

De wiskundige leest in bedrijf

Citation for published version (APA):

Schilders, W. H. A. (2003). *De wiskundige leest in bedrijf*. Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/2003

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

AQA
2003
SCH

U/e

technische universiteit eindhoven

Intreerede
24 oktober 2003

prof.dr. W.H.A. Schilders



de wiskundige leest in bedrijf

/ faculteit wiskunde en informatica

Intreerede

Uitgesproken op 24 oktober 2003
aan de Technische Universiteit Eindhoven

de wiskundige leest in bedrijf

prof.dr. W.H.A. Schilders

Inleiding

Mijnheer de Rector Magnificus, beste collega's, familie en vrienden, dames en heren,

Een van de meest gerenommeerde wiskundigen van de twintigste eeuw, G.H. Hardy, getaltheoreticus en onder collega's bekend als 'een echte wiskundige', schreef in zijn essay 'A Mathematician's Apology' [1]:

“Een van de eerste taken van een hoogleraar is, om het belang van zijn vakgebied enigszins te overdrijven en tevens zijn eigen rol hierin.”

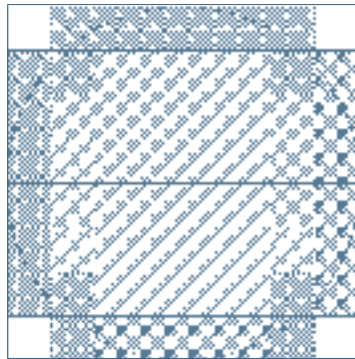
Graag maak ik van de gelegenheid gebruik om in deze rede het eerste te doen. Ik hoop, dat u de rede ook in dit licht wilt zien. Het tweede deel van Hardy's advies zal ik zo veel als mogelijk achterwege laten, aangezien er voldoende spreekwoorden en gezegden bestaan die bescheidenheid tot onderwerp hebben.

In deze rede wil ik het belang onderstrepen van mijn vakgebied, 'Numerieke Wiskunde voor de Industrie', en u een idee geven van de werkwijze die mij voor ogen staat.

Numerieke wiskunde is een relatief jonge tak van wiskunde, de belangrijkste ontwikkelingen stammen uit de tweede helft van de twintigste eeuw. Toch is er al eerder aan methoden gewerkt die tot de numerieke wiskunde gerekend kunnen worden. Een van de oudste en bekendste voorbeelden is wel de benadering van π , een getal dat zeer tot de verbeelding van de oude Grieken sprak. Vierkantjes tellen binnen en buiten een eenheidscirkel, zoals geïllustreerd in figuur 1 en tabel 1, levert onder- en bovengrenzen op voor de waarde van π en zodoende hebben we ook meteen een idee van de nauwkeurigheid van de gebruikte benaderingen.

Hoewel het een antiek voorbeeld is, en er in de afgelopen twee millennia veel snellere en efficiëntere methoden voor de benadering van π zijn ontwikkeld [2], geeft het wel de essentie van de numerieke wiskunde goed weer:

- met een eindig aantal bewerkingen een benadering vinden
- uitspraken doen over de nauwkeurigheid van deze benadering



aantal hor./vert.	binnen cirkel	benadering	overlappend	benadering
8	32	2	60	3.75
32	732	2.85938	856	3.34375
128	12596	3.0752	13104	3.19922
512	204836	3.12555	206880	3.15674
2048	3290000	3.13759	3298188	3.1454

figuur 1 en tabel 1

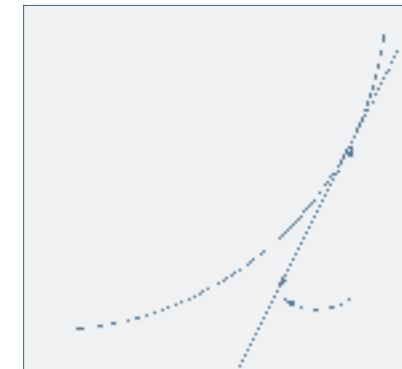
Kenmerkend is dus de eindigheid van het proces dat uiteindelijk leidt tot de gewenste benadering. Dit proces wordt ook wel algoritme genoemd, volgens het Groot Woordenboek der Nederlandse Taal “een systematisch stelsel voor het uitvoeren van rekenkundige bewerkingen en de volgorde daarvan”. Maar ook, volgens dezelfde bron, “een strikt technische redeneermethode, die geen menselijke intuïtie vereist”. Over dat laatste valt te redetwisten, zeker als we het hebben over algoritmen die ontwikkeld worden voor het oplossen van industriële problemen. Daarover later meer.

Het tweede aspect is onlosmakelijk verbonden met het eerste. Een benadering waarvan men niet weet hoe nauwkeurig deze is, is feitelijk nietszeggend. In bepaalde toepassingen kan het voldoende zijn om π te benaderen met 3, juist omdat we weten, dat dit slechts vijf procent van de werkelijkheid afwijkt. Ontberen we deze kennis, dan valt over het eindresultaat ook weinig te melden. Dit is vooral in het bedrijfsleven een ongewenste situatie. Later in deze rede komt een voorbeeld ter sprake waarin een gevonden ‘benadering’ een geheel foutieve, zelfs niet-

bestaande, ‘oplossing’ bleek te zijn.

Naast genoemde aspecten spelen er nog verscheidene andere een rol bij de ontwikkeling van numerieke methoden. Snelheid en efficiency zijn voor de hand liggende aspecten, tenslotte wil iedereen een nauwkeurig antwoord krijgen op een zo goedkoop en snel mogelijke wijze. Een minder voor de hand liggend aspect is robuustheid. Hiermee bedoelen we, dat de algoritme bestand zou moeten zijn tegen allerlei negatieve invloedsfactoren. Een voorbeeld hiervan is het Newton-iteratieproces voor het bepalen van nulpunten van niet-lineaire vergelijkingen. In figuur 2 is dit proces voor een eenvoudig eendimensionaal voorbeeld weergegeven: vanuit het startpunt wordt de raaklijn aan de grafiek bepaald. Het snijpunt van deze raaklijn met de horizontale as wordt de nieuwe benadering. Dit proces kan herhaald worden met het nieuwe punt als startpunt van de zojuist beschreven procedure. Op deze manier ontstaat een iteratief proces, dat benaderingen oplevert die steeds dichterbij de oplossing komen te liggen.

figuur 2



In het getoonde voorbeeld lijkt er op het eerste gezicht geen vuiltje aan de lucht. Echter, er zijn voorbeelden te over waarbij dit proces slechts tot de gewenste oplossing leidt, indien men het startpunt dicht genoeg bij deze oplossing kiest. Dat klinkt tegenstrijdig: men dient al kennis te hebben van de locatie van de oplossing om deze (nog) beter te kunnen benaderen. In deze zin is de algoritme dus niet robuust: een willekeurig gekozen startpunt zou wel eens kunnen leiden tot een niet-convergerend iteratief proces.



Robuustheid kent echter veel kanten. Zelfs al starten we het Newton-proces dicht genoeg bij de oplossing om convergentie te kunnen garanderen, dan nog is het mogelijk, dat zich ongewenste fenomenen voordoen. Een voorbeeld hiervan komen we tegen bij het oplossen van halfgeleiderproblemen. Deze notoir niet-lineaire problemen vertonen een vreemd gedrag ten aanzien van het Newton-proces: extreem veel iteraties en vaak stagnerende processen. Voor dit laatste fenomeen is zelfs een naam bedacht door degenen die het verschijnsel voor het eerst observeerden: ‘self-limiting behaviour’. Na grondige analyse blijken de problemen goed te beschrijven met een simpel modelprobleem:

$$\exp(40x)-1=0$$

De oplossing van dit probleem is natuurlijk $x=0$. Het is inderdaad zo, dat het niet uitmaakt waar we het startpunt neerleggen voor Newton’s methode. In alle gevallen zal er convergentie optreden. Vervelend is wel, dat het aantal iteraties sterk afhangt van het startpunt, zoals te zien is in tabel 2.

tabel 2

startpunt	aantal iteraties
0.1	10
1	46
-0.1	56
-0.2	2979
-0.3	162748
-0.4	8886100
-0.41	13256508

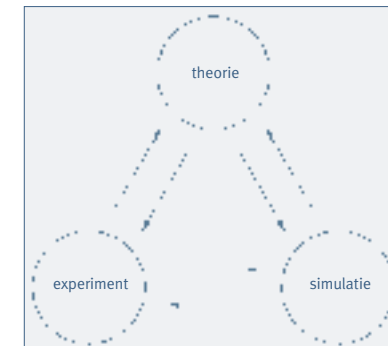
Met 40 iteraties is in de praktijk nog wel te leven, maar het is duidelijk dat 10 miljoen iteraties een onzinnig groot aantal is. Werk aan de winkel voor de numeriek wiskundige, teneinde de mate van robuustheid van de oplossingsmethode te vergroten. Dit bleek inderdaad mogelijk, door gebruik te maken van niet-lineaire transformaties. Zo werd een nieuwe methode geboren, die ‘correctie transformatie’ is genoemd [3]. En passant bleek het ‘self-limiting behaviour’ ook een eenvoudige verklaring te hebben: de fout neemt in vrijwel iedere iteratie met ongeveer $1/40$ af.

Dit volgt onmiddellijk uit de formule voor de Newton-correctie. Alleen voor de laatste iteraties geldt dit niet, als gevolg van kwadratische convergentie.

Ongemerkt zijn we bij de praktijkvoorbeelden aangeland, maar alvorens daar op door te gaan, wil ik graag nog even een stapje terug doen. Ik hoop in het voorgaande een indruk gegeven te hebben van wat numerieke wiskunde inhoudt. Voor een compleet beeld moet ik dit vak echter plaatsen binnen de omgeving waarin het meestal functioneert. Enerzijds is er de klassieke, pure of zuivere, vorm van numerieke wiskunde. Deze houdt zich onder andere bezig met het benaderen van integralen, met interpolaties, met het oplossen van grote niet-lineaire en lineaire stelsels en met het oplossen van differentiaalvergelijkingen. De theorie kan hierbij soms zeer abstracte vormen aannemen, zoals onder meer het geval is bij de eindige-elementen-methode en de daarmee geassocieerde functieruimten. De zogenaamde ‘Franse school’ is hierbij een bekend begrip, dat echter vaak wordt begeleid door een zekere vorm van afgrijzen.

Numerieke wiskunde, of beter: ‘Scientific Computing’, speelt een hoofdrol binnen het vakgebied ‘Computational Science’, ook wel aangeduid met ‘De derde discipline’. Het rangwoord ‘derde’ doet vermoeden, dat er minimaal nog twee andere disciplines zijn. Inderdaad, hiermee worden ‘theorie’ en ‘experiment’ bedoeld. Figuur 3 laat zien, dat er sterke interacties plaatsvinden tussen deze drie disciplines.

figuur 3



Van oudsher zijn theorie en experiment natuurlijk nauw met elkaar verbonden. Experimentele resultaten leiden uiteindelijk vaak tot een theorie (denk aan de zwaartekrachtwet van Newton), terwijl het ook voorkomt dat op theoretische wijze verkregen resultaten met experimenten worden gestaafd.

Door de opkomst van de computer, het gebruik van software en de ontwikkeling van numerieke algoritmen is het heden ten dage vaak ook mogelijk om experimenten op een virtuele wijze uit te voeren. Computers en in software verpakte algoritmen fungeren als experimenteerfaciliteiten. Niet voor niets ontstaan er softwarepakketten met namen als Numlab (Numeriek Laboratorium) en Matlab (Mathematisch Laboratorium).

Virtueel experimenteren heeft een aantal voordelen boven het experiment dat we van oudsher kennen. Zo kan men bijvoorbeeld het gedrag van grootheden in het inwendige van structuren bestuderen, iets wat technisch vaak niet haalbaar is bij traditionele experimenten. Daarnaast zijn minder gangbare vormen en structuren probleemloos in te voeren. Ook kunnen materiaaleigenschappen met één druk op de knop worden aangepast. De derde discipline biedt dus meer mogelijkheden. Bij het verwezenlijken hiervan speelt numerieke wiskunde een essentiële rol. Nog niet zo lang geleden is becijferd, dat de snelheid van numerieke algoritmen de afgelopen decennia beschreven kan worden met een zelfde wetmatigheid als in de wet van Moore voor de snelheid van computerchips: iedere 18 maanden een factor 2 sneller¹. Numerieke wiskunde draagt dus een beduidende steen bij aan de vooruitgang.

De wiskundige leest in bedrijf

De derde discipline, waarover ik zojuist sprak, heeft zijn intrede gedaan in de jaren zestig van de vorige eeuw. Sindsdien heeft zij een grote vlucht genomen en mag zij zich verheugen in een toenemende populariteit. Krachtiger wordende computers en snellere algoritmen stelden onderzoekers in staat om virtuele experimenten uit te voeren. Een van de pioniers op dit terrein is Richard Varga, die in zijn beroemde boek [4] beschrijft hoe het gedrag van kernreactoren berekend kan

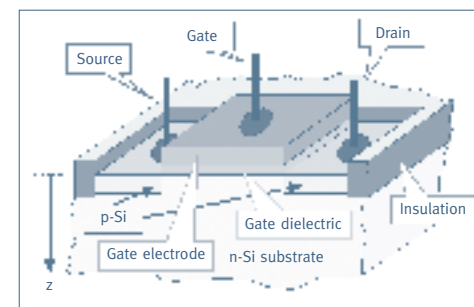
¹ Voor computerchips komt er wellicht binnen afzienbare tijd een einde aan deze wetmatigheid. Ironisch genoeg zou dit ook wel eens kunnen gelden voor de snelheid van numerieke algoritmen...

worden. Het aardige van dit boek is, dat de auteur zich uitput in het opsommen en bewijzen van eigenschappen van speciale matrices die vooral voor praktijkproblemen van groot belang blijken te zijn. Zo bewijst hij, dat een strikt diagonaaldominante L-matrix altijd een M-matrix is en zodoende een inverse heeft met louter niet-negatieve elementen. Dit laatste feit blijkt vervolgens samen te hangen met een discreet maximum-principe, zodat het eindige probleem dus een eigenschap heeft die het oorspronkelijke, vaak in differentiaal-vergelijkingen geformuleerde, probleem ook bezit. Dit lijkt een algemeen principe te zijn voor het welslagen van een numerieke methode:

- zorg er voor dat de numeriek wiskundige formulering de essentiële eigenschappen van het oorspronkelijke probleem overneemt.

In de praktijk blijkt dit principe zeker nog geen gemeengoed te zijn, het is dan ook niet eenvoudig om toe te passen. Op de eerste plaats dient men namelijk een goed model te hebben, dat het te simuleren probleem in voldoende mate beschrijft. Modelvorming is uitermate belangrijk en dient te gebeuren in nauw overleg met onderzoekers uit de betreffende discipline. Mijns inziens geldt namelijk ook hier het principe 'schoenmaker blijf bij je leest'. Persoonlijk laat ik de modelvorming graag over aan natuurkundigen, scheikundigen, mechanisch ingenieurs, et cetera, of aan toegepast wiskundigen. Ik zie de rol van de numeriek wiskundige vooral in het begeleiden van deze modelvorming. Hij kan wijzen op artefacten die worden geïntroduceerd door het model, of attenderen op ongewenste eigenschappen van oplossingen.

figuur 4





Om een voorbeeld te geven: voor de simulatie van halfgeleiders (zoals diodes en transistoren, zie figuur 4) wordt meestal gebruik gemaakt van het zogenaamde drift-diffusiemodel. Dit model, dat is afgeleid uit de Boltzmann-transportvergelijking middels een momentenaanpak, blijkt het gedrag van halfgeleiders goed te beschrijven. Althans, mits er adequate modellen worden gebruikt voor de parameters in het model. Eén van deze modelparameters is de mobiliteit van elektronen. Voor veel situaties kan men volstaan met een mobiliteitsfunctie die afhangt van het elektrische veld. In de negentiger jaren ging men echter ook mobiliteitsmodellen gebruiken die afhankelijk waren van de gradiënten van de quasi-Ferminiveaus. Vanuit experimenteel oogpunt was er niets mis met deze nieuwe modellen. Er leek een correlatie te zijn tussen de mobiliteit van elektronen en de gradiënt van het quasi-Ferminiveau. Tevens kwamen de gemeten waarden van de mobiliteitsfunctie aardig overeen met waarden die berekend werden met het nieuwe model. Een wiskundige analyse wees echter uit, dat met dit model het maximum-principe werd geschonden. Simulaties die gebruik maakten van het model verliepen uitermate moeizaam: Newton-processen convergeerden niet en het oplossen van de lineaire stelsels bleek een lastige kwestie. Uiteindelijk is, mede door de numeriek wiskundige inzichten, het model bijgesteld op zodanige wijze, dat wel garanties konden worden gegeven voor een maximumprincipe.

Als de modelvorming eenmaal naar tevredenheid is geschied, vangt het traject voor de numeriek wiskundige pas echt aan. Dit traject kan in twee onderdelen verdeeld worden:

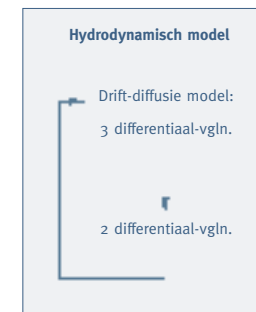
- opstellen van het discrete modelprobleem (discretisatie)
- oplossen van het discrete modelprobleem (oplossing)

Voor het selecteren of ontwikkelen van de te gebruiken discretisatiemethoden is het van essentieel belang, dat eigenschappen van het model en zijn oplossingen goed in kaart worden gebracht. Na discretisatie liggen namelijk de numerieke benaderingen vast, hieraan wordt door het oplossingsproces niets meer veranderd². Men dient zich hier terdege van bewust te zijn. Dat dit niet altijd het geval is, blijkt uit het volgende voorbeeld. Toen in de negentiger jaren het drift-diffusiemodel niet leek te voldoen voor situaties waarin hete elektronen een rol speelden, raakte het zogenaamde hydrodynamische halfgeleidermodel in gebruik. Dit

² Afgezien van onnauwkeurigheden die worden geïntroduceerd door het oplossen.

model is een uitbreiding van het drift-diffusiemodel, met extra differentiaalvergelijkingen voor de temperatuur van elektronen en gaten. Omdat de verschillen tussen oplossingen van het drift-diffusiemodel en het hydrodynamische model slechts in een beperkt gebied significant waren, gebruikte men een iteratief oplosproces, zoals geïllustreerd in figuur 5. Op conferenties werd echter veelvuldig gerapporteerd, dat de oplosmethode niet convergeerde en dat moeizaam verkregen oplossingen artefacten vertoonden, zoals negatieve temperaturen. Dat de problemen niet lagen in het oplosproces, maar in de discretisatie, bleek een moeilijk over te brengen boodschap. Men had namelijk de indruk dat, door de ont koppeling van het oplossen van beide onderdelen, de grootheden onderling ook waren ontkoppeld. Men raakte pas overtuigd, toen een nieuw discretisatieschema voor de extra vergelijkingen het oplosproces sterk vereenvoudigde en bewijsbaar in alle situaties niet-negatieve temperaturen opleverde. Ook hier lag het discrete-maximumprincipe aan de basis van de oplossing.

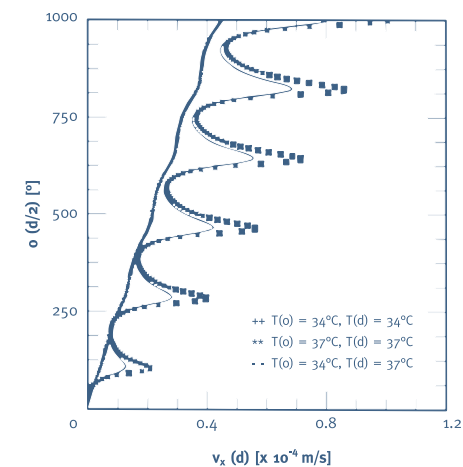
figuur 5



De voorgaande voorbeelden tonen aan hoe belangrijk het is ervoor te zorgen, dat het discrete probleem eigenschappen overneemt van het oorspronkelijke probleem. Hierbij is een zeer nuttige rol weggelegd voor numeriek wiskundigen. Hun toegevoegde waarde ligt in het vermogen om te abstraheren (zoals het een wiskundige betaamt). Daarnaast hebben zij inzicht in de grote hoeveelheid methoden die tegenwoordig beschikbaar is en 'op de plank' ligt. Dit laatste leidt zelfs tot discussies over de vraag of numeriek wiskundigen zich wellicht overbodig gemaakt hebben, aangezien vrijwel alle bekende algoritmen in software beschikbaar zijn. Waarom zouden onderzoekers uit andere disciplines

überhaupt een beroep moeten doen op een numeriek wiskundige, zij kunnen de methoden toch zelf wel aan elkaar knopen door gebruik te maken van die software? In een aantal gevallen is dit inderdaad mogelijk, maar ik durf te stellen, dat het in de overgrote meerderheid van de gevallen niet mogelijk is. Ieder probleem heeft zijn eigen specifieke eigenschappen en vergt dus een investering in onderzoek naar geschikte algoritmen. Deze investering kan natuurlijk door de onderzoeker zelf gedaan worden, die dan het terrein van de numericus betreedt. Raadzamer is het om, in samenspraak met een numeriek wiskundige, op zoek te gaan naar geschikte combinaties van algoritmen of zelfs nieuwe algoritmen te ontwikkelen, indien dit nodig blijkt te zijn. Dat het soms zelfs gevaarlijk kan zijn om zonder veel voorkennis algoritmen te gebruiken, wil ik illustreren met het volgende voorbeeld. Enige jaren geleden raakte men geïnteresseerd in het gebruik van vloeibare kristalpolymeren (zogenaamde LCP's) voor consumentenproducten. Voor het beschrijven van het gedrag van deze materialen was al langere tijd een model bekend, ontwikkeld door de Nobelprijswinnaar Philippe de Gennes [5]. Vanwege de aanzienlijke lengte van de moleculen werden zij in dit model als staafjes voorgesteld. Het probleem is dan om de richting van de staafjes te bepalen.

Een van de eerste testvoorbeelden betrof de stroming van vloeibare kristalpolymeren tussen twee platen, waarbij de bovenste plaat met een constante snelheid v beweegt ten opzichte van de onderste. Voor het meest gangbare materiaal bleek het vrij eenvoudig om dit probleem te simuleren. Het resultaat laat zien, dat de hoek van de staafjes (precies in het midden tussen de platen) een monotone functie is van de snelheid. Problemen traden op toen het materiaal vervangen werd door het materiaal 8CB, dat geheel andere eigenschappen heeft. Voor dit materiaal bleek het niet mogelijk om de curve van het gedrag van de hoek als functie van de snelheid te bepalen. Omdat men hoopte dat een methode genaamd 'simulated annealing' wellicht wel tot een oplossing zou leiden, werd deze 'van de plank' gehaald. Inderdaad leidde deze tot oplossingen, maar naarmate de snelheid opliep, bleken de oplossingen veel moeizamer berekend te kunnen worden. Vanaf een bepaalde snelheid bleek, dat het zogenaamde residu (een maat voor het resultaat wanneer men de oplossing substitueert in de vergelijkingen) stagneerde en niet kleiner wilde worden. Hieruit werd de conclusie getrokken, dat men waarschijnlijk de oplossing toch te pakken had.



figuur 6

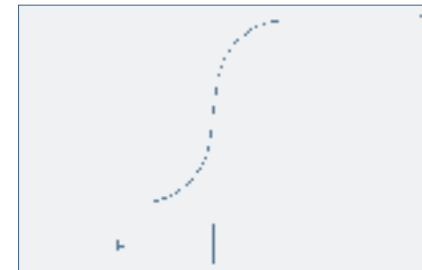
Toen een rapport over de bevindingen reeds in het eindstadium was, begon men zich zorgen te maken, omdat de gevonden resultaten niet overeenstemden met hetgeen op fysische gronden verwacht mocht worden. De hulp van een numeriek wiskundige werd ingeroepen. Deze legde snel de vinger op de zere plek. Door de hoek als variabele te gebruiken en de snelheid als functie hiervan te bepalen, bleek het probleem moeiteloos oplosbaar, zonder gebruik te hoeven maken van 'simulated annealing'. In figuur 6 is dit resultaat weergegeven, voor verschillende temperaturen. Nu is ook duidelijk waarom het residu voor hogere snelheden stagneerde: er was voor die snelheden simpelweg geen oplossing meer die in het verlengde lag van de opgebouwde curve. De verklaring hiervoor kon ook gegeven worden na bestudering van de berekende resultaten: de oplossing tussen de platen bleek uit steeds meer lagen te gaan bestaan, waarbij in elke laag de moleculen ongeveer in dezelfde richting (dus hoek) lagen. Dit is een bekend gedrag van LCP's, het verklaart ook de sterkte van deze materialen. Het voorgaande voorval heeft geleid tot een bloeiende samenwerking tussen fysici en numerici bij de simulatie van vloeibare kristalpolymeren. Er zijn diverse gemeenschappelijke publicaties verschenen. Het probleem bleek uitermate interessant en uitdagend vanuit wiskundig oogpunt vanwege de vaak onverwachte fenomenen.



De wiskundige leest in bedrijf

In het voorgaande betoogde ik reeds, dat het verstandig is om een numeriek wiskundige in te schakelen bij het construeren van algoritmen voor het simuleren van industriële problemen. Enerzijds heeft ieder probleem zijn eigen specifieke eigenschappen. Het is belangrijk deze eigenschappen van het wiskundige model in kaart te brengen en te gebruiken bij het ontwikkelen van geschikte algoritmen. Anderzijds is er tegenwoordig zo'n groot scala aan numerieke oplosmethoden, dat een leek vaak door de bomen het bos niet meer zal kunnen zien. Voldoende redenen om iemand in te schakelen die overweg kan met deze problematiek. En dit bedoel ik ook vrij letterlijk. De samenwerking tussen onderzoeker(s) en numeriek wiskundige(n) dient dynamisch te zijn, met input van beide kanten. Een hechte samenwerking, met uitwisseling van ideeën en ervaringen. Het is namelijk zeker geen eenrichtingsverkeer. Vaak blijkt dat de uiteindelijk gekozen algoritmen dankbaar gebruik maken van specifieke kenmerken van het probleem. Een voorbeeld hiervan kwamen we begin jaren '80 tegen, toen er een softwarepakket werd geproduceerd dat, voor willekeurige structuren, stroomloze situaties in halfgeleiders simuleerde. Hiervoor diende een niet-lineaire Poissonvergelijking opgelost te worden. Op zich was dit al een ambitieus streven, in die tijd had men weinig vertrouwen in het wel-slagen van zo'n algemeen pakket. Het vergde dan ook veel numeriek wiskundig onderzoek om algoritmen te vinden die bestand waren tegen die algemeenheid en tegen de extreme niet-lineariteiten. In eerste instantie werd de oplossing gezocht in continueringmethoden en werd er lustig gestrooid met de continueringparameter t . Bij deze methoden wordt voor $t=1$ de gewenste oplossing gevonden. Helaas bleek het vaak onmogelijk om bij $t=1$ te komen. Veel oplospogingen strandden onderweg. Hulp kwam uiteindelijk van de onderzoekers zelf. Zij hadden het voortdurend over een begrip 'ladingsneutraliteit', dat kwam neer op het gelijk aan nul stellen van het niet-lineaire deel van de vergelijking. Gebruikte men de hieruit resulterende (dus: ladingsneutrale) oplossing als beginschatting voor een Newtonproces, dan bleek dit uitstekend te convergeren, zelfs zonder gebruik te maken van continuering. Hiermee werd de algoritme vele malen simpeler en efficiënter. Tot op vandaag is deze methode in gebruik.

Het aardige is, dat deze wijze van het genereren van een beginschatting ook op wiskundige wijze te verklaren is. Uit analyses is namelijk bekend, dat de niet-lineaire Poissonvergelijking singulier gestoord van aard is.



figuur 7

Dit betekent, dat er een kleine parameter in het spel is³, die de oplossing in een klein deelgebied snel laat variëren. Dit is te zien in figuur 7, waar een oplossing is weergegeven van een eendimensionaal probleem. Voor dit soort problemen kan men asymptotische expansies genereren, die de vorm hebben van een reeks in de machten van de kleine parameter. De nulde orde term, ook wel gereduceerde oplossing genoemd, blijkt precies overeen te stemmen met de ladingsneutrale oplossing. Daarnaast blijkt dat, met deze oplossing als startpunt, het Newtonproces monotone convergentie vertoont. Al met al is op deze wijze een mooie wiskundige verklaring gevonden voor het succes van de ladingsneutrale startoplossing, geïnitieerd door fysische inzichten. De continueringmethoden zijn hierdoor voorgoed in de ijskast verdwenen. Het voorgaande voorbeeld laat zien, dat het voor numeriek wiskundigen uitermate belangrijk is om hun oor te luisteren te leggen bij collega's uit andere disciplines. Uiteindelijk zal dit vaak tot een win-win situatie leiden: enerzijds betrouwbare en efficiënte algoritmen voor het uitvoeren van de simulaties van de onderzoeker, anderzijds nieuwe inzichten of methoden voor de numeriek wiskundige. In deze zin is het dus goed als de wiskundige zich rekenschap geeft van de achtergronden van een probleem en daar ook gebruik van maakt. Zijn kennis wordt hierdoor vergroot, het bedrijf fungeert als leerschool en ideeënbank. Of, met een letterlijke vertaling uit het Engels: hij 'leest'. In een aantal gevallen kan dit 'lezen' zelfs leiden tot nieuwe methoden die algemeen toepasbaar zijn. Bij het simuleren van het gedrag

³ Dat deze parameter klein is ten opzichte van de andere grootheden in de vergelijking blijkt na dimensieloos maken. Dit is een techniek die uitermate belangrijk is voor het verwerven van de nodige inzichten, maar die niet altijd meer tot de basisvaardigheden van numerici behoort.



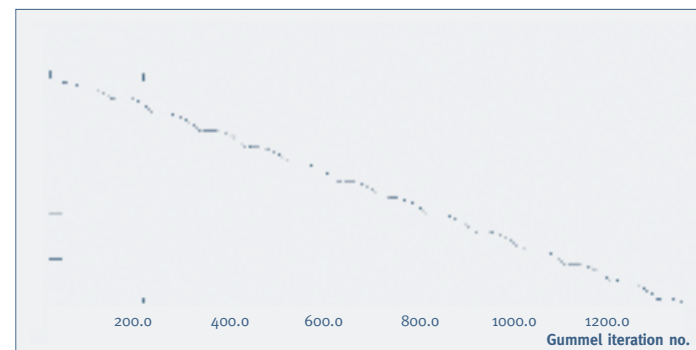
van elektronische schakelingen spelen twee soorten variabelen een rol, namelijk de spanning en de stroom. De lineaire stelsels die uiteindelijk ontstaan na discretisatie van dit probleem zijn indefiniet. Dit is problematisch voor het gros van de gangbare oplostechnieken. Sterker nog, men zoekt ook momenteel nog zeer actief naar geschikte algoritmen voor het oplossen van indefiniete lineaire stelsels. Voor dit probleem ontstond op natuurlijke wijze het idee om stromen en spanningen op een bepaalde manier te koppelen, te groeperen in setjes van twee bij elkaar behorende variabelen. Door de lineaire stelsels vervolgens te herordenen (zie figuur 8) en de 2×2 blokjes als enkele entiteiten op te vatten, bleek een decompositie geconstrueerd te kunnen worden die analoog is aan de bekende Choleski-decompositie voor positief definitieve matrices. Het aardige van de methode is, dat de indefinietheid volledig wordt geïsoleerd in een blokdiagonaalmatrix. De methode blijkt algemeen toepasbaar op indefiniete stelsels. Zij is inmiddels in een vergevorderd stadium van ontwikkeling

figuur 8



Er zijn veel voorbeelden te geven van prachtige resultaten van de samenwerking tussen onderzoekers en numeriek wiskundigen. Soms leiden deze resultaten tot zodanige numerieke inzichten, dat zij ook bij latere problemen worden gebruikt. Toen wij midden jaren tachtig software ontwikkelden voor het simuleren van het gedrag van halfgeleiders, waren er twee scholen binnen het bedrijf. Wij waren zeer geporteerd van het gebruik van de methode van Newton vanwege haar aantrekkelijke convergentie-eigenschappen en de brede toepasbaarheid qua soorten halfgeleiders. Op het Research Laboratorium in Engeland gebruikte men echter de zogenaamde Gummel-algoritme⁴, hetgeen

⁴ In wiskundige taal is dit een blok Gauss-Seidel-algoritme.



figuur 9

neerkomt op het sequentieel oplossen van de drie gediscrètiseerde vergelijkingen. Toepassing van deze algoritme op de voor hen belangrijke problemen (voor ingewijden: MOS-transistoren) bleek vele malen snellere simulaties op te leveren. Uiteindelijk konden wij er ook niet onderuit om deze algoritme toe te passen in onze software. Echter, het aardige van de zaak was, dat we er een essentiële verbetering in konden aanbrenge. Er was namelijk gebleken, dat de Gummel-methode weliswaar convergente processen opleverde, maar dat voor bepaalde situaties het aantal iteraties behoorlijk hoog kon worden. Zie figuur 9 voor een voorbeeld van deze langzame convergentie.

Wat opvalt in figuur 9 is, dat de convergentie erg voorspelbaar is, namelijk lineair. Blijkbaar is er een grootste eigenwaarde die een dominante rol speelt in dit proces. We vroegen ons dan ook af of hier gebruik van gemaakt kon worden. Dit bleek het geval: door gebruik te maken van vector extrapolatie, kon de convergentie zeer aanzienlijk versneld worden. Het toeval wilde, dat er in de literatuur juist op dat moment veel aandacht was voor vector extrapolatie algoritmen.

Wij maakten hier dankbaar gebruik van. Zo ontstond een aangepaste versie van Gummels algoritme, die vele malen sneller was dan de oorspronkelijke. Later hebben we dit idee van vector extrapolatie gebruikt bij andere toepassingen, zoals bij het simuleren van de productie van televisiebuizen en bij de koppeling van elektromagnetische velden met halfgeleidersubstraten.

Aansluiting met het bedrijfsleven

De numericus kan zijn wiskundige ei nog immer goed kwijt binnen het



vakgebied van Computational Science, en dus in het bedrijfsleven. Men is er in geslaagd om numerieke methoden de weg te laten vinden naar toepassingen voor lastige praktijkproblemen. Soms vergt dit proces vele jaren, zoals in het geval van de iteratieve oplosmethoden voor lineaire stelsels. Pas in het laatste decennium van de vorige eeuw werden deze methoden gemeengoed in software. Nog steeds zijn er pakketten commercieel beschikbaar, die er geen gebruik van maken. Hier is duidelijk een taak weggelegd voor de numeriek wiskundige. Mijns inziens is er namelijk een te grote afstand tussen numerici enerzijds en onderzoekers of ontwikkelaars van software anderzijds. Numerieke methoden dienen misschien veel meer te worden gezien als onderdeel van een bedrijfsmatig proces, waarin onderzoek plaats zou moeten vinden met in het achterhoofd de verdere ontwikkeling van het gebruik van dit product. Vaak blijft het op de universiteit bij academische voorbeelden. Dan durft men de stap naar daadwerkelijke praktijkproblemen niet aan, of slechts voor de eenvoudigste situaties. Ik wil hier niet beweren dat het numerieke onderzoek in voorkomende gevallen niet nuttig zou zijn of kunnen zijn. Het is de aloude discussie over de toepasbaarheid van wiskundige methoden. In veel gevallen is er gewoonweg veel tijd nodig om het product, in dit geval een numeriek algoritme, te vervolmaken. Het voorbeeld van de iteratieve lineaire oplosmethoden is een succesverhaal. Daarentegen is de meerrooster-methode (zie figuur 10) een product waarvan men zich kan afvragen wanneer het rijp is voor toepassing op gecompliceerde praktijkproblemen. Deze methode wordt al sinds het begin van de tachtiger jaren verder ontwikkeld en er zijn nog veel vragen te beantwoorden. Op zich is het een prachtige methode, die vast en zeker zal kunnen bijdragen aan het verbeteren van de kwaliteit van hedendaagse simulaties.

figuur 10



Dit geldt in eendere mate voor adaptieve roosterverfijning. Hoewel er in de numeriek wiskundige literatuur veel aandacht aan is besteed in de afgelopen twintig jaar, zien we dat er nagenoeg geen gebruik van wordt gemaakt in software bedoeld voor probleemklassen die belangrijk zijn voor het bedrijfsleven. Weliswaar zijn er pogingen, maar vaak zijn deze niet gebouwd op een gedegen wiskundig fundament. Kenmerkend is ook, dat ze vaak semi-adaptief zijn. Verfijning vindt vaak plaats op grond van een naburige oplossing. Blijkbaar is het een stap te ver om de methoden verder te ontwikkelen voor deze doeleinden. Naar mijn mening zouden numeriek wiskundigen meer moeite moeten doen om deze aansluiting met het bedrijfsleven voor elkaar te krijgen. Als dit lukt, wordt de kwaliteit van de simulatieresultaten drastisch verbeterd. Ik zie het dan ook als één van mijn taken om deze kloof te overbruggen en jonge onderzoekers te stimuleren lastige praktijkproblemen op te nemen in hun pakket testvoorbeelden.

Een ander obstakel bij de aansluiting met het bedrijfsleven is de complexiteit van de software. Promovendi testen hun algoritmen meestal binnen omgevingen zoals Matlab, omdat dit hen in staat stelt om snel en efficiënt programmatuur te ontwikkelen. Vaak lukt het om in deze omgeving tests uit te voeren voor een aantal modelproblemen dat karakteristiek bezit van het uiteindelijk op te lossen algemenere probleem. Echter, als het onderzoek eenmaal naar tevredenheid is afgerond en er een adequate algoritme is ontwikkeld, komt het probleem van de implementatie in de binnen het bedrijf gebruikte software. Helaas blijkt in de praktijk, dat bedrijven vaak niet goed voorbereid zijn op deze taak. Dan blijft de algoritme uiteindelijk ongebruikt. Deze situatie treedt vooral de laatste jaren veelvuldig op, nu bedrijven vaak andere, kortere-termijn-prioriteiten hebben. Ik wil hier mijn zorg uiten over deze aansluiting en zeg toe me in te zetten voor een verbetering van deze situatie.

Nieuwe ontwikkelingen

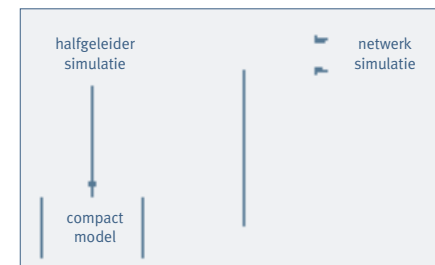
Tot op dit moment heb ik in deze rede voornamelijk gesproken over algoritmen en software voor individuele componenten of eigenschappen. Dit is ook kenmerkend voor de ontwikkelingen binnen het vakgebied Scientific Computing. Zoals gezegd, werden grootschalige simulaties mogelijk in de zestiger jaren. De afgelopen decennia hebben we gezien, dat er meer en meer softwarepakketten op de markt kwamen voor verschillende klassen en soorten van problemen. Geavanceerde

numerieke methoden zorgen er voor, dat we de meest gecompliceerde simulaties kunnen uitvoeren.

De afgelopen jaren is er een tendens waar te nemen, dat men zich niet meer tevreden stelt met de beschikbare software. Er worden steeds hogere eisen gesteld aan producten. Waar men vroeger vaak optimaliseerde met een enkel aspect in het achterhoofd, wordt er tegenwoordig geoptimaliseerd met betrekking tot een aantal parameters. Een voorbeeld hiervan is de ontwikkeling van beeldbuizen voor televisies en de bijbehorende maskers, waarbij zowel elektromagnetische als thermische effecten meegenomen dienen te worden. Een ander voorbeeld is de ontwikkeling van MRI-systemen voor medische toepassingen, waarbij de interactie tussen elektromagnetische en mechanische velden voor ongewenste geluidsproblemen zorgt. Kortom, meer en meer vereisen de praktijkproblemen een samensmelting van afzonderlijke simulatie-gereedenschappen. Een terminologie die hiervoor ook wel wordt gebezigd is: multifysica.

Helaas is het niet zo eenvoudig om deze gecombineerde berekeningen uit te voeren. Op de eerste plaats zijn de individuele simulaties vaak al erg tijdrovend, zodat het uitvoeren van een reeks berekeningen met verschillende pakketten vrijwel uitgesloten is. Daarnaast zal er vaak een behoorlijke mate van koppeling zijn tussen de verschillende aspecten. Dit betekent, dat er veel iteraties nodig zijn om de gewenste oplossing te vinden. Voor bepaalde toepassingen worden wel gecombineerde berekeningen uitgevoerd in de hoop überhaupt resultaten te boeken, maar het lijkt een weg die uiteindelijk doodloopt.

Er zullen dus andere strategieën bedacht moeten worden. Ideeën hiervoor kunnen we wederom opdoen als we goed kijken naar wat er in het bedrijfsleven gebeurt. Binnen de elektronische industrie wordt bijvoorbeeld al vele jaren gewerkt met compacte modellen voor de beschrijving van transistoren. Deze modellen worden vervolgens gebruikt in simulaties van grote elektrische netwerken. In wezen voert men op deze wijze gecombineerde berekeningen uit. Het aardige is, dat het gedrag van de individuele transistoren beschreven wordt met slechts een kleine hoeveelheid parameters. Met andere woorden, in plaats van de tijdrovende berekeningen met behulp van software voor halfgeleider-simulatie rechtstreeks te koppelen met software voor netwerksimulatie, wordt een tussenstap uitgevoerd. In deze tussenstap wordt zeer nauwgezet het gedrag van de individuele transistoren bekeken en uiteindelijk samengevat in compacte modellen. Deze compacte modellen worden



figuur 11

verpakt in een stukje software, dat verwaarloosbaar weinig tijd kost in vergelijking met een halfgeleidersimulatie. Deze software wordt gekoppeld met de netwerksimulatie. De rekentijd voor de uiteindelijke gecombineerde berekening zal dan vergelijkbaar zijn met die voor een enkele netwerksimulatie. In figuur 11 is deze werkwijze schematisch weergegeven.

Nu zullen experts op dit terrein onmiddellijk roepen, dat de tussenstap die uiteindelijk leidt tot het compacte model louter gebruik maakt van experimentele resultaten. Dit is ook inderdaad de werkwijze die tot nu toe wordt gebruikt. Het is echter duidelijk, dat gemeten resultaten evengoed vervangen kunnen worden door resultaten van simulaties. Men zou zelfs kunnen denken aan het combineren van simulaties en metingen, om zodoende een zo accuraat mogelijk compact model te construeren. Bovendien is dit een discussie die voor mijn betoog geen gevolgen heeft. Het gaat namelijk om het idee van de tussenstap. Door een of meerdere aspecten van gedrag samen te vatten in een model met slechts een beperkt aantal parameters, zullen gecombineerde berekeningen veel minder tijdrovend zijn. Kortom, het gebruik van compacte modellen lijkt een goede oplossing voor onze problematiek. Het construeren van compacte halfgeleidermodellen is een vak apart, waarover veel boeken en artikelen zijn verschenen. De modellen zijn vaak erg ingewikkeld, bovendien is er een hiërarchie van modellen ontstaan, die is ingegeven door de historische gang van zaken. Het kopiëren van deze aanpak in een algemenere context lijkt daarom niet voor de hand te liggen, het is allemaal erg specifiek. Bovendien wordt voor de constructie van de modellen nog veel werk handmatig verricht, terwijl ons streven juist is om modellen automatisch te kunnen genereren. Het lijkt daarom beter om de essentiële kenmerken te isoleren en te gebruiken voor een algemene aanpak.



De algemenere aanpak wordt met een Engelse term aangeduid: ‘reduced order modelling’, afgekort ROM. Een letterlijke vertaling hiervan geeft de essentie van de methode aan: het modelleren met een model van lagere orde. Dit klinkt abstract, is echter eenvoudig te verklaren. Immers, indien men een simulatie uitvoert, hangt de oplossing af van een groot aantal parameters: parameters in de gebruikte fysische modellen, afmetingen, tijdstippen, numerieke parameters, et cetera. Dit kunnen duizenden, tienduizenden of zelfs miljoenen parameters zijn. Kan men de oplossing formuleren met veel minder parameters, dan heeft men automatisch een model van lagere orde.

Op het alomtegenwoordige internet vond ik enige aardige illustraties, die meteen de essentie duidelijk maken van wat reduced order modelling inhoudt. Kijkt u eens naar het volgende rijtje plaatjes (figuur 12):

figuur 12



Van links naar rechts worden steeds meer details weggelaten. Maar ook wanneer men alleen het laatste plaatje zou bekijken, is duidelijk dat het hier om een voorstelling van een konijn handelt.

De cruciale vraag is natuurlijk: hoe kunnen we een model met een grote hoeveelheid parameters reduceren tot een model met slechts een kleine hoeveelheid parameters?

Naar een antwoord op deze vraag is de afgelopen jaren uitgebreid onderzoek gedaan door numeriek wiskundigen. Een zeer kansrijke aanpak maakt gebruik van projecties op deelruimten. Deze deelruimten worden op iteratieve wijze gegenereerd (meestal via het bekende Krylov-proces), waarbij de grootste eigenwaarden van het probleem feitelijk worden geïsoleerd. Dit verklaart ook meteen waarom zo'n aanpak succesvol kan zijn: er wordt enkel gekeken naar het dominante gedrag van oplos-

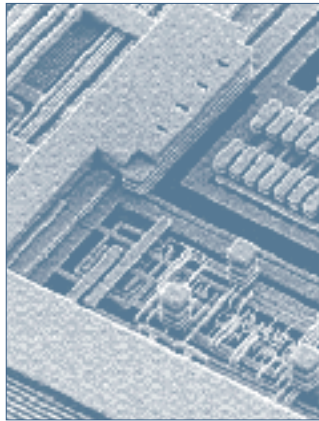
singen, details in het gedrag worden verwaarloosd.

De resulterende methoden voor het construeren van compacte modellen leunen zwaar op de numerieke wiskunde die zich bezighoudt met het iteratief oplossen van lineaire stelsels. Krylov-methoden, geconjugeerde gradiënten, deelruimtes, eigenwaarden, het zijn allemaal begrippen die een essentiële rol spelen binnen dit relatief nieuwe vakgebied. Aardig is tevens, dat er een duidelijk verband bestaat met het vakgebied van de meet- en regeltechniek. Begrippen als observeerbaarheid en controleerbaarheid komen op natuurlijke wijze naar voren. In deze zin is het raadzaam om samen te werken met de collega's van meet- en regeltechniek. Reduced order modelling mag zich verheugen in een snel groeiende belangstelling, zowel vanuit de universiteiten als vanuit bedrijven. Middels het Europese wiskundenetwerk MACSInet [6] organiseren we op regelmatige basis symposia over dit onderwerp. Inmiddels zijn in deze bijeenkomsten veel toepassingen de revue gepasseerd. Daarbij is tevens duidelijk geworden, dat er grote behoefte bestaat aan betrouwbare constructieve methoden.

Een van de gebieden waarin erg veel onderzoek wordt gedaan naar reduced order modelling is het vakgebied waarin ik gedurende enige jaren werkzaam ben: het ontwerp van analoge en digitale schakelingen. Zoals bekend, worden chips almaar kleiner en lijken ze gedichteerd te worden door de al eerder ter sprake gekomen wet van Moore.

Karakteristieke afmetingen worden kleiner en de frequenties waarbij de schakelingen opereren, worden hoger. Tezamen zorgt dit ervoor, dat zeer dicht bij elkaar gelegen onderdelen steeds duidelijker invloed van elkaar ondervinden. Soms kan dit een hinderlijke en zelfs ongewenste invloed zijn. Aangezien ontwerpen tegenwoordig liefst dienen te voldoen aan het dictaat van ‘first time right’, zijn er krachtige virtuele ontwerpomgevingen gecreëerd, waarmee het gedrag van deze enorm omvangrijke schakelingen onderzocht kan worden. Graag zou men binnen deze ontwerpomgeving ook de mogelijke negatieve invloedseffecten simuleren. Dit is echter tot op heden niet of slechts in zeer beperkte mate mogelijk. Vandaar dat wij onderzoek zijn gestart naar methoden voor het efficiënt berekenen van deze effecten. Hiertoe worden structuren onderzocht als weergegeven in figuur 13.

Deze zogenaamde interconnect-structuren bestaan uit een aantal verschillende lagen, met daarin onder andere verbindingen van metaal die zorgen voor het transport van de elektrische signalen tussen de vele elektronische componenten. Om eventuele ongewenste effecten



figuur 13

te kunnen detecteren, dient het elektromagnetische gedrag van deze interconnect-structuren nauwkeurig bepaald te worden. Dit gebeurt via het numeriek oplossen van de Maxwell-vergelijkingen, hetgeen een rekenintensieve exercitie is vanwege het driedimensionale karakter en de grote hoeveelheid variabelen die dit met zich meebrengt. Men kan echter aanvoelen, dat deze miljoenen parameters zeker niet nodig zijn voor een analyse van de ongewenste effecten. Immers, tot voor kort waren de afmetingen zodanig dat er geen ongewenste effecten optraden. Kortom, er is gerede hoop dat de resultaten van de driedimensionale simulaties samengevat kunnen worden in een model van drastisch gereduceerde orde.

Momenteel vindt er veel onderzoek plaats naar geschikte methoden om modellen van gereduceerde orde te construeren voor genoemde toepassing. Hierbij treden allerlei problemen op. De initieel gangbare methode, genaamd AWE (asymptotic waveform evaluation), blijkt voor ordes hoger dan acht geen geschikte modellen op te leveren. PVL, een bijzonder slimme herformulering van AWE die gebruik maakt van het Lanczos-proces voor het vinden van eigenwaarden, won in de jaren negentig snel terrein. Tot men constateerde, dat PVL enige essentiële eigenschappen van het oorspronkelijke probleem niet behoudt. Dit heeft het onderzoek geïnitieerd naar methoden die de zogenaamde passiviteit behouden. Inmiddels is er een aantal voorstellen in deze richting gedaan, maar is ook een nieuwe eis toegevoegd aan het wensenlijstje: causaliteit. Kortom: het onderzoeksterrein ligt nog voor een groot



gedeelte braak. Het wordt echter langzaam maar zeker ontgonnen door numerici in nauwe samenwerking met onderzoekers en ontwerpers uit de elektronische industrie.



Geachte toehoorders, ik hoop dat ik u enige kijk heb kunnen geven op de methoden en werkwijze die gepaard gaan met het bedrijven van numerieke wiskunde voor industriële problemen. Ik ben erg blij om in zo'n boeiend gebied te kunnen en mogen werken. Mijns inziens is de combinatie van een interessante en veelzijdige baan in het bedrijfsleven met een uitdagende taak aan deze universiteit ideaal. Op deze wijze ontstaat tweerichtingsverkeer. De ervaringen, opgedaan in het bedrijfsleven, kunnen doorgegeven worden aan jonge onderzoekers die, op hun beurt, nieuwe methoden ontwikkelen om er uiteindelijk weer lastige praktijkproblemen mee op te kunnen lossen. En zo is de cirkel rond.

Ik hoop daarnaast, dat ik u heb kunnen overtuigen van het belang van het vakgebied 'Numerieke wiskunde voor de industrie'. Het is een vak met veel facetten, het beoefenen ervan vereist een gedegen kennis van beschikbare methoden en hun eigenschappen. De beschikbaarheid van grote hoeveelheden numeriek wiskundige software doet vermoeden, dat het vak door iedereen beoefend zou kunnen worden. Het is echter zeer aan te raden gebruik te maken van de diensten van een numericus. Niet alleen vanwege zijn kennis van de methoden, maar ook vanwege zijn vermogen tot abstractie en generalisatie. De numeriek wiskundige zal het wezenlijke en diepere van het praktijkprobleem grondig analyseren, volgens zekere regels. Hierdoor kan vaak meteen een grote klasse van problemen beschreven en aangepakt worden.

In de rede heb ik ook aangegeven, dat de numeriek wiskundige veel kan leren van het werken met echte praktijkproblemen. Enerzijds kan men zich niet tevredenstellen met het ontwikkelen van methoden voor simpele modelproblemen, het praktijkprobleem vergt doorgaans veel meer diepgang. Dit komt ten goede aan de methoden, zij zullen hierdoor robuuster worden en algemener toepasbaar. Anderzijds dient men dankbaar gebruik te maken van de inzichten van onderzoekers, die vaak verrassende suggesties hebben voor de te ontwikkelen numerieke methoden. Numeriek wiskundigen die werkzaam zijn in of voor een bedrijf dienen zich bij voorkeur niet eenzaam terug te trekken in hun kamer, maar zouden actief contact moeten onderhouden met



onderzoekers uit andere disciplines. Een hechte samenwerking zal uiteindelijk leiden tot de beste resultaten, zowel vanuit bedrijfsmatig als numeriek wiskundig oogpunt.

Dankwoord

Dames en heren, ik ben gekomen aan het einde van mijn rede.

Ik wil echter niet afsluiten zonder een aantal personen en instanties te bedanken die er aan hebben bijgedragen, dat ik hier nu sta. Op de allereerste plaats wil ik mijn ouders heel erg bedanken voor de continue steun die ik van hen al vanaf mijn jeugd heb gekregen. Helaas heeft mijn veel te jong overleden vader het grootste deel van mijn werkzame leven niet mee mogen maken.

Ik dank het College van Bestuur en het bestuur van de faculteit Wiskunde en Informatica voor het in mij gestelde vertrouwen. De TU Eindhoven is een bloeiende universiteit. Ik ben blij hier te mogen werken en van hieruit het vak van numerieke wiskunde te kunnen uitdragen.

Mijn academische leven overpeinzend wil ik in eerste instantie een dankwoord richten aan mijn wiskundige vader. Hooggeleerde Miller, beste John, van jou leerde ik de eerste beginselen van numerieke wiskunde. Door jou kwam ik terecht in het boeiende vakgebied van de singulier gestoorde problemen. De gedegenheid en precisie die jij aan de dag legde, maakten op mij grote indruk en ik heb daar veel van geleerd. Ik hoop dat we elkaar nog vaak zullen ontmoeten.

Hooggeleerde Mattheij, beste Bob, wij kenden elkaar al vele jaren voordat je me polste om bij de Scientific Computing Group te komen werken. Onze Nijmeegse tijd was grotendeels disjunct, maar na je aanstelling in Eindhoven werden er al snel contacten gelegd. In eerste instantie middels de jaarlijkse bijeenkomsten tussen jouw groep en de wiskundegroep van het Natuurkundig Laboratorium, later gevolgd door veel intensievere contacten tijdens ons verblijf in het bestuur van ITW. Ik heb altijd grote bewondering gehad voor je grote numerieke vakkennis en je affiniteit met praktische problemen. Ik wil je bedanken voor al je goede raad en hulp, het is erg fijn dat je altijd klaar staat en tijd hebt om over technische en niet-technische problemen te praten. Voorts bedank ik je voor de fantastische sfeer binnen de Scientific Computing Group, het is erg motiverend om in zo'n groep te werken.

Hooggeleerde Van der Vorst, beste Henk. Hooggeleerde Van der Sluis, beste Bram. Hooggeleerde Hemker, beste Piet. Jullie hebben, in de

functie van adviseur, een beslissende invloed gehad op de manier waarop ik numerieke wiskunde bedrijf voor praktische problemen. Ik heb heel erg veel van jullie geleerd en daarvoor wil ik jullie van harte bedanken.

Ik zou hier niet voor u gestaan hebben zonder de steun van Philips. Een fantastisch bedrijf om voor te werken, bovendien een bedrijf met een grote diversiteit aan interessante en uitdagende problemen. Natuurlijk ook een bedrijf dat regelmatig met reorganisaties te maken heeft. Daardoor heb ik in de loop der tijd verscheidene bazen gekend. De gemeenschappelijke noemer is echter, dat ik steeds de ruimte heb gekregen mijn numerieke kennis in te zetten en te vergroten. Beste Simon, Kees, Gerard, Cees, Ad, ik wil jullie van harte bedanken voor het in mij gestelde vertrouwen, voor het geven van de noodzakelijke ruimte, voor de perfecte werkomstandigheden en voor alles wat ik van jullie heb geleerd.

Ook mijn collega's wil ik natuurlijk hartelijk danken, zowel de collega's bij het Natuurkundig Laboratorium als bij de Scientific Computing Group. Een goede werksfeer draagt altijd bij aan het welslagen van de arbeidstaken.

Ten slotte, en zeker niet het minst, wil ik mijn naaste omgeving bedanken. Graag wil ik mijn kinderen en kleinkind bedanken. Zij zorgen voor de ontspanning die nodig is naast een drukke baan, zij doen het werk vergeten en herinneren je aan de werkelijk belangrijke zaken in het leven. Het laatste, maar zeer speciale, woord van dank is voor jou, Truus, voor alle steun die ik van je ontvang. Het is geweldig om jou aan mijn zij te weten. Dames en heren, u wil ik dank zeggen voor uw aandacht en aanwezigheid.

Ik heb gezegd.



- 1 G.H. Hardy, 'A Mathematician's Apology'
Cambridge University Press (1940)
- 2 J.M. Borwein and P.B. Borwein, 'Pi and the AGM'
John Wiley & Sons (1998)
- 3 S.J. Polak, C. den Heijer, W.H.A. Schilders, and P.A. Markowich,
'Semiconductor device modelling from the numerical point of view'
International Journal for Numerical Methods in Engineering,
volume 24, pagina's 763-838 (1987)
- 4 R.S. Varga, 'Matrix Iterative Analysis' Prentice Hall (1962)
- 5 P.G. de Gennes and J. Prost, 'The Physics of Liquid Crystals – 2'
Clarendon (1995)
- 6 <http://www.macsinet.org/>

Aan de Technische Universiteit Eindhoven is per 1 december 1999 prof.dr. W.H.A. Schilders benoemd als parttime hoogleraar Numerieke Wiskunde voor de Industrie aan de faculteit Wiskunde en Informatica.

Wil Schilders (1956) studeerde in 1978 (cum laude) af aan de Katholieke Universiteit Nijmegen. In 1980 promoveerde hij aan het Trinity College te Dublin. Sinds 1980 is hij werkzaam bij Philips, in eerste instantie bij de Mathematical Software Group, vanaf 1990 op het Natuurkundig Laboratorium. Zijn onderzoeksinteresse gaat uit naar de ontwikkeling van algoritmen om industriële problemen te simuleren, met name halfgeleiderproblemen, elektronische schakelingen en het ontwerp van MRI-systemen voor medische toepassingen. Gedurende 1994-2001 was hij bestuurslid van de Stichting Industriële en Toegepaste Wiskunde en redacteur van het blad ITW Nieuws.



Colofon

Productie:
Communicatie Service Centrum TU/e

Fotografie cover:
Rob Stork, Eindhoven

Ontwerp:
Plaza ontwerpers,
Eindhoven

Druk:
Drukkerij Lecturis,
Eindhoven

ISBN: 90-386-1103-X

Digitale versie:
www.tue.nl/bib/