec{P}$  en de symmetrische tensor  $E^2$  aangeeft een symmetrische derde-orde tensor zal zijn. Het tensorkarakter van het verband tussen  $\vec{P}$  en  $\vec{E}$  betekent fysisch dat dit functionele verband onafhankelijk moet zijn van het gekozen coördinatenstelsel. Het verband tussen  $\vec{P}$  en  $E^2$  is analoog aan dat tussen polarisatie en deformatie bij piëzo-electriciteit.

Bij kristalklassen, die niet de voor piëzo-electriciteit noodzakelijke asymmetrie (geen inversiecentrum in de richting van de polarisatie) bezitten treden daarom geen tweede (en andere even) harmonischen op. Bij inversie veranderen de vectoren  $\vec{P}$  en  $\vec{E}$  van teken, de even machten van  $\vec{E}$  dus niet, de tensoren, die het verband tussen  $\vec{P}$  en even machten van  $\vec{E}$  aangeven moeten dus identiek nul zijn.

In een isotroop medium kan toch opwekking van even harmonischen plaats vinden als men de symmetrie verstoort door middel van een statisch electricch veld  $F$  in de richting van de electriche veldsterkte van het primaire licht. In (13) komt er dan:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi(\vec{E} + \vec{F}) + \epsilon_0 \chi^2 (\vec{E} + \vec{F})^2,$$

dit geeft dus een term

$$3\epsilon_0 \chi^2 \vec{F} \vec{E}^2.$$

Dispersie in het medium speelt eveneens een grote rol bij de experimenten in de niet-lineaire optica. De opgewekte harmonischen hebben een andere voortplantingssnelheid dan de primaire golf. Door destructieve interferentie wordt daardoor de grootte van de niet-lineaire optische effecten sterk verminderd.

Op verschillende manieren kan men dit ondervangen<sup>1)5)</sup>.

Bij de z.g. "index matching" wekt men de harmonischen op in een dubbelbrekend kristal. Primaire en harmonische golf worden nu gesplitst in een gewone en buitengewone straal. Er blijken kristallen te bestaan waarbij  $n_{\omega}$  voor de ene straal gelijk is aan  $n_{2\omega}$  voor de andere, de dispersie wordt op deze manier opgeheven.

Men kan ook gebruik maken van gelaagde ferro-electriche materialen. De fase van de harmonischen die in de verschillende lagen worden opgewekt is in opvolgende lagen tegengesteld. Ook hierdoor wordt de dispersie gecompenseerd.

Hetzelfde effect wordt bereikt met kwartsplaten waarvan de optische as in opvolgende platen een tegengestelde richting heeft. De theorie van de niet-lineaire optische effecten met dispersie is gecompliceerd<sup>6)</sup>. Een eenvoudig model is gegeven in<sup>5)</sup>. Uitgangspunt hierbij is de materiaalvergelijking met dispersie uit de klassieke electronentheorie:

$$\vec{P} - \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (17)$$

( $\omega_0$  = eigenfrequentie van elastisch gebonden electronen.)

dus

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

waarbij de tweede term rechts klein is t.o.v. de eerste.

$$\Rightarrow \vec{P} \approx \epsilon_0 \chi \vec{E} + \frac{\epsilon_0 \chi}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} = \epsilon_0 \chi' \vec{E} - \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (18)$$

Dit kan in de golfvergelijking (12) worden ingevoerd. Voor golven in één richting kan deze reeksontwikkeling van  $\vec{P}$  volgens (13) worden opgelost.

De voor niet-lineaire optische effecten benodigde intensiteit kan als volgt geschat worden<sup>6)</sup>:

De intensiteit van een hogere-orde verstrooiingsproces zal een factor  $(E_1/E_{at})^2$  kleiner zijn dan de intensiteit van een verstrooiingsproces één orde lager.  $E_1$  = veldsterkte primair licht,  $E_{at} = 3 \cdot 10^8$  V/cm is een maat voor het gemiddeld atomaire elektrische veld.

Conversie van 1 op  $10^{10}$  quanta kan nog worden aangetoond. Dit geeft een minimale  $E_1 = 3 \cdot 10^3$  V/cm, wat overeenkomt met  $0.25$  MW/cm<sup>2</sup>.

De maximale met lasers bereikte intensiteit is  $10^3$  MW/cm<sup>2</sup>; <sup>1)</sup>. Conversie van 20% van het invallende licht naar de tweede harmonische is aangetoond. Met een continue gaslaser is opwekking van harmonischen aangetoond bij een vermogen van slechts  $5 \cdot 10^{-5}$  W.

Ook uit de theorie van het Kerr-effect blijkt een invloed van een elektrisch veld op de optische eigenschappen van een medium. Ook hieruit volgen benodigde intensiteiten van de orde van  $1\text{MW}/\text{cm}^2$ . Het Kerr-effect bestaat hierin, dat een medium dubbelbrekend wordt onder invloed van een elektrisch veld. Door Buckingham<sup>4)</sup> is berekend dat ook een sterke lichtstraal dit effect in een isotroop medium zal veroorzaken. Het medium wordt dubbelbrekend in richtingen loodrecht op de voortplantingsrichting, die dus optische as wordt. Deze berekening dateert van vóór de uitvinding van de laser. Het effect is, voor zover ik weet nog niet aangetoond.

-----

#### LITERATUUR:

1. Giordmaine, J.A., Scientific American 209, 38, 1964.
2. Vuylsteke, A.A., Elements of maser theory. Princeton, 1960.
3. Broer, L.J.F., Phys. Letters 4, 65, 1963.
4. Buckingham, A.D., Proc. of the Phys. Soc. B, LXIX, 344, 1959.
5. Broer, L.J.F., Ned. Tijdschr. voor Natuurkunde: "Niet-lineaire optica".  
nog te publiceren.
6. Armstrong, J.A., Bloembergen, N., Ducering, J., Pershan, P.S.,  
Phys. Rev. 127, 1918, 1961.
7. Courant, R. and K.O. Friedrichs, Supersonic flow and shock waves  
New York, 1961.

2. Oplossing van het reflectieprobleem voor loodrechte inval door middel van een ontwikkeling, van de elektrische veldsterkte naar machten van  $\alpha$ , als  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}(1 + \alpha \vec{E})$ .

### 2.1. Opstellen van de vergelijkingen.

We beschouwen een lineair gepolariseerde, vlakke electromagnetische golf, die vanuit vacuum loodrecht invalt op een niet-lineair medium.

Zie figuur, de voortplantingsrichting

van de invallende golf kiezen we als

pos. x-richting, de richting van de elektrische vector als z-richting

en die van de magnetische vector als y-richting.

Het medium vult de halfruimte  $x = 0$ .

In het medium stellen we:  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}(1 + \alpha \vec{E})$ .

Dit is experimenteel te verwezenlijken door in een isotroop medium een statisch elektrisch veld aan te leggen in de richting van de elektrische veldsterkte van het licht of door een medium te nemen zonder inversiecentrum. De lichtsnelheid in het medium definiëren we naar analogie van  $c^{-2} = \epsilon \mu$  met behulp van

$$\left\{ c(E) \right\}^{-2} = \mu \frac{dD}{dE} = \epsilon \mu + 2\alpha \epsilon \mu E = \frac{1}{c^2} (1 + 2\alpha E). \quad (19)$$

De Maxwell-vergelijkingen worden:

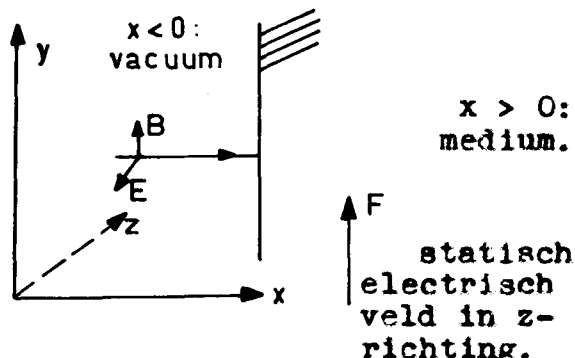
$$\frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

voor  $x < 0$

(20)

en



en

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 E^2}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \text{voor } x > 0. \quad (21)$$

Als golfvergelijking voor E voor  $x > 0$  krijgen we een niet-lineaire 2de ordevergelijking:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 E^2}{\partial t^2}.$$

Omdat  $\alpha$  klein is, kunnen we stellen:

$$\left. \begin{aligned} E &= E_0 + \alpha E_1 + \alpha^2 E_2 + \dots + \alpha^m E_m \\ B &= B_0 + \alpha B_1 + \alpha^2 B_2 + \dots + \alpha^m B_m \end{aligned} \right\} \text{waarin } E_0 \text{ en } B_0 \text{ de waarden van } E \text{ en } B \text{ zijn} \\ \text{voor } \alpha \equiv 0.$$

De vergelijkingen voor  $E_0, E_1, \dots, E_m$  worden:

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (E_0^2)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2 (E_0 E_1)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_3}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (2E_0 E_2 + E_1^2)$$

$$\frac{\partial^2 E_m}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_m}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{k=0}^{m-1} E_k E_{m-1-k},$$

deze vergelijkingen zijn dus lineair. Voor  $x = 0$  geldt steeds de lineaire golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 E_m}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_m}{\partial t^2} = 0.$$

2.2. Oplossing van de vergelijking voor E<sub>0</sub>.

De vergelijking voor E<sub>0</sub> is de vergelijking voor lineaire golven:

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} = 0,$$

$$E_0 = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

is de algemene oplossing, waarin f en g willekeurige functies zijn.

Hier wordt g(t + x/c) = 0, omdat het medium oneindig uitgebreid is en in het medium dus geen gereflecteerde golven aanwezig zijn.

Dus: E<sub>0</sub> = f(t - x/c), B<sub>0</sub> = -1/c f(t - x/c)

f en g zijn te bepalen uit de aansluitvoorwaarden, E en B moeten continu zijn voor x = 0.

Stel de invallende golf

$$E^i = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c_0}\right), B^i = -\frac{A}{c_0} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c_0}\right).$$

Dan wordt:  $A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c_0}\right) + g\left(t + \frac{x}{c_0}\right) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$   
 $-\frac{A}{c_0} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c_0}\right) + \frac{1}{c_0} g\left(t + \frac{x}{c_0}\right) = \frac{-1}{c} f\left(t - \frac{x}{c}\right)$  }

$$\Rightarrow g\left(t + \frac{x}{c_0}\right) = \frac{c - c_0}{c + c_0} A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c_0}\right) = \frac{1 - n}{1 + n} A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c_0}\right)$$

met c<sub>0</sub>/c = n, de brekingsindex van het medium.

De gereflecteerde golf E<sub>r</sub>, B<sub>r</sub> wordt dus:

$$E_r = \frac{1 - n}{1 + n} A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c_0}\right), B_r = \frac{1 - n}{1 + n} \frac{A}{c_0} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c_0}\right). \tag{22}$$

Evenzo wordt de doorgaande golf E<sub>o</sub>, B<sub>o</sub>:

$$E_o = \frac{2}{1 + n} A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right), B_o = \frac{-2A}{(1 + n)c} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right). \tag{23}$$



### 2.3. Oplossing van de vergelijking voor $E_1$ .

Voor  $E_1$  krijgen we de lineaire golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (E_0)^2}{\partial t^2} = \frac{-8\omega^2}{(n+1)^2 c^2} A^2 \cos 2\omega \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (24)$$

Om een particuliere oplossing hiervan te vinden stellen we:

$$E_1 = x F_{11} \left(t - \frac{x}{c}\right),$$

waarin  $F_{11}$  een willekeurige functie is.

Substitutie in het linkerlid van (24) geeft:

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} = \frac{-2\omega}{c} F_{11}'.$$

waarin het accent differentiatie naar het argument van de functie  $F_{11}$  aanduidt. Dus een particuliere oplossing van (24) is:

$$E_1 = \frac{2\omega}{(n+1)^2 c} A x \sin 2\omega \left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (25)$$

Uit de veldvergelijkingen bepalen we het bij (25) behorende magnetisch veld  $B_1$ .

Kortheidshalve noemen we  $\omega \left(t - \frac{x}{c}\right) = p$ .

Uit de eerste veldvergelijking (21) volgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial t} &= \frac{\partial E_1}{\partial x} = \frac{2\omega}{(n+1)^2 c} A^2 \sin 2p - \frac{4\omega^2}{(n+1)^2 c^2} x A^2 \cos 2p \\ \Rightarrow B_1 &= \frac{-A^2}{(n+1)^2 c} \cos 2p - \frac{2\omega A^2}{(n+1)^2 c^2} x \sin 2p + f(x). \end{aligned}$$

Door substitutie in de tweede veldvergelijking blijkt dat  $f(x) \equiv \text{const.}$ :

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} = \frac{-4\omega A^2}{(n+1)^2 c^2} \sin 2p + \frac{4\omega^2 A^2}{(n+1)^2 c^3} x \cos 2p + f'(x)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{4\omega^2 A^2}{(n+1)^2 c} x \cos 2p \Rightarrow f'(x) = 0.$$

Dus:

$$B_1 = \frac{-2\omega A^2}{(n+1)^2 c^2} x \sin 2p - \frac{A^2}{(n+1)^2 c} \cos 2p + \text{const.} \quad (26)$$

In verband met de aansluitvoorwaarde voor E en B voor  $x = 0$ , willen we, dat  $E_1$  en  $B_1$  voor  $x = 0$  functies van  $\cos \omega t$  zijn. Voor de constante in (26) nemen we daarom  $\frac{A^2}{(n+1)^2 c}$ .

Dan wordt:

$$B_1 = \frac{-2\omega A^2}{(n+1)^2 c^2} x \sin 2p - \frac{2A^2}{(n+1)^2 c} \cos^2 p. \quad (27)$$

(25) en (27) zijn dus een particuliere oplossing van de veldvergelijkingen voor  $x > 0$ . Voor  $x = 0$  geeft (25)  $E_1 \neq 0$ .

De oplossing (25) en (27) zou dus i.v.m. de aansluitvoorwaarden voor  $x = 0$  voltooid kunnen worden met behulp van een staande golf in vacuum met de elektrische knoop in het scheidingsvlak.

Als we de componenten hiervan  $E_{1s}$  en  $B_{1s}$  noemen, wordt dit:

$$E_{1s} = \frac{-nA^2}{(n+1)^2} (-\cos^2 a + \cos^2 b) \quad (28)$$

$$B_{1s} = \frac{-nA^2}{(n+1)^2 c_0} (\cos^2 a + \cos^2 b) \quad (29)$$

met  $a = \omega(t - \frac{x}{c_0})$  en  $b = \omega(t + \frac{x}{c_0})$ .

(25) en (27) t/m (29) vormen dus een oplossing van de veldvergelijkingen. Deze voldoet echter niet aan de randvoorwaarde. De eerste termen van (28) en (29) geven namelijk aan, dat ook licht met frequentie  $2\omega$  zou invallen, wat niet het geval is.

Dit wordt gecorrigeerd door de met deze termen overeenkomende oplossing van het homogene probleem ervan af te trekken. Een dergelijke oplossing heeft evenals in het lineair geval voor  $E_0$  de gedaante:

$$E_{\text{vacuum}} = f(t - \frac{x}{c_0}) + \frac{1-n}{1+n} f(t + \frac{x}{c_0}), \quad \frac{2}{1+n} f(t - \frac{x}{c}) = E_{\text{medium}}$$

$$B_{\text{vacuum}} = -\frac{1}{c_0} f(t - \frac{x}{c_0}) + \frac{1-n}{(1+n)c_0} f(t + \frac{x}{c_0}), \quad \frac{-2}{(1+n)c_0} f(t - \frac{x}{c}) = B_{\text{medium}}$$

In dit geval wordt de benodigde oplossing  $E_{1h}$ ,  $B_{1h}$  van de homogene vergelijkingen voor  $E_1$  en  $B_1$ :

$$x < 0: \quad \left\{ \begin{aligned} E_{1h} &= \frac{n}{(n+1)^2} A^2 \cos^2 a + \frac{n(1-n)}{(n+1)^3} A^2 \cos^2 b \\ B_{1h} &= \frac{-n}{(n+1)^2 c_0} A^2 \cos^2 a + \frac{n(1-n)}{(n+1)^3 c_0} A^2 \cos^2 b \end{aligned} \right.$$

$$x > 0: \quad \left\{ \begin{aligned} E_{1h} &= \frac{2n}{(n+1)^3} A^2 \cos^2 p \\ E_{1h} &= \frac{-2n}{(n+1)^3 c} A^2 \cos^2 p. \end{aligned} \right.$$

Na aftrekking wordt het resultaat:

$$x < 0: \quad \left\{ \begin{aligned} E_1 &= E_{1s} - E_{1h} = \frac{-2n}{(n+1)^3} A^2 \cos^2 \omega(t + \frac{x}{c_0}) \\ B_1 &= B_{1s} - B_{1h} = \frac{-2n}{(1+n)^3 c_0} A^2 \cos^2 \omega(t + \frac{x}{c_0}) \end{aligned} \right. \quad (30)$$

$$x > 0: \quad \left\{ \begin{aligned} E_1 &= \frac{2\omega}{(n+1)^2 c} A^2 x \sin 2\omega(t - \frac{x}{c}) - \frac{2n}{(n+1)^3} A^2 \cos^2 \omega(t - \frac{x}{c}) \\ B_1 &= \frac{-2\omega}{(n+1)^2 c^2} A^2 x \sin 2\omega(t - \frac{x}{c}) - \frac{2n}{(n+1)^3 c} A^2 \cos^2 \omega(t - \frac{x}{c}) \end{aligned} \right. \quad (31)$$

In het medium krijgen we dus:

a) een golf met frequentie  $2\omega$  en amplitude evenredig met het kwadraat van de amplitude van het invallende licht plus een statisch electrisch en magnetisch veld in de richting van de electrisch en magnetische veldsterkte van het invallend licht evenredig met het kwadraat van deze amplitude.

Dit volgt uit de laatste term van (31).

b) een golf met frequentie  $2\omega$  en amplitude evenredig met het kwadraat van de amplitude van de invallende golf en bovendien evenredig met de afstand tot het grensvlak. Op grote afstand van het grensvlak zou de veldsterkte

van de doorgaande golf dus oneindig groot worden.

De hier gebruikte methode van ontwikkeling van de veldsterkten naar machten van  $\alpha$  geeft dus alleen voor kleine afstand tot het grensvlak een bruikbare uitdrukking voor de doorgaande golf.

Voor de gereflecteerde golf voldoet deze berekening wel zonder een dergelijke beperking, aangezien hiervoor alleen de veldsterkte van de doorgaande golf aan het grensvlak van belang is. In reflectie krijgen we een tweede harmonische en een statisch veld. In beide is de veldsterkte evenredig met het kwadraat van de invallende veldsterkte.

#### 2.4. Oplossing van de vergelijking voor $E_2$ .

Deze vergelijking luidt:

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2 (E_0 E_1)}{\partial t^2} \quad \text{voor } x > 0. \quad (32)$$

De bijbehorende Maxwell-vergelijkingen zijn:

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial B_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = \frac{2}{c^2} \frac{\partial (E_0 E_1)}{\partial t}. \quad (33)$$

Substitutie van  $E_0$  en  $E_1$  volgens (23) en (31) geeft voor de 2de veldvergelijking (33):

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{4A^3 \omega^2}{(n+1)^3 c^3} x (3 \cos 3p + \cos p) + \frac{6\omega A^3 m}{(n+1)^4 c^2} (\sin 3p + \sin p) \quad (34)$$

De golfvergelijking (32) wordt:

$$\frac{\partial E_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = - \frac{4A^3 \omega^3}{(n+1)^3 c^3} x (9 \sin 3p + \sin p) + \frac{6nA^3 \omega^2}{(n+1)^4 c^2} (3 \cos 3p + \cos p). \quad (35)$$

In analogie met de oplossing van (24) stellen we:

$E_2 = x^2 F_{22}(p) + x F_{21}(p)$ , waarin  $F_{22}$  en  $F_{21}$  weer willekeurige functies van  $p$  zijn, met weer  $p = \omega(t - \frac{x}{c})$ .

Substitutie hiervan geeft:

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = 2F_{22}(p) - \frac{4\omega}{c} x F_{22}^1(p) - \frac{2\omega}{c} F_{21}^1(p).$$

Vergelijking met (35) geeft uit de termen met x voor  $F_{22}^1(p)$ :

$$\frac{4\omega}{c} F_{22}^1(p) = \frac{-4A^3 \omega^3}{(n+1)^3 c^3} (9 \sin 3p + \sin p)$$

$$F_{22}(p) = \frac{-A^3 \omega^2}{(n+1)^3 c^2} (3 \cos 3p + \cos p).$$

Nu kan  $F_{21}^1(p)$  berekend worden:

$$\frac{2\omega}{c} F_{21}^1(p) = 2 F_{22}(p) - \frac{6nA^3 \omega^2}{(n+1)^4 c^2} (3 \cos 3p + \cos p)$$

$$\Rightarrow F_{21}(p) = \frac{-\omega(n+1)}{(n+1)^4 c} A^3 (\sin 3p + \sin p), \text{ dus } E_2 \text{ wordt:}$$

$$E_2 = -\frac{\omega^2 A^3}{(n+1)^3 c^2} x^2 (3 \cos 3p + \cos p) - \frac{\omega A^3 (4n+1)}{(n+1)^4 c} x (\sin 3p + \sin p). \quad (36)$$

Volgens de eerste veldvergelijking (33) wordt het bijbehorend magneetveld:

$$\frac{\partial B_2}{\partial t} = \frac{\partial E_2}{\partial x} = -\frac{2\omega^2 A^3}{(n+1)^3 c^2} x (3 \cos 3p + \cos p) -$$

$$-\frac{\omega^3 A^3}{(n+1)^3 c^3} x^2 (9 \sin 3p + \sin p) - \frac{\omega A^3 (4n+1)}{(n+1)^4 c} (\sin 3p + \sin p) +$$

$$+ \frac{\omega^2 A^3 (4n+1)}{(n+1)^4 c^2} x (3 \cos 3p + \cos p).$$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{\omega^2 A^3}{(n+1)^3 c^3} x^2 (3 \cos 3p + \cos p) + \frac{\omega A^3 (2n-1)}{(n+1)^4 c^2} x (\sin 3p + \sin p) +$$

$$+ \frac{A^3 (4n+1)}{(n+1)^4 c} \left( \frac{\cos 3p}{3} + \cos p \right) + f(x). \quad (37)$$

Substitutie van (37) in de tweede veldvergelijking (33) geeft:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_2}{\partial t} &= \frac{2\omega^2 A^3}{(n+1)^3 c^3} x (3 \cos 3p + \cos p) + \frac{\omega^3 A^3}{(n+1)^3 c^4} x^2 (9 \sin 3p + \\
 &+ \sin p) + \frac{\omega A^3 (2n-1)}{(n+1)^4 c^2} (\sin 3p + \sin p) - \frac{\omega^2 A^3 (2n-1)}{(n+1)^4 c^3} x (3 \cos 3p + \cos p) + \\
 &+ \frac{\omega A^3 (4n+1)}{(n+1)^4 c^2} (\sin 3p + \sin p) + \frac{\partial f}{\partial x} - \\
 &- \frac{\omega^3 A^3}{(n+1)^3 c^4} x^2 (9 \sin 3p + \sin p) + \frac{\omega^2 A^3 (4n+1)}{(n+1)^4 c^3} x (3 \cos 3p + \cos p) = \\
 &= \frac{\omega^2 A^3}{(n+1)^4 c^3} x (3 \cos 3p + \cos p) \left\{ 2(n+1) - (2n-1) + (4n+1) \right\} \\
 &+ \frac{\omega A^3}{(n+1)^4 c^2} (\sin 3p + \sin p) \left\{ (2n-1) + (4n+1) \right\} + \frac{\partial f}{\partial x} = \\
 &= \frac{4\omega^2 A^3}{(n+1)^3 c^3} x (3 \cos 3p + \cos p) + \frac{6\omega A^3 n}{(n+1)^4 c^2} (\sin 3p + \sin p) + \frac{\partial f}{\partial x} = \\
 &\frac{2}{c^2} \frac{\partial (E_0 E_1)}{\partial t} \quad \text{met } f(x) = \text{constant. volgens (34).}
 \end{aligned}$$

$f(x)$  kan hier gelijk aan nul genomen worden, dan wordt voor

$$x = 0: E_2 = 0, \quad B_2 = \frac{A^3 (4n+1)}{(n+1)^4 c} \left( \frac{\cos 3p}{3} + \cos p \right),$$

wegens  $\cos 3p = 4 \cos^3 p - 3 \cos p$  is  $B_2$  dan een functie van  $\cos p$ .

Aan de oplossing (36) en (37) voor  $x > 0$  zou aansluiten de staande golf in vacuum met veldsterkten  $E_{2s}$  en  $B_{2s}$  volgens:

$x < 0$ :

$$E_{2s} = \frac{nA^3 (4n+1)}{2(n+1)^4} \left\{ \left( \frac{-\cos 3a}{3} + \frac{\cos 3b}{3} \right) + (-\cos a + \cos b) \right\} \quad (38)$$

$$B_{2s} = \frac{nA^3 (4n+1)}{2(n+1)^4 c_0} \left\{ \left( \frac{\cos 3a}{3} + \frac{\cos 3b}{3} \right) + (\cos a + \cos b) \right\} \quad (39)$$

met  $a = \omega(t - \frac{x}{c_0})$  en  $b = \omega(t + \frac{x}{c_0})$ .

In verband met de randvoorwaarde, dat alleen licht met frequentie  $\omega$  invalt, moet van de gevonden oplossing (36) tot en met (39) weer een oplossing  $E_{2h}$ ,  $B_{2h}$  van het homogene probleem worden afgetrokken.

Hiervoor moeten we nemen:

voor  $x < 0$ :

$$E_{2h} = \frac{A^3 n(4n+1)}{2(n+1)^4} \left\{ \left( \frac{-\cos 3a}{3} + \frac{1-n}{1+n} \frac{\cos 3b}{3} \right) + \left( -\cos a + \frac{1-n}{1+n} \cos b \right) \right\}$$

$$B_{2h} = \frac{-A^3 n(4n+1)}{2(n+1)^4 c_0} \left\{ \left( \frac{-\cos 3a}{3} + \frac{1-n}{1+n} \frac{\cos 3b}{3} \right) + \left( -\cos a + \frac{1-n}{1+n} \cos b \right) \right\}$$

voor  $x > 0$ :

$$E_{2h} = \frac{-A^3 n(4n+1)}{(n+1)^5} \left( \frac{\cos 3p}{3} + \cos p \right)$$

$$B_{2h} = \frac{-E_{2h}}{c}$$

Het resultaat na aftrekken van deze homogene oplossing wordt:

$x < 0$ :

$$\begin{cases} E_2 = \frac{A^3 n(4n+1)}{(n+1)^5} \left( \frac{\cos 3b}{3} + \cos b \right) & (40) \\ B_2 = \frac{E_2}{c_0} & (41) \end{cases}$$

$x > 0$ :

$$E_2 = \frac{-\omega^2 A^3}{(n+1)^3 c} x^2 (3 \cos 3p + \cos p) - \frac{\omega A^3 (4n+1)}{(n+1)^4 c} x (\sin 3p + \sin p) + \frac{n A^3 (4n+1)}{(n+1)^5} \left( \frac{\cos 3p}{3} + \cos p \right) \quad (42)$$

$$B_2 = \frac{+\omega^2 A^3 x^2}{(n+1)^3 c^3} (3 \cos 3p + \cos p) + \frac{\omega A^3 (2n-1)}{(n+1)^4 c} x (\sin 3p + \sin p) + \frac{A^3 (4n+1)}{(n+1)^5 c} \left( \frac{\cos 3p}{3} + \cos p \right) \quad (43)$$

In deze orde worden dus teruggekaatst een derde harmonische en een golf met de frequentie van het invallende licht. Bij de doorzgaande golf vinden we deze eveneens, er zijn hierbij ook golven, waarvan de veldsterkten lineair en kwadratisch met de afstand tot het grensvlak toenemen. Van al de berekende golven worden in deze orde de amplitudes evenredig met de derde macht van de amplitude van het invallende licht.

N.B. De opgewekte golf met de primaire frequentie  $\omega$  in het medium is in tegenfase met de primaire golf  $E_0$ . Dit blijkt uit de eerste twee termen van (42). Dit viel ook te verwachten wegens het behoud van energie (verwerkt in de randvoorwaarden). De in het niet-lineaire geval ontstane golf met frequentie  $\omega$  moet een geringere intensiteit hebben dan de lineaire golf  $E_0$ .

### 2.5. Oplossing van de vergelijking voor $E_m$ .

Uit de oplossing van de vergelijkingen voor  $E_1$  en  $E_2$  kunnen we laten zien dat de vergelijking voor  $E_m$ :

$$\frac{\partial^2 E_m}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_m}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{k=0}^{m-1} E_k E_{m-1-k} \quad (44)$$

met  $m$  willekeurig, geheel getal op analoge wijze kan worden opgelost.

Als particuliere oplossing proberen we dan:

$$E_m = \sum_{k=1}^m x^k F_{m,k}(p) \quad (45)$$

$F_{m,k}$  is weer een willekeurige functie.

Dat we een particuliere oplossing van de vorm (45) moeten nemen kunnen we afleiden uit de aard van de functies  $E_0$  en  $E_1$ .

$E_0$  wordt berekend uit:

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} = 0.$$

Deze vergelijking wordt eenvoudiger bij overgang op de nieuwe variabelen:

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \quad \eta = t + \frac{x}{c}.$$



Dan wordt:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} + \frac{\partial E}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dx} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial \xi} \frac{d\xi}{dx} + \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial \eta} \frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} - \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial E}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial E}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \eta} \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 E}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

wordt:  $-4 \frac{\partial^2 E}{\partial \xi \partial \eta} = 0$

$\Rightarrow E_0 = f(\xi) + g(\eta)$  met  $f$  en  $g$  willekeurige functies.

In een oneindig uitgebreid medium is  $E_0 = f(\xi)$ , er zijn alleen naar rechts lopende golven.  $E_1$  wordt dan berekend uit:

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2}$$

dit wordt bij overgang op de nieuwe variabelen  $\xi$  en  $\eta$ :

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial \xi \partial \eta} = F_0(\xi).$$

Hieruit is direct te zien, dat een particuliere oplossing is:

$E_1 = \eta G(\xi) = t F_1(\xi) + \frac{x}{c} F_1(\xi)$ . de eerste term kan niet worden aangepast aan de aansluitvoorwaarden voor  $x = 0$ .

Dus  $E_1$  wordt van de gedaante:  $x F_{11}(\xi) + F_{10}(\xi)$ .

Alle verdere functies  $E_m$  krijgen nu de gedaante:

$$E_m = \sum_{k=1}^m x^k F_{m,k}(p) + F_{m,0}(p),$$

dit is dus (45) en een oplossing van de homogene vergelijking, omdat in het rechterlid van de niet-lineaire golfvergelijking steeds produkten van  $E_0, E_1, E_2, \dots$  optreden.

De termen van (45) kunnen successievelijk berekend worden, evenals dit voor  $E_2$  gebeurd is. Substitutie van (45) in (44) geeft:

$$\frac{\partial E_m}{\partial x} = \sum_{k=1}^m (kx^{k-1} F_{m,k}(p) - \frac{\omega}{c} x^k F_{m,k}^{11}(p))$$

$$\frac{\partial^2 E_m}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^m \left\{ k(k-1)x^{k-2} F_{m,k}(p) - \frac{2\omega k}{c} x^{k-1} F_{m,k}^{11}(p) + \frac{\omega^2}{c^2} x^k F_{m,k}^{111}(p) \right\}$$

$$\frac{\partial^2 E_m}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^m \omega^2 x^k F_{m,k}^{11}(p)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial^2 E_m}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_m}{\partial t^2} &= \sum_{k=1}^m \left( \frac{-2\omega}{c} x^{k-1} F_{m,k}^{11}(p) + k(k-1)x^{k-2} F_{m,k}(p) \right) = \\ &= \frac{-2\omega}{c} x^{m-1} F_{m,m}^{11}(p) + x^{m-2} \left\{ \frac{-2\omega(m-1)^2}{c} F_{m,m-1}^{11}(p) + m(m-1) F_{m,m}(p) \right\} \end{aligned}$$

Het rechterlid van (44) wordt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{k=0}^{m-1} F_k E_{m-1-k} &= \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \sum_{r=1}^k x^r F_{k,r}^{11}(p) \cdot \sum_{r=1}^{m-1-k} x^r F_{m-1-k,r}^{11}(p) \right\} = \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ x^{m-1} F_{kk}^{11}(p) \cdot F_{m-1-k,m-1-k}^{11}(p) + x^{m-2} \left( F_{k,k-1}^{11}(p) \cdot F_{m-1-k,m-1-k}^{11}(p) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + F_{kk}^{11}(p) F_{m-1-k,m-2-k}^{11}(p) \right) + \dots \right\} \end{aligned}$$

Dit zijn dus allemaal bekende functies, want  $E_0, \dots, E_{m-1}$  worden bekend verondersteld. Gelijkstellen van de coëfficiënten van  $x^{m-1}$  links en rechts geeft:

$$F_{m,m}^{11}(p) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega}{2c} F_{k,k}^{11}(p) \cdot F_{m-1-k,m-1-k}^{11}(p).$$

Dus  $F_{m,m}(p)$  kan bepaald worden, substitutie in de coëfficiënt van  $x^{m-2}$  geeft dan  $F_{m,m-1}(p)$  enz.

Een particuliere oplossing voor  $B_m$  kan gevonden worden door (45) in de eerste veldvergelijking (21)  $\frac{\partial E_m}{\partial x} - \frac{\partial B_m}{\partial t} = 0$  te substitueren.

$B_m$  krijgt dan de gedaante:  $B_m = \sum_{k=0}^m x^k F_{m,k}(p) + f(x)$ .

Door substitutie in de 2de veldvergelijking (21) blijkt dan, dat  $f(x)$  een constante moet zijn, omdat alle ontredende functies van de gedaante  $x^k F(p)$  zijn en  $B_m$  dus geen functie van  $x$  alleen kan bevatten.

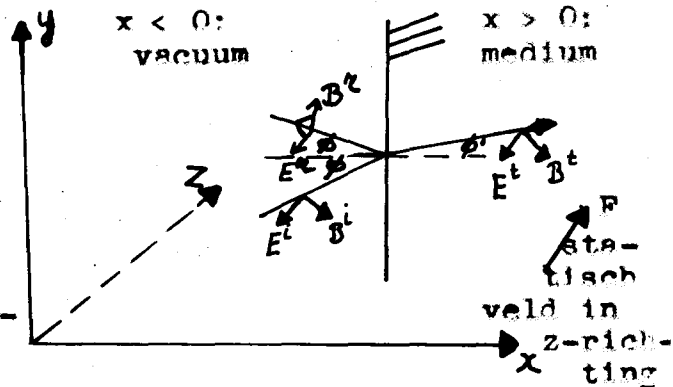
Deze constante moet dan zo gekozen worden, dat voor  $x = 0$   $E_m$  en  $B_m$  functies van de invallende golf voor  $x = 0$  worden.

Met behulp van een staande golf in vacuum en aanpassing aan de randvoorwaarden door aftrekken van een oplossing van de homogene vergelijking zodat de juiste invallende golf verkregen wordt, kan voor elke  $m$  de oplossing  $E_m$ ,  $B_m$  gevonden worden.

3. Oplossing van het reflectieprobleem voor scheve inval door middel van een reeksontwikkeling van de elektrische veldsterkte naar machten van  $\alpha$ .  
als  $\vec{D} = \epsilon \vec{E} (1 + \alpha \vec{E})$ .

3.1. Opstellen van de vergelijkingen.

We hebben hier dezelfde opstelling als bij 2., alleen valt de invallende golf in onder een hoek  $\phi$  met de normaal op het grensvlak, de doorgaande golf wordt gebroken onder een hoek  $\phi'$ .



De richting van de normaal op het grensvlak kiezen we als x-richting, de richting van de elektrische veldsterkte als de z-richting,  $\underline{E} = (0,0,E)$ .

$\underline{B} = (B^x, B^y, 0)$ . Het medium vult weer de halfruimte  $x > 0$ .

De Maxwell-vergelijkingen worden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial B^y}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial B^x}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial B^y}{\partial x} - \frac{\partial B^x}{\partial y} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial E}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{voor } x < 0 \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial B^y}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial B^x}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial B^y}{\partial x} - \frac{\partial B^x}{\partial y} - \frac{(1 + 2\alpha E)}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} x > 0 \quad (47)$$

In het medium is weer  $\left\{ c(E) \right\}^2 = \frac{1}{c^2} (1 + 2\alpha E)$ .

Voor  $x > 0$  stellen we weer:

$$E = E_0 + \alpha E_1 + \alpha^2 E_2 + \dots$$

$$B = B_0 + \alpha B_1 + \alpha^2 B_2 + \dots$$

In het lineaire geval ( $\alpha = 0$ ) krijgen we:

$$\text{invallende golf: } \left\{ \begin{array}{l} E^i = A \cos \omega \left( t - \frac{x \cos \phi + y \sin \phi}{c_0} \right) = A \cos a \\ B^{iv} = -\frac{E^i}{c_0} \cos \phi \\ B^{ix} = \frac{E^i}{c_0} \sin \phi \end{array} \right.$$

$$\text{teruggekaatste golf: } \left\{ \begin{array}{l} E^r = h \left( t + \frac{x \cos \psi - y \sin \psi}{c_0} \right) = h(b) \\ B^{rv} = \frac{\cos \psi}{c_0} E^r \\ B^{rx} = \frac{\sin \psi}{c_0} E^r \end{array} \right.$$

$$\text{doorgaande golf: } \left\{ \begin{array}{l} E^t = g \left( t - \frac{x \cos \phi^1 + y \sin \phi^1}{c_m} \right) = g(p) \\ B^{tv} = \frac{-\cos \phi^1}{c} E^t \\ B^{tx} = \frac{\sin \phi^1}{c} E^t \end{array} \right.$$

$\phi$  = hoek van inval,  $\psi$  = hoek van terugkaatsing,  $\phi^1$  = hoek van breking.

Er geldt:  $\psi = \phi$ ,  $\sin \phi = n \sin \phi^1$ , dit volgt uit de aansluitvoorwaarden voor  $x = 0$ , waaruit tevens de functies  $h(b)$  en  $g(p)$  zijn te bepalen.

Voor  $x = 0$  is nl.  $E^t = E^i + E^r$ ,  $B^{tx} = B^{ix} + B^{rx}$ ,  $B^{tv} = B^{iv} + B^{rv}$ .

Dus:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cos \omega \left( t - \frac{y \sin \phi}{c_0} \right) + h \left( t - \frac{y \sin \phi}{c_0} \right) = g \left( t - \frac{ny \sin \phi^1}{c_0} \right) \\ \frac{-\cos \phi}{c_0} A \cos a + \frac{\cos \phi}{c_0} h(b) = -\frac{\cos \phi}{c} g(p) \\ \frac{\sin \phi}{c_0} A \cos a + \frac{\sin \phi}{c_0} h(b) = +\frac{\sin \phi^1}{c} g(p) \end{array} \right.$$

Als hier voor alle  $g$  aan voldaan moet kunnen worden, dan moeten de argumenten van de hierin voorkomende functies gelijk zijn. Fysisch betekent dit dat de fasesnelheid van de invallende, teruggekaatste en gebroken golf gelijk moet zijn in de richting langs het grensvlak.

We krijgen dus:  $\sin \phi = n \sin \phi^1$  (Wet van Snelluis) en  $\phi = \psi$ .

Verder wordt:  $g(p) = \frac{2 \cos \phi}{\cos \phi + n \cos \phi^1} A \cos p$  en  $h(b) =$

$$= \frac{\cos \phi - n \cos \phi^1}{\cos \phi + n \cos \phi^1} A \cos b.$$

### 3.2. Oplossing van de vergelijking voor $E_1$ .

De veldvergelijkingen voor  $E_1$  worden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial x} - \frac{\partial B_1^y}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{\partial B_1^x}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial B_1^y}{\partial x} - \frac{\partial B_1^x}{\partial y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} x < 0 \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial x} - \frac{\partial B_1^y}{\partial t} &= 0 \\ \frac{E_1}{v} + \frac{B_1^x}{x} &= 0 \\ \frac{\partial B_1^y}{\partial x} - \frac{\partial B_1^x}{\partial y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial (E_0)^2}{\partial t} \end{aligned} \right\} x > 0 \quad (50)$$

De derde veldvergelijking (50) wordt na substitutie van  $E_0$  volgens (48):

$$\frac{\partial B_1^y}{\partial x} - \frac{\partial B_1^x}{\partial y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{2}{c^2} E_0 \frac{\partial E_0}{\partial t} = - \frac{4 \cos^2 \phi \omega A^2}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 c^2} \sin 2p \quad (51)$$

Elimineren van  $B_1^y$  en  $B_1^x$  uit de eerste twee vergelijkingen van (50) en substitutie in de derde geeft de lineaire golfvergelijking voor  $E_1$ :

$$\square E_1 = \frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (E_0^2)}{\partial t^2} = - \frac{8 \cos^2 \phi \omega^2 A^2}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 c^2} \cos 2p \quad (52)$$

In analogie met het geval voor loodrechte inval en in verband met de aansluitvoorwaarde  $E_1 = F(p)$  voor  $x = 0$  en willekeurige  $y$  proberen we als particuliere oplossing:  $E_1 = x F_{11}(p)$ .

$$\text{Dan wordt: } \square E_1 = \square (x F_{11}(p)) = - \frac{2 \omega \cos \phi^1}{c} F_{11}^1(p).$$

Vergelijking hiervan met het rechterlid van (52) geeft voor de particuliere oplossing:

$$E_1 = \frac{2 \cos^2 \phi \omega A^2}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 c} x \sin 2p. \quad (53)$$

Substitutie van (53) in de eerste en tweede vergelijking van (50) geeft:

$$B_1^v = \frac{-2\omega A^2 \cos^2 \phi}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 c^2} x \sin 2\phi - \frac{\cos^2 \phi A^2}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 c \cos \phi^1} \cos 2\phi + f_1(x, y) \quad (54)$$

$$B_1^x = \frac{2 \cos^2 \phi \sin \phi^1 \omega A^2}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 \cos \phi c} x \sin 2\phi + f_2(x, y). \quad (55)$$

Substitutie hiervan in de derde vergelijking (50) geeft evenals in het loodrechte geval  $f_1(x, y)$  en  $f_2(x, y) = \text{constant}$ .

$B_1^x$  en  $B_1^v$  moeten voor  $x = 0$  functies van  $E_0$ , dus van  $\omega t$  worden, dus:

$$f_1(x, y) = - \frac{\cos^2 \phi A^2}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 c \cos \phi^1}$$

en  $f_2(x, y) = 0$ .

Dan worden voor  $x = 0$ :

$$E_1 = 0, \quad B_1^x = 0, \quad B_1^v = \frac{-2 \cos^2 \phi A^2 \cos^2 \omega t}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 c \cos \phi^1}.$$

Hieron zou weer aansluiten een staande golf in vacuum met knopen in  $E_1$

en  $B_1^x$  voor  $x = 0$ :

$$x < 0: \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{1s} = \frac{n \cos \phi}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 \cos \phi^1} A^2 (\cos^2 a - \cos^2 b) \\ B_{1s}^v = \frac{\cos^2 \phi}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 \cos \phi^1} \frac{A^2}{c} (-\cos^2 a - \cos^2 b) \\ B_{1s}^x = E_{1s} \frac{\sin \phi}{c_0} \end{array} \right.$$

De termen met  $\cos^2 a$  moeten weer verdwijnen in verband met de randvoorwaarde, dat geen straling met dubbele frequentie invalt. De oplossing van het homogene probleem, die hiertoe van de nu gevonden oplossing moet worden afgetrokken is:

$$\begin{aligned}
 x < 0: \\
 E_{1h} &= \frac{n \cos \phi}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 \cos \phi^1} A^2 \cos^2 a + \\
 &+ \frac{n \cos \phi (\cos \phi - n \cos \phi^1)}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos \phi^1} A^2 \cos^2 b \\
 B_{1h}^v &= \frac{-\cos^2 \phi}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 \cos \phi^1} \frac{A^2}{c} \cos^2 a + \\
 &+ \frac{\cos^2 \phi (\cos \phi - n \cos \phi^1)}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos \phi^1} \frac{A^2}{c} \cos^2 b \\
 B_{1h}^x &= B_{1h}^x = E_{1h} \frac{\sin \phi}{c_0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x > 0: \\
 E_{1h} &= \frac{2n \cos^2 \phi}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos \phi^1} A^2 \cos^2 p \\
 B_{1h}^v &= -E_{1h} \frac{\cos \phi^1}{c} \\
 B_{1h}^x &= E_{1h} \frac{\sin \phi^1}{c}
 \end{aligned}$$

Af trekken van deze oplossing van de homogene vergelijking van de gevonden particuliere oplossing geeft ten slotte:

$$\begin{aligned}
 x < 0: \\
 E_1 &= \frac{-2n \cos^2 \phi}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos \phi^1} A^2 \cos^2 b \\
 B_1^h &= \frac{E_1}{c_0} \cos \phi \\
 B_1^x &= \frac{E_1}{c_0} \sin \phi
 \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
 x > 0: \\
 E_1 &= \frac{2 \cos^2 \phi \omega A^2}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 \cos \phi^1 c} x \sin 2p - \\
 &- \frac{2n \cos^2 \phi A^2}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos \phi^1} \cos^2 p
 \end{aligned}$$



$$B_1^y = \frac{-2\cos^2 \phi \omega A^2}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 c} \times \sin 2p - \frac{2\cos^3 \phi A^2}{c(\cos \phi + \cos \phi^1)^3 \cos \phi} \cos^2 p$$

$$B_1^x = E_1 \frac{\sin \phi^1}{c} \quad (57)$$

voor  $\phi = 0 = \phi^1 \Rightarrow \cos \phi = \cos \phi^1 = 1$  en  $\sin \phi = \sin \phi^1 = 0$  gaan (56) en (57) over in (30) en (31).

### 3.3. Oplossing van de vergelijking voor $E_2$ .

De veldvergelijkingen voor  $E_2$  en  $B_2$  zijn voor  $x < 0$  dezelfde als die voor  $E_1$  en  $B_1$  (49). Voor  $x > 0$  komt er:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial B_2^y}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial E_2}{\partial v} + \frac{\partial B_2^x}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial B_2^y}{\partial x} - \frac{\partial B_2^x}{\partial v} - \frac{1}{c_2} \frac{\partial E_2}{\partial t} &= \frac{2}{c_2} \frac{\partial (E_0 E_1)}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Door eliminatie van  $B_2^x$  en  $B_2^y$  krijgen we als lineaire tweede-orde vergelijking voor  $E_2$ :

$$\square E_2 = \frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial v^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2 (E_0 E_1)}{\partial t^2} \quad (59)$$

Met  $E_0 = \frac{2\cos \phi}{\cos \phi + n \cos \phi^1} A \cos p$  en  $E_1 = (56)$  wordt de derde veldvergelijking (58):

$$\frac{\partial B_2^y}{\partial x} - \frac{\partial B_2^x}{\partial v} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = \frac{\omega^2 \cos^3 \phi A^3}{c^3 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos \phi} x (\cos p + 3 \cos 3p) +$$

$$+ \frac{2n\omega \cos^3 \phi A^3}{c^2 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^4 \cos \phi} (3 \sin p + 3 \sin 3p). \quad (60)$$

(59) wordt:  $\square E = - \frac{4\omega^3 \cos^3 \phi A^3}{c^3 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos \phi} x(\sin p + 9 \sin 3p) +$   
 $+ \frac{2n\omega^2 \cos^3 \phi A^3}{c^2 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^4 \cos \phi} (3 \cos p + 9 \cos 3p). \quad (61)$

Als particuliere oplossing van (61) stellen we:

$$E_2 = x^2 F_{22}(p) + x F_{21}(p).$$

Dan wordt:

$$\square E_2 = 2F_{22}(p) - \frac{4\omega \cos \phi^1}{c} x F_{22}^1(p) - \frac{2\omega \cos \phi^1}{c} F_{21}^1(p).$$

Uit de middelste term volgt door vergelijking met (61):

$$F_{22}^1(p) = \frac{\omega^2 \cos^3 \phi A^3}{c^2 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos^2 \phi} (\sin p + 9 \sin 3p)$$

$$\Rightarrow F_{22}(p) = \frac{\omega^2 \cos^3 \phi A^3}{c^2 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos^2 \phi} (\cos p + 3 \cos 3p).$$

Door substitutie van  $F_{22}(p)$  in  $E$  volgt dan door vergelijking met (61):

$$F_{21}^1(p) = \frac{-\omega \cos^3 \phi A^3}{c (\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos^3 \phi} (\cos p + 3 \cos 3p) -$$

$$- \frac{n\omega \cos^3 \phi A^3}{c (\cos \phi + n \cos \phi^1)^4 \cos^2 \phi} (3 \cos p + 9 \cos 3p)$$

$$F_{21}(p) = \frac{-\omega \cos^3 \phi A^3}{c (\cos \phi + n \cos \phi^1)^4 \cos \phi} (\cos \phi + 4n \cos \phi^1) + (\sin p + \sin 3p).$$

Uit de eerste veldvergelijking (58) volgt nu door substitutie van de gevonden particuliere oplossing voor  $E_2$ :

$$B_2^y = \frac{\omega^2 \cos^3 \phi A^3}{c^3 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos \phi} x^2 (3 \cos 3p + \cos p) +$$

$$+ \frac{\omega \cos^3 \phi A^3 (2n \cos \phi^1 - \cos \phi)}{c^2 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^4 \cos^2 \phi} x (\sin p + \sin 3p) +$$

$$+ \frac{\cos^3 \phi A^3 (\cos \phi + 4n \cos \phi^1)}{c (\cos \phi + n \cos \phi^1)^4 \cos^3 \phi^1} \left( \frac{\cos 3p}{3} + \cos p \right) + f_1(x, y)$$

en uit de tweede vergelijking (58):

$$B_2^x = \frac{-\omega^2 \cos^3 \phi \sin \phi^1 A^3}{c^3 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos^2 \phi^1} x^2 (\cos p + 3 \cos 3p) -$$

$$- \frac{\omega \cos^3 \phi \sin \phi^1 A^3}{c^2 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^4 \cos^3 \phi^1} x (\cos \phi + 4n \cos \phi^1) (\sin p + \sin 3p) + f_2(x, y).$$

Bij substitutie in de derde veldvergelijking blijkt, dat  $f_1(x, y)$  en  $f_2(x, y) = 0$  genomen kunnen worden: voor  $x = 0$  wordt dan:

$$E_2 = 0. B_2^x = 0. B_2^y = \frac{\cos^3 \phi}{c (\cos \phi + n \cos \phi^1)^4 \cos^3 \phi^1} (\cos \phi + 4n \cos \phi^1) \cdot \left( \frac{\cos 3\omega t}{3} + \cos \omega t \right).$$

Dus  $B_2^y$  voor  $x = 0$  is een functie van  $\cos \omega t$ .

De bij deze oplossing aansluitende staande golf in vacuum met knoop in  $E$  en  $B^x$  voor  $x = 0$  is:

$$x < 0: R_{2a}^y = \frac{n \cos^2 \phi A^3 (\cos \phi + 4n \cos \phi^1)}{2 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^4 \cos^3 \phi^1} \left\{ (-\cos a + \cos b) + \left( -\frac{\cos 3a + \cos 3b}{3} \right) \right\}$$

$$R_{2a}^y = \frac{\cos^3 \phi A^3 (\cos \phi + 4n \cos \phi^1)}{2c (\cos \phi + n \cos \phi^1)^4 \cos^3 \phi^1} \left\{ (\cos a + \cos b) + \left( \frac{\cos 3a + \cos 3b}{3} \right) \right\}$$

$$R_{2a}^x = R_{2a}^y \cdot \frac{\sin \phi}{c}$$

De oplossing van de homogene vergelijking, die in verband met de randvoorwaarde  $E^1 = A \cos a$  van de gevonden oplossing moet worden afgetrokken is:

$$x < 0: R_{2b}^y = \frac{-n \cos^2 \phi A^3 (\cos \phi + 4n \cos \phi^1)}{2 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^4 \cos^3 \phi^1} \left\{ (\cos a + \frac{\cos \phi - n \cos \phi^1}{\cos \phi + n \cos \phi^1} \cos b) + \left( \frac{\cos 3a}{3} + \frac{\cos \phi - n \cos \phi^1}{\cos \phi + n \cos \phi^1} \frac{\cos 3b}{3} \right) \right\}$$

$$B_{2h}^y = \frac{-\cos^3 \phi A^3 (\cos \phi + \mu \cos \phi^1)}{2c (\cos \phi + n \cos \phi^1)^4 \cos^3 \phi} \left\{ \left( -\cos a + \frac{\cos \phi - n \cos \phi^1}{\cos \phi + n \cos \phi^1} \cos b \right) + \left( \frac{-\cos 3a}{3} + \frac{\cos \phi - n \cos \phi^1}{\cos \phi + n \cos \phi^1} \frac{\cos 3h}{3} \right) \right\}$$

$$R_{2h}^x = R_{2h}^y \frac{\sin \phi}{c_0}$$

$$x > 0: E_{2h} = \frac{\omega A^3 (\cos \phi + \mu \cos \phi^1)}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^5 \cos^3 \phi} \left( \cos p + \frac{\cos 3p}{3} \right)$$

$$R_{2h}^y = -\frac{\cos \phi^1}{c} E_{2h}$$

$$R_{2h}^x = \frac{\sin \phi^1}{c} E_{2h}$$

Het resultaat na aftrekken van de homogene oplossing van de particuliere oplossing plus staande golf wordt:

$$x < 0: E_2 = \frac{n \cos^3 \phi A^3 (\cos \phi + \mu \cos \phi^1)}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^5 \cos^3 \phi} \left( \cos b + \frac{\cos 3b}{3} \right)$$

$$R_2^y = \frac{\cos \phi}{c_0} E_2$$

$$R_2^x = \frac{\sin \phi}{c_0} E_2$$

(62)

$$x > 0: E_2 = \frac{-\omega^2 \cos^3 \phi A^3}{c^2 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos^2 \phi} x^2 (\cos p + 3 \cos 3p) - \frac{\omega \cos^3 \phi A^3 (\cos \phi + \mu \cos \phi^1)}{c (\cos \phi + n \cos \phi^1)^4 \cos^3 \phi} x (\sin p + \sin 3p) + \frac{n \cos^3 \phi A^3 (\cos \phi + \mu \cos \phi^1)}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^5 \cos^3 \phi} \left( \cos p + \frac{\cos 3p}{3} \right)$$

$$R_2^y = \frac{\omega^2 \cos^3 \phi A^3}{c^3 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos \phi} x^2 (\cos p + 3 \cos 3p) -$$

$$- \frac{\omega \cos^3 \phi A^3 (\cos \phi - 2n \cos \phi^1)}{c^2 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^4 \cos^2 \phi} (\sin p + \sin 3p) +$$

$$+ \frac{\cos^3 \phi A^3 (\cos \phi + 4n \cos \phi^3)}{c(\cos \phi + n \cos \phi^3) \cos^3 \phi} (\cos p + \frac{\cos 3p}{3})$$

$$B_2^x = E_2 \frac{\sin \phi^1}{c} \quad (63)$$

voor  $\phi = 0$  en dus  $\phi^1 = 0$  gaan (62) en (63) over in (40) t/m (43).

Hogere-orde benaderingen  $E_m$  kunnen evenals in het geval van loodrechte inval worden berekend uit:

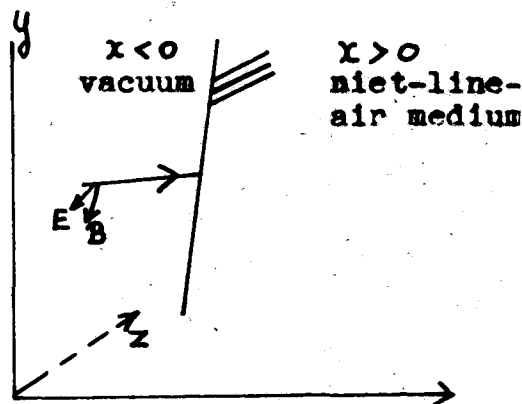
$$\square E_m = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{k=0}^{m-1} E_k E_{m-1-k}$$

met particuliere oplossingen van de vorm:  $E_m = \sum_{n=0}^m x^n F_{m,n}(p)$ , waarvan de termen op dezelfde wijze successievelijk berekend kunnen worden.

## 1. Exacte oplossing van het reflectieprobleem voor loodrechte inval.

### 1.1. Exacte oplossing van de veldvergelijkingen.

We beschouwen een lineair gepolariseerde vlakke golf, die vanuit vacuum loodrecht invalt op een homogeen, isotroop medium, waarin de polarisatie en dus de diëlectrische verplaatsing willekeurige functies van de elektrische veldsterkte zijn. De richting van  $E$  nemen we weer als  $z$ -richting, de voortplantingsrichting van de golf als  $x$ -richting.



$$\vec{E} = (0, 0, E) \quad \text{en} \quad \vec{B} = (0, B, 0).$$

$\vec{D} = D(E)$ ,  $c(E) = (\mu \frac{dD}{dE})^{-1/2}$  wordt de lichtsnelheid, die dus nu een willekeurige functie van  $E$  is.

$c(E)$  is bepaald, als  $D$  als functie van  $E$  gegeven is. In 2. en 3. van dit verslag was deze functie:  $D = \epsilon E(1 + \alpha E)$ .

De Maxwell-vergelijkingen worden in het algemene geval:

$$x < 0: \quad \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$x > 0: \quad \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{c^2(E)} \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

(6)

Eliminatie van  $B$  geeft voor  $x > 0$  een tweede-orde niet-lineaire golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2(E)} \frac{\partial E}{\partial t} \right) = 0.$$

De vergelijkingen (6) zijn dezelfde als de vergelijkingen voor één-dimensionale, isentrope stroming van een samendrukbaar medium<sup>7)</sup>. Deze zijn n.l.:

$$\frac{\partial u}{\partial h} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad \cdot \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial \tau}{\partial h}$$

bij de beschrijving volgens Lagrange,

met  $v$  = snelheid van het medium

$\tau$  = soortelijk volume van het medium (volume/kg)

$h = \int_{x(0,t)}^{x(h,t)} dx$  met  $\zeta$  = soortelijke massa van het medium

$k = \zeta c = \zeta \left( \frac{dv}{d\zeta} \right)^{\frac{1}{2}}$  = acoustische impedantie.

Zoals in <sup>7)</sup> wordt aangetoond zijn de vergelijkingen (64) equivalent met de z.g. karakteristieke vergelijkingen:

$$\left\{ \begin{array}{l} dE = c(E) dB \quad \text{voor} \quad \frac{dx}{dt} = c(E) \\ dE = -c(E) dB \quad \text{voor} \quad \frac{dx}{dt} = -c(E) \end{array} \right. \quad (65)$$

d.w.z. alle oplossingen van (64) voldoen aan (65) en alle oplossingen van (65) voldoen aan (64).

In dit geval kunnen we dit direct uit (64) laten zien. Vermenigvuldiging van de eerste vergelijking van (64) met  $\frac{1}{c(E)}$  en hierbij optellen resp. hiervan aftrekken van de tweede vergelijking (64) geeft:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c(E)} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{c(E)} \frac{\partial E}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{c(E)} \frac{\partial B}{\partial t} \right) = 0 \\ \frac{1}{c(E)} \left( \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{1}{c(E)} \frac{\partial E}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{c(E)} \frac{\partial B}{\partial t} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (66)$$

Aan de eerste vergelijking van (66) wordt identiek voldaan door  $dB = \frac{dE}{c(E)}$ , aan de tweede door  $dB = -\frac{dE}{c(E)}$ .

Beschouw nu die oplossingen van (66) waarvoor geldt:  $dB = -\frac{dE}{c(E)}$ . De eerste vergelijking (66) geeft dan:

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{c(E)} \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (67)$$

dus een niet-lineaire eerste-orde vergelijking voor E.

Deze vergelijking is op te lossen. Algemeen geldt:

$$dE = \frac{\partial E}{\partial t} dt + \frac{\partial E}{\partial x} dx \quad (68)$$

Eliminatie van  $\frac{\partial E}{\partial t}$  uit (67) en (68) geeft:

$$dE = \frac{\partial E}{\partial x} (dx - c(E)dt).$$

Dus  $dE = 0$  d.w.z.  $E = \text{constant}$  voor  $dx - c(E)dt = 0$ , dit is de eerste karakteristieke relatie (65).

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c(E)} \text{ is dus equivalent met (67).}$$

$$\text{Integratie geeft: } t = \frac{x}{c(E)} + f(E)$$

$$\Rightarrow E = F\left(t - \frac{x}{c(E)}\right) \quad (69)$$

hierin is  $F(t)$  de waarde van  $E$  voor  $x = 0$ .

(69) stelt naar rechts lopende golven voor en is dus geschikt om de gebroken golf in een oneindig uitgebreid medium voor te stellen.

Met behulp van (69) en (65) kan nu het reflectieprobleem worden opgelost<sup>3)</sup>.

Algemeen wordt voor  $x < 0$ :

$$E = f_1\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + f_r\left(t + \frac{x}{c_0}\right)$$

$$B = -\frac{1}{c_0} f_1\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + \frac{1}{c_0} f_r\left(t + \frac{x}{c_0}\right).$$

De aansluitvoorwaarde voor  $B$  ( $B$  is continu,  $\mu_{\text{vacuum}} = \mu_{\text{medium}}$ ) geeft de oplossing van het reflectieprobleem:

$$-\frac{1}{c_0} f_1 + \frac{1}{c_0} f_r = \int_0^{f_1 + f_r} -\frac{dE}{c(E)}$$

$$\Rightarrow f_1 - f_r = c_0 \int_0^{f_1 + f_r} \left(\mu \frac{d\mu}{dE}\right)^{\frac{1}{2}} dE. \quad (70)$$

4.2. Ontwikkeling van de exacte oplossing naar machten van  $\alpha$  voor het geval  $\bar{n} = \epsilon \bar{E} (1 + \alpha \bar{E})$ .

$$\text{In dit geval is } \left\{c(E)\right\}^{-2} = \frac{1}{c^2} (1 + 2\alpha E).$$

$$\Rightarrow \left\{c(E)\right\}^{-1} = \frac{1}{c} \left(1 + \alpha E - \frac{\alpha^2}{2} E^2 + O(\alpha^3)\right).$$

$$E = F\left(t - \frac{x}{c(E)}\right) = F\left[t - \frac{x}{c} - \frac{\alpha x}{c} E + \frac{\alpha^2 x}{2c} E^2 + O(\alpha^3)\right] =$$



$$= F_0 \left\{ t - \frac{x}{c} - \frac{\alpha x}{c} E + \frac{\alpha^2 x}{2c} E^2 + O(\alpha^3) \right\} + \alpha F_1 \{ \dots \} + \alpha^2 F_2 \{ \dots \} + \dots \quad (71)$$

In (71) komt dus tot uiting dat voor  $x = 0$ ,  $E$  de gedaante heeft:

$$E = F_0(t) + \alpha F_1(t) + \alpha^2 F_2(t) + O(\alpha^3).$$

Voor  $x > 0$  wordt ieder van deze functies van de vorm:

$$F_m = F_m \left( t - \frac{x}{c} - \frac{\alpha x}{c} E + \frac{\alpha^2 x}{2c} E^2 + O(\alpha^3) \right).$$

De functies  $F_m(t)$  kunnen bepaald worden uit de oplossing van het reflectieprobleem (70). We beperken ons tot termen tot en met  $O(\alpha^2)$ . Er komt:

$$\begin{aligned} f_1 - f_r &= \frac{c_0}{c} \int_0^{f_1 + f_r} \left( 1 + \alpha E - \frac{\alpha^2}{2} E^2 \right) dE = \\ &= n(f_1 + f_r) + \frac{\alpha n}{2} (f_1 + f_r)^2 - \frac{\alpha^2 n}{6} (f_1 + f_r)^3. \end{aligned} \quad (72)$$

In de 0<sup>de</sup>-orde is:  $f_1 - f_r = n(f_1 + f_r) \Rightarrow f_r = \frac{1-n}{1+n} f_1$ .

Stel dus:  $f_r = \frac{1-n}{1+n} f_1 + \alpha F_1 + \alpha^2 F_2$ .

Dan wordt:  $f_1 + f_r = \frac{2}{1+n} f_1 + \alpha F_1 + \alpha^2 F_2$ , dus  $F_0 = \frac{2}{1+n} f_1$  (73)

$$\frac{\alpha n}{2} (f_1 + f_r)^2 = \frac{2n\alpha}{(1+n)^2} f_1^2 + \frac{2n\alpha^2 f_1 F_1}{1+n}$$

$$\frac{\alpha^2 n}{6} (f_1 + f_r)^3 = \frac{4}{3} \frac{n\alpha^2}{(1+n)^3} f_1^3.$$

Substitutie van deze uitdrukkingen in (72) geeft:

$$O(\alpha) : 0 = (1+n)F_1 + \frac{2n}{(1+n)^2} f_1 \quad F_1 = \frac{-2n}{(1+n)^3} f_1^2 \quad (74)$$

$$O(\alpha^2) : 0 = (1+n)F_2 + \frac{2n}{1+n} f_1 F_1 - \frac{4}{3} \frac{n}{(1+n)^3} f_1^3$$

$$F_2 = \frac{4}{3} \frac{n(4n+1)}{(n+1)^5} f_1^3. \quad (75)$$

Met  $f_1 = A \cos \omega(t - \frac{x}{c_0})$  wordt:

$$F_1 = \frac{-2nA^2}{(1+n)^3} \cos^2 \omega(t - \frac{x}{c}), \text{ dit is de tweede term van (31) en}$$

$$F_2 = \frac{n(4n+1)}{3(n+1)^5} A^3 \cos^3 \omega(t - \frac{x}{c}) + \frac{n(4n+1)A^3}{(n+1)^5} \cos \omega(t - \frac{x}{c}), \text{ dit is de}$$

laatste term van (42).

Nu  $F_1$  en  $F_2$  bepaald zijn, kan voor  $x > 0$   $E$  berekend worden uit een Taylor-ontwikkeling:

$$E = E(t - \frac{x}{c(E)}) = E_0 + \alpha E_1 + \alpha^2 E_2 + \dots = (E)_{\alpha=0} + \alpha (\frac{\partial E}{\partial \alpha})_{\alpha=0} + \frac{\alpha^2}{2} (\frac{\partial^2 E}{\partial \alpha^2})_{\alpha=0} + \dots$$

waarin  $E$  gegeven wordt door (71).

$$(E)_{\alpha=0} = (F_0)_{\alpha=0} = F_0(p) = \frac{2}{1+n} A \cos p$$

$$\text{met } p = \omega(t - \frac{x}{c}).$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \left(\frac{\partial F_0}{\partial \alpha} + F_1\right)_{\alpha=0}. \quad (76)$$

Tot en met termen  $O(\alpha^2)$  is  $F_0$ :

$$F_0(t - \frac{x}{c} - \frac{\alpha x}{c} E + \frac{\alpha^2 x}{2c} E^2) = F_0(t - \frac{x}{c} - \frac{\alpha x}{c} F_1 + \frac{\alpha^2 x}{c} F_1 + \frac{\alpha^2 x}{2c} F_0^2).$$

Dus tot en met termen  $O(\alpha)$  is  $\frac{\partial F_0}{\partial \alpha}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial \alpha} &= \left(-\frac{x}{c} F_0 - \frac{\alpha x}{c} \frac{\partial F_0}{\partial \alpha} - \frac{2\alpha x}{c} F_1 + \frac{\alpha x}{c} F_0^2\right) F_0^1 \\ \Rightarrow \frac{\partial F_0}{\partial \alpha} &= \frac{-\frac{x}{c} F_0 F_0^1 - \frac{2\alpha x}{c} F_1 F_0^1 + \frac{\alpha x}{c} F_0^2 F_0^1}{1 + \frac{\alpha x}{c} F_0^1}. \end{aligned}$$

Substitutie in (76) geeft:

$$E_1 = -\frac{x}{c} F_0(p) F_0^1(p) + F_1(p).$$

Met (73) en (74) wordt dit:

$$E_1 = -\frac{x}{c} \frac{2}{1+n} A \cos p \cdot \frac{2}{1+n} A \omega \sin p - \frac{2n}{(1+n)^3} \cos^2 p =$$

$$= \frac{2\omega A^2}{(n+1)^2 c} x \sin 2p - \frac{2nA^2}{(n+1)^3} \cos^2 p.$$

dit is (31).

Vervolgens krijgen we voor  $E_2$ :

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} = 2E_2 = \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} + 2\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} + 2(F_2)_{\alpha=0}. \quad (77)$$

$\frac{\partial^2 F_0}{\partial \alpha^2}$  kunnen we in nulde-orde benadering berekenen uit de eerste-orde benadering voor  $\frac{\partial F_0}{\partial \alpha}$

$$\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} = \left(-\frac{x}{c} F_0 \frac{\partial F_0^1}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} + \left(-\frac{x}{c} F_0^1 \frac{\partial F_0}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} -$$

$$- \left(\frac{2x}{c} F_1 F_0^1 - \frac{x}{c} F_0^2 F_0^1 - \frac{x^2}{c^2} F_0 F_0^1{}^2\right)_{\alpha=0} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{c^2} F_0^2 F_0^1{}^2 + \frac{2x^2}{c^2} F_0^1{}^2 F_0 - \frac{2x}{c} F_1 F_0^1 + \frac{x}{c} F_0^2 F_0^1\right)_{\alpha=0}.$$

Verder wordt  $\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}$  analoog aan  $\left(\frac{\partial F_0}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}$ :

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \left(\frac{-x}{c} F_1^1 F_0\right)_{\alpha=0}.$$

Dus wordt:  $E_2 = \left(\frac{x^2}{c^2} F_0^2 F_0^1{}^2 + \frac{x^2}{c^2} F_0^1{}^2 F_0 + \frac{x}{2c} F_0^2 F_0^1 - \frac{x}{c} (F_1 F_0)^1 + F_2\right)_{\alpha=0}$ .

$F_2$  is de laatste term van (12), de term met  $x^2$  in  $E_2$  wordt met (73) t/m (75):

$$\frac{\omega^2}{c^2} x^2 \frac{8}{(n+1)^3} \sin^2 p \cos p - \frac{\omega^2}{2c^2} x^2 \frac{8}{(n+1)^3} \cos^2 p \cos p =$$

$$= \frac{\omega^2 x^2}{c^2} \frac{8}{(n+1)^3} \cos p - \frac{3\omega^2 x^2}{2c^2} \frac{8}{(n+1)^3} \cos^3 p =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\omega^2 x^2}{c^2} \frac{8}{(n+1)^3} \cos p - \frac{3\omega^2 x^2}{c^2} (\cos 3p + 3\cos p) = \\
 &= -\frac{\omega^2 x^2}{c^2 (n+1)^3} \cos p - \frac{3\omega^2 x^2}{c^2 (n+1)^3} \cos 3p.
 \end{aligned}$$

Dit is de eerste term van (12).

De term met  $x$  in  $E_2$  wordt:

$$\begin{aligned}
 &\frac{x}{2c} \left( \frac{2}{1+n} A \cos p \right)^2 \left( \frac{-2\omega A}{1+n} \sin p \right) - \frac{x}{c} \frac{d}{dp} \left\{ \left( \frac{2A}{1+n} \cos p \right) \left( \frac{-2nA^2}{(1+n)^3} \cos^2 p \right) \right\} = \\
 &= \frac{-4xA^3}{(1+n)^3 c} \cos^2 p \sin p - \frac{12nA^3 \omega x}{(1+n)^4 c} \cos^2 p \sin p = \\
 &= \frac{-4n\omega A^3}{(1+n)^4 c} x (\sin p - \sin^3 p) (1+n+3n) = \frac{-n(4n+1)\omega A^3}{(1+n)^4 c} x (\sin p + \sin 3p).
 \end{aligned}$$

Dit is de tweede term van (12).

## 5. Exacte oplossing van het reflectieprobleem voor scheve inval.

### 5.1. Exacte oplossing van de veldvergelijkingen.

We hebben dus nu dezelfde opstelling als bij 3. De lichtsnelheid  $c(E)$  is nu echter een willekeurige functie van  $E$  voor  $x > 0$ .

Voor  $x < 0$  zijn de veldvergelijkingen gegeven door (46).

Voor  $x > 0$  komt er:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial B^y}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial B^x}{\partial t} = 0 \\ \frac{B^y}{x} - \frac{B^x}{y} - \frac{1}{c^2(E)} \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad (78)$$

Door eliminatie van  $B^x$  en  $B^y$  ontstaat de niet-lineaire tweede-orde golfvergelijking voor  $E$ :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2(E)} \frac{\partial E}{\partial t} \right) = 0.$$

$E$ ,  $B^x$  en  $B^y$  zijn volgens (78) dus functies van  $x$ ,  $y$  en  $t$ .

Aan het grensvlak,  $x = 0$ , zijn de invallende  $E$  en  $B$  functies van  $(t - \frac{y \sin \phi}{c_0})$ .

Omdat voor elke  $y$  aan de aansluitvoorwaarde voldaan moet worden zullen ook de doorgaande en gereflecteerde  $E$  en  $B$  aan het grensvlak functies van  $(t - \frac{y \sin \phi}{c_0}) = (t - \frac{ny \sin \phi^1}{c_0}) = (t - \frac{y \sin \phi^1}{c})$  zijn.

De teruggekaatste lineaire golven worden dus functies van  $(t - \frac{y \sin \phi - x \cos \phi}{c_0})$ .

Voor de doorgaande golven geldt dat deze voor  $x > 0$  functies van

$(t - \frac{y \sin \phi}{c_0})$  en  $x$  worden, zoals ook blijkt uit de eerste- en tweede-orde benaderingen volgens 3.

Alleen de afstand  $x$  vanaf het grensvlak heeft dus invloed op de amplitude van de niet-lineaire golf,  $y$  en  $t$  spelen hierbij geen rol, wat fysisch noodzakelijk is omdat deze volkomen willekeurig zijn.

Beschouwen we de invallende golf als een bundel fotonen, met bepaalde energie en impuls, dan komt de wet van behoud van energie overeen met de onafhankelijkheid van de intensiteit van de doorgelaten golf met betrekking tot

Dat  $v$  geen invloed heeft op de doorgaande intensiteit komt overeen met het feit dat aan het oneindig uitgebreide grensvlak geen tangentiële impuls kan worden overgedragen.

Mit de tweede veldvergelijking (78) zien we, dat dan moet gelden:

$$B^x = \frac{\sin \phi}{c_0} E . . .$$

De vergelijkingen (78) gaan dan over in:

$$\frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial B^v}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{\sin \phi}{c_0} \frac{\partial B^v}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B^v}{\partial x} - \frac{\sin \phi}{c_0} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{c^2(E)} \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial B^v}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B^v}{\partial x} - \left( \frac{1}{c^2(E)} - \frac{\sin^2 \phi}{c_0^2} \right) \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

(79)

(79) is geheel analoog aan (61) voor de loodrechte inval. We krijgen nu dus oplossingen met

$$dB + \left( \frac{1}{c^2(E)} - \frac{\sin^2 \phi}{c_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} dE = 0 \quad \text{i.d.v.} \quad dE + c(E) dB = 0.$$

De impliciete oplossing voor  $E$  wordt:

$$E = F \left\{ t - \frac{v \sin \phi}{c_0} - \left( \frac{1}{c^2(E)} - \frac{\sin^2 \phi}{c_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} x \right\} \quad (80)$$

de aansluitvoorwaarden zijn, met  $f_1 \left( t - \frac{v \sin \phi + x \cos \phi}{c_0} \right)$  en  $f_r \left( t - \frac{v \sin \phi - x \cos \phi}{c_0} \right)$ ,

$$E = f_1 + f_r, \quad B^v = \frac{-\cos \phi}{c_0} f_1 + \frac{\cos \phi}{c_0} f_r, \quad B^x = \frac{E \sin \phi}{c_0} = \frac{\sin \phi}{c_0} f_1 + \frac{\sin \phi}{c_0} f_r.$$

De eerste en laatste zijn dus identiek, de tweede voorwaarde geeft de oplossing van het reflectieprobleem:

$$R^y = - \int_0^{f_1 + f_r} \left( \frac{1}{c^2(E)} - \frac{\sin^2 \phi}{c_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} dE = - \frac{\cos \phi}{c_0} f_1 + \frac{\cos \phi}{c_0} f_r$$

dus met  $\left\{ c(E) \right\}^{-2} = \mu \frac{dD}{dE}$  :

$$f_1 - f_r = \frac{c_0}{\cos \phi} \int_0^{f_1 + f_r} \left( \mu \frac{dD}{dE} - \frac{\sin^2 \phi}{c_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} dE. \quad (81)$$

5.2. Ontwikkeling van de exacte oplossing voor scheve inval naar machten van  $\alpha$  voor het geval  $\tilde{D} = \epsilon \tilde{E}(1 + \alpha \tilde{E})$ .

$$D = \epsilon E(1 + \alpha E) \Rightarrow \left\{ c(E) \right\}^{-2} = \frac{1}{c^2} (1 + 2\alpha E).$$

(80) geeft:

$$\begin{aligned} E &= F \left\{ t - \frac{v \sin \phi}{c_0} - x \left( \frac{1}{c^2} (1 + 2\alpha E) - \frac{\sin^2 \phi}{c_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} = \\ &= F \left\{ t - \frac{v \sin \phi}{c_0} - x \left( \frac{\cos^2 \phi}{c^2} + \alpha \frac{2}{c^2} E \right)^{\frac{1}{2}} \right\} = \\ &= F \left\{ t - \frac{v \sin \phi}{c_0} - \frac{x \cos \phi}{c} \left( 1 + \frac{2\alpha}{\cos^2 \phi} E \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (82)$$

(82) gaan we ontwikkelen naar  $\alpha$  tot en met termen  $O(\alpha^2)$  en vergelijken met de in 3. gevonden benaderde oplossingen.

$$\begin{aligned} E &= E_0 \left\{ t - \frac{v \sin \phi}{c_0} - \frac{x \cos \phi}{c} \left( 1 + \frac{\alpha}{\cos^2 \phi} E - \frac{\alpha^2}{2 \cos^4 \phi} E^2 + O(\alpha^3) \right) \right\} + \\ &+ \alpha E_1 \left\{ \dots \right\} + \alpha^2 E_2 + \dots = (E)_{\alpha=0} + \alpha \left( \frac{\partial E}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} + \frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha^2} \right)_{\alpha=0} + \dots \end{aligned} \quad (83)$$

$$(E)_{\alpha=0} = E_0(p), (E_1)_{\alpha=0} = E_1(p) \text{ en } (E_2)_{\alpha=0} = E_2(p)$$

met  $p = \omega(t - \frac{x \cos \phi^1 + y \sin \phi^1}{c})$  worden bepaald uit de oplossing van het reflectieprobleem.

$$(81) \text{ wordt met } u \frac{dD}{dR} = \left\{ c(R) \right\}^{-2} = \frac{1}{c^2} (1 + 2\alpha R):$$

$$\begin{aligned} r_1 - r_r &= \frac{c_0}{\cos \phi^1} \int_0^{r_1 + r_r} \left\{ \frac{1}{c^2} (1 + 2\alpha R) - \frac{\sin^2 \phi^1}{c_0^2} \right\}^{\frac{1}{2}} dR = \\ &= \frac{c_0}{\cos \phi} \int_0^{r_1 + r_r} \left( \frac{\cos^2 \phi^1}{c^2} + 2\alpha R \right) dR = \frac{\cos \phi^1}{\cos \phi} \int_0^{r_1 + r_r} \left( 1 + \frac{2\alpha}{\cos^2 \phi^1} R \right) dR = \\ &= \frac{n \cos \phi^1}{\cos \phi} \int_0^{r_1 + r_r} (1 + \frac{\alpha}{\cos^2 \phi^1} R - \frac{\alpha^2}{2 \cos^4 \phi^1} R^2 + \dots) dR. \end{aligned}$$

$$\text{Er komt: } O(\alpha^0): r_1 + r_r = \frac{n \cos \phi^1}{\cos \phi} (r_1 + r_r)$$

$$\Rightarrow r_r = \frac{\cos \phi - n \cos \phi^1}{\cos \phi + n \cos \phi^1} r_1, \text{ stel } r_r = \frac{\cos \phi - n \cos \phi^1}{\cos \phi + n \cos \phi^1} r_1 + \alpha g + \alpha^2 h$$

met  $g$  en  $h$  willekeurige functies van  $p = \omega(t - \frac{y \sin \phi - x \cos \phi}{c_0})$ .

$$r_r + r_1 = \frac{2 \cos \phi}{\cos \phi + n \cos \phi^1} r_1 + \alpha g + \alpha^2 h.$$

$$O(\alpha): -g = \frac{n \cos \phi^1}{\cos \phi} g + \frac{n \cos \phi^1}{2 \cos \phi \cos^2 \phi^1} \cdot \frac{4 \cos^2 \phi}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2} r_1^2$$

$$\Rightarrow g = \frac{-2n \cos^2 \phi}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 \cos \phi^1} r_1^2 = \frac{-2n \cos^2 \phi}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 \cos \phi} A^2 \cos^2 p \quad (83)$$

voor  $r_1 = A \cos p$ .



$$\begin{aligned}
 O(\alpha^2): -h &= \frac{n \cos \phi^1}{\cos \phi} h + \frac{n \cos \phi^1}{2 \cos \phi \cos^2 \phi^1} \cdot 2 \cdot \frac{2 \cos \phi}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)} \cdot r_1^3 - \\
 &\quad - \frac{n \cos \phi^1}{2 \cos^4 \phi^1 \cos \phi} \cdot \frac{8 \cos^3 \phi}{3(\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos^3 \phi} r_1^3. \\
 \Rightarrow h &= \frac{n \cos^3 \phi (\cos \phi + n \cos \phi^1)}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^5 \cos^3 \phi} A^3 (\cos p + \frac{\cos 3p}{3}) \text{ voor } r_1 = A \cos a \quad (84)
 \end{aligned}$$

De ontwikkeling van  $E$  geeft nu:

$$E_0 = (E)_{\alpha=0} = (E_0)_{\alpha=0} = \frac{2 \cos \phi}{\cos \phi + n \cos \phi^1} A \cos p \quad (85)$$

klont met lineaire theorie,

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \frac{\partial E_0}{\partial \alpha} + E_1 + \alpha \frac{\partial E_1}{\partial \alpha} + 2\alpha E_2 + O(\alpha^2)$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \left(\frac{\partial E_0}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} + (E_1)_{\alpha=0}.$$

$\frac{\partial E_0}{\partial \alpha}$  volgt uit (83):

$$\frac{\partial E_0}{\partial \alpha} = \left( \frac{-x E}{c_0 \cos \phi} - \frac{\alpha x \frac{\partial E}{\partial \alpha}}{c_0 \cos \phi^1} + \frac{\alpha x E^2}{c \cos^3 \phi^1} + O(\alpha^3) \right) E_0^1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial E_0}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \frac{-x}{c \cos \phi} (E_0 E_0^1)_{\alpha=0} = \frac{-x}{c \cos \phi} \cdot \frac{2 \cos \phi}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)} A \cos p -$$

$$\frac{-2 \omega \cos \phi}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)} \sin p$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \left(\frac{\partial E_0}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} + (E_1)_{\alpha=0} = \frac{2 \omega A^2 \cos^2 \phi}{c (\cos \phi + n \cos \phi^1)^2 \cos \phi^1} x \sin 2p -$$

$$- \frac{2n \cos^2 \phi A^2}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos \phi^1} \cos^2 p.$$

Dit is (57).

Nu volgt

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} = \left(\frac{\partial^2 R_0}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} + 2 \left(\frac{\partial R_1}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} + 2(R_2)_{\alpha=0}.$$

$$\frac{\partial R_0}{\partial \alpha} = \frac{-xR_0^1 R_0 - \frac{\alpha x}{c \cos \phi^1} R_1 R_0^1 + \frac{\alpha x}{c \cos^3 \phi^1} E^2 E_0^1}{1 + \alpha \frac{xR_0^1}{c \cos \phi^1}}$$

$$\left(\frac{\partial^2 R_0}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} = \left(\frac{2x^2 E_0^1 E_0^2}{c^2 \cos^2 \phi^1} - \frac{2xR_0^1 R_1}{c \cos \phi^1} + \frac{x^2 E_0^2 R_0^{11}}{c^2 \cos^2 \phi^1} + \frac{x}{c \cos^3 \phi^1} E_0^1 R_0^2\right)_{\alpha=0}$$

$$\left(\frac{\partial R_1}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \left(\frac{-xR_1^1 R_0}{c \cos \phi^1}\right)_{\alpha=0}.$$

Dus wordt tenslotte:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} = \left\{ x^2 \left( \frac{E_0^1 E_0^2}{c^2 \cos^2 \phi^1} + \frac{R_0^2 R_0^{11}}{2c^2 \cos^2 \phi^1} \right) + x \left( \frac{E_0^2 E_0^1}{2c \cos^3 \phi^1} - \frac{(E_0 E_1)^1}{c \cos \phi^1} \right) + E_2 \right\}_{\alpha=0}.$$

Substitutie van  $E_0$ ,  $E_1$  en  $E_2$  volgens (83) t/m (85) geeft dan voor de tweede-orde doorgaande golf:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \phi^1} \left\{ \frac{2 \cos \phi}{\cos \phi + n \cos \phi^1} \omega^2 \left( \frac{2 \cos \phi}{\cos \phi + n \cos \phi^1} \right)^2 A^3 \cos p \sin^2 p - \right. \\ & \left. - \frac{2 \cos^2 \phi}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^2} \left( \frac{2 \cos \phi}{\cos \phi + n \cos \phi^1} \right) A^3 \cos^3 p \right\} + \\ & + \frac{x}{c \cos \phi^1} \left\{ \left( \frac{4 \cos^2 \phi}{2 \cos^2 \phi^1 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^2} \right) \left( \frac{-2 \cos \phi \omega A^3}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)} \cos^2 p \sin p \right) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{2 \cos \phi}{\cos \phi + n \cos \phi^1} \right) \left( \frac{2n \cos^2 \phi A^3 \omega^3}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos \phi^1} \right) \cos^2 p \sin p \right\} + (E_2)_{\alpha=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\omega^2 A^3 \cos^3 \phi}{c^2 (\cos \phi + n \cos \phi^1)^3 \cos^2 \phi} x^2 (\cos p + 3 \cos 3p) - \\
&- \frac{\omega A^3 \cos^3 \phi (\cos \phi + 4n \cos \phi^1)}{c (\cos \phi + n \cos \phi^1)^4 \cos^3 \phi} x (\sin p + \sin 3p) + \\
&+ \frac{n \cos^3 \phi (\cos \phi + 4n \cos \phi^1)}{(\cos \phi + n \cos \phi^1)^5 \cos^3 \phi} A^3 (\cos p + \frac{\cos 3p}{3}).
\end{aligned}$$

Das ist (63).

## 6. Niet-lineair tralie.

Bij de hiervoor behandelde gevallen van terugkaatsing en breking aan een grensvlak tussen vacuum en een niet-lineair medium hadden de door de niet-lineariteit opgewekte harmonischen dezelfde voortplantingsrichting als de teruggekaatste resp. gebroken primaire golf.

Voor het gereflecteerde licht is dit vanzelfsprekend, aangezien in vacuum geen dispersie is. In het medium werd in het hier gebruikte model de dispersie verwaarloosd.

Om bijv. een lichtgolf met de dubbele frequentie in de gereflecteerde straling te scheiden van de in dezelfde richting gereflecteerde straling met de oorspronkelijke frequentie van het invallende licht, zou men gebruik kunnen maken van een buigingsrooster (tralie). De verschillende frequenties, die in de opvallende straling aanwezig zijn worden door een tralie afgebozen als evenwijdige bundels met verschillende voortplantingsrichting. Met behulp van een lens kunnen deze dan op verschillende punten van een opvangscherm worden geconcentreerd.

De dispersie (kleurschifting) bij een tralie heeft een andere betekenis, dan de dispersie in een medium.

In een medium is de fasesnelheid van de lichtgolven afhankelijk van de frequentie. Bij buiging aan een tralie is de dispersie direct afhankelijk van de golflengte en niet zoals bij transmissie door een medium via de frequentieafhankelijkheid van de brekingsindex van het gebruikte materiaal.

Laten we nu monochromatisch licht van voldoende grote intensiteit op een dergelijk tralie invallen dan kunnen we verwachten dat de hierbij ontstane harmonischen verschillende voortplantingsrichtingen zullen hebben en dus op verschillende plaatsen op het opvangscherm maxima en minima zullen vertonen. Een dergelijk niet-lineair tralie biedt dus een mogelijkheid om kleurschifting t.g.v. niet-lineaire effecten te berekenen zonder rekening te moeten houden met de complicaties die in het model

voor terugkaatsing en breking veroorzaakt worden als men daarbij ook de dispersie in het medium in rekening brengt. Om het buigingspatroon van een tralie te berekenen stelt men het tralie voor als een groot aantal evenwijdige spleten op onderling gelijke afstand. Het buigingspatroon ontstaat door interferentie van de buigingspatronen van één spleet. Dit interferentiepatroon van één spleet van eindige breedte kan niet exact worden opgelost met behulp van de vergelijkingen van Maxwell en de randvoorwaarden. Men maakt daarom gebruik van het principe van Huygens-Kirchhoff, d.w.z. men denkt zich elk punt van een dergelijke spleet als bron van sferische lichtgolven, die door interferentie samen het buigingsbeeld van de gehele spleet geven. Daarbij neemt men aan, dat de veldsterkten in de punten van de spleten dezelfde zijn als bij afwezigheid van het tralie en dat deze gelijk aan nul zijn op die plaatsen, waar volgens de geometrische optica schaduw is.

Voor de berekening van het buigingspatroon van een niet-lineair tralie werd hier een sterk vereenvoudigd tralie-model gebruikt, waarbij het mogelijk is direct de Maxwell-vergelijking<sup>n</sup> met randvoorwaarden op te lossen.

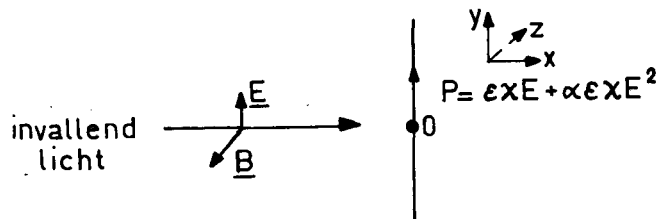
Hierbij denken we het tralie te bestaan uit een groot aantal evenwijdige draden. We denken ons de draden als oneindig dun, d.w.z. we stellen de polarisatie per eenheid van hoogte voor door een  $\delta$ -functie.

De polarisatie per eenheid van volume blijft dan eindig, hiervoor kiezen we de waarde, die past bij de elektrische veldsterkte die het invallende licht ter plaatse van de draad zou hebben als er geen tralie was.

Eerste bekijken we de verstrooiing aan één zo'n oneindig dunne draad. We beschouwen het geval dat de invallende vlakke golf loodrecht op het tralie invalt, zodanig dat de elektrische vector van het (lineair gepolariseerde) licht in de richting van de draden op het tralie (draden) ligt.

De voortplantingsrichting van de invallende golf nemen we als x-richting.

de richting van de draden als v-richting.



De invallende golf heeft als elektrische en magnetische veldsterkte:

$$E = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c_0} \right), \quad B = -\frac{E_0}{c_0} \cos \omega t.$$

$B$  heeft dan de  $z$ -richting.

In de draad is, als we de oorsprong in de draad kiezen:

$$E = E_0 \cos \omega t.$$

De polarisatie in de draad wordt dan:

$$P = \epsilon X E (1 + \alpha E) = \epsilon X E_0 \cos \omega t + \alpha \epsilon X_0^2 \cos^2 \omega t.$$

Hiervoor is nodig een statisch electrisch veld in de lengterichting van de draad, of het ontbreken van een inversiecentrum in deze richting, van het materiaal waaruit de draad bestaat.

Als golfvergelijking voor de verstrooide golven krijgen we nu:

$$\Delta E - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \text{buiten de draad, } r > 0.$$

$$\Delta E - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \text{voor } \frac{\partial E_0}{c_0^2} \frac{\partial^2 \cos \omega t}{\partial t^2} + \frac{\alpha X E_0^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 (\cos \omega t)^2}{\partial t^2} \quad \text{voor } r = 0.$$

Dit kunnen we schrijven als:

$$\Delta E - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \left( -\frac{\omega^2 X E_0}{c_0^2} \cos \omega t - \frac{2\omega^2 \alpha X E_0^2}{c_0^2} \cos 2\omega t \right) \delta(r)$$

met  $\delta(r) = 0$  voor  $r > 0$ ,  $\delta(r) = \infty$  voor  $r = 0$  en  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r) dr = 1$ .

Het probleem is cylindersymmetrisch.

We zoeken oplossingen van de vorm:

$$E = E_1 \sin \omega t + E_2 \cos \omega t + E_3 \sin 2\omega t + E_4 \cos 2\omega t.$$

We bekijken de termen met  $\omega t$ , voor die met  $2\omega t$  zijn op een constante na de vergelijkingen dezelfde:

$$\Delta E - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \text{const. } \delta(r) \cdot \cos \omega t.$$

Er moet dus gelden:

$$\Delta E_1 - \frac{\omega^2}{c_0^2} E_1 = 0 \quad \text{en} \quad \Delta E_2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} E_2 = \text{const. } \delta(r).$$

De cylindersymmetrische oplossingen van deze vergelijkingen zijn lineaire combinaties van nulde-orde Besselfuncties van de eerste en tweede soort,

$J_0(kr)$  en  $Y_0(kr)$ , met  $k = \frac{\omega}{c_0}$ .

Voor  $E_1$  moeten we nemen:  $E_1 = C_1 J_0(kr)$ , deze functie heeft geen singulariteit. Voor  $E_2$  moeten we nemen:  $E_2 = C_2 Y_0(kr)$ , deze functie heeft een singulariteit in 0.

De randvoorwaarde is, dat alleen naar buiten gaande verstrooide straling optreedt. Op grote afstand van de draden wordt  $J_0(kr) \sim \frac{\cos kr}{r}$  en

$$Y_0(kr) \sim \frac{\sin kr}{r}.$$

Uit  $E = E_1 \sin \omega t + E_2 \cos \omega t$  zien we, dat  $C_1 = -C_2$  moet zijn, dan wordt  $E \sim \frac{\sin(kr - \omega t)}{r}$ .

$C_2$  is te bepalen uit de singulariteit van  $Y_0(kr)$ . Voor  $r \ll 1$  wordt

$$Y_0(kr) \sim \frac{2}{\pi} \ln r.$$

Door integratie van de vergelijking voor  $E_2$  over een cirkeltje om 0 krijgen we:

$$\iint_0 \Delta E_2 dO = \int_s r \operatorname{grad}_n E_2 dS = \frac{dE_2}{dr} \cdot 2\pi r = \operatorname{const.} \iint_0 \delta(r) dO = \operatorname{const.}$$

$\iint_0 k^2 E dO \ll \iint_0 \Delta E dO$  wegens de logarithmische singulariteit van  $E_2$ .

$$\Rightarrow \frac{dE_2}{dr} \approx \frac{\operatorname{const}}{2\pi r} \Rightarrow \text{voor } r \rightarrow 0 \text{ is } E_2 \approx \frac{\operatorname{const}}{2\pi} \quad kr \Rightarrow \frac{\operatorname{const}}{4} Y_0(kr)$$

is de oplossing van  $\Delta E + k^2 E = \operatorname{const.} \delta(r)$ .

Het deel van  $E$ , dat  $\omega t$  bevat wordt dan:

$$E = + \frac{\omega^2 \chi E_0}{4c_0^2} J_0(kr) \sin \omega t - \frac{\omega^2 \chi E_0}{4c_0^2} Y_0(kr) \cos \omega t$$

voor grote  $r$  wordt dit:

$$E = + \frac{\omega^2 \chi E_0}{4c_0^2} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin(kr - \omega t - \frac{1}{4} \pi).$$

De totale verstrooide golf wordt:

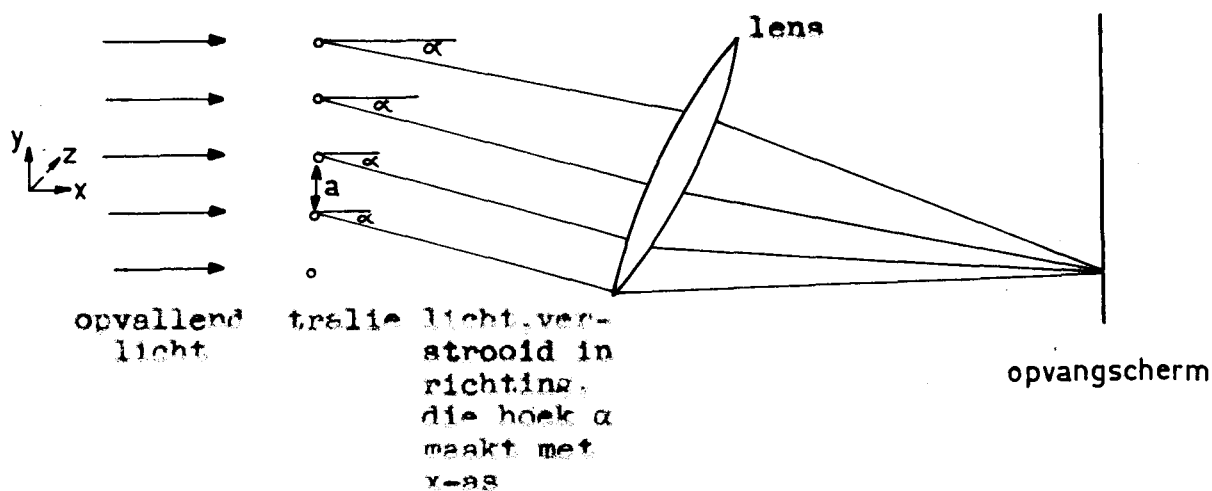
$$E = \frac{\omega^2 \chi E_0}{4c_0^2} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin(kr - \omega t - \frac{1}{4} \pi) + \frac{\omega^2 \chi E_0^2}{2c_0^2} \sqrt{\frac{1}{\pi kr}} \sin(2kr - 2\omega t - \frac{1}{4} \pi).$$

Hebben we nu meerdere draden op onderling gelijke afstand  $a$  loodrecht op de invalrichting van de golf geplaatst, dan krijgen we een buigingspatroon door interferentie van de verstrooide golven.

We veronderstellen, dat de onderlinge interactie der draden verwaarloosd mag worden. Dit mag als de afstand der draden groot is t.o.v. hun diameter.



Model van doorlatend tralie: (reflecterend tralie is geheel analoog)



De verstrooide golven, die op één punt van het opvangscherm samenkomen versterken elkaar als  $a \sin \alpha = n\lambda$ .  $n =$  geheel getal.

Voor de verstrooide primaire lichtgolven wordt dit:

$$\text{maxima bij: } a \sin \alpha = 0, \frac{2\pi}{\omega}, \frac{4\pi}{\omega}, \frac{6\pi}{\omega} \dots$$

$$\text{minima bij: } a \sin \alpha = \frac{\pi}{\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}, \frac{2\pi}{\omega} \dots$$

voor de ontstane harmonische met frequentie  $2\omega$ :

$$\text{maxima bij: } a \sin \alpha = 0, \frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega} \dots$$

$$\text{minima bij: } a \sin \alpha = \frac{\pi}{2\omega}, \frac{3\pi}{\omega} \dots$$

Dus het 1ste-orde maximum voor  $2\omega$  ligt op dezelfde plaats als het 1ste-orde minimum voor  $\omega$ .

Bij oneindig veel draden zou de intensiteit moeten worden berekend uit:

$$I = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sin^2 r}{r}, \text{ deze reeks is niet convergent. in dit model moeten we ons}$$

beperken tot een beschrijving van de buiging door een eindig aantal draden.