

Het ontwerpen van stangenmechanismen (4)

Citation for published version (APA):

Dijksman, E. A. (1967). Het ontwerpen van stangenmechanismen (4). *Polytechnisch tijdschrift. Werktuigbouw*, 22(23), 984-992.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1967

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Het ontwerpen van stangenmechanismen

4*

4. DE STELLING VAN ROBERTS EN DE TOEVOEGING VAN KOPPELPUNTEN AAN KRUKSTANDEN

De STELLING van Roberts luidt:
Eenzelfde koppelkromme kan worden beschreven door het koppelpunt van drie verschillende stangenvierzijden.

Bewijs:

Er wordt uitgegaan van een willekeurige stangenvierzijde (A_0ABB_0) met koppeldriehoek ABE. Het koppelpunt E beschrijft dan bij beweging van de stangenvierzijde een zeer bepaalde koppelkromme.

De ingangsschakel A_0A van de stangenvierzijde (A_0ABB_0) wordt nu in een willekeurige stand gezet. Aan deze vierzijde wordt dan een tweede vierzijde toegevoegd, die uit de eerste wordt verkregen door verwisseling van de volgorde der bewegende stangen (zie figuur 55).

Men verkrijgt zo de vierzijde ($B_0^I B^I C^I A_0^I$), waarbij $\overline{B_0^I B^I} = \overline{AB}$, $\overline{B^I C^I} = \overline{BB_0}$, $\overline{C^I A_0^I} = \overline{A_0A}$ en $\overline{B_0^I C_0^I} \equiv \overline{A_0 B_0}$, terwijl bovendien $B_0^I B^I // AB$, $B^I C^I // BB_0$ en $C^I A_0^I // A_0A$.

Op de nieuwe koppelstang wordt een koppeldriehoek $B^I C^I E^I$ geplaatst en wel zo, dat $\triangle B^I C^I E^I \sim \triangle BEA$. De verkregen vierzijde ($B_0^I B^I C^I A_0^I$) wordt vervolgens

samen met haar koppeldriehoek $B^I C^I E^I$ om het punt A_0 rechtsom over de vaste hoek $\beta = \sphericalangle ABE$ verdraaid. Er ontstaat de vierzijde ($B_0^{II} B^{II} C^{II} A_0^{II}$) en de koppeldriehoek $B^{II} C^{II} E^{II}$ (zie figuur 56). Het is duidelijk, dat nu $B_0^{II} B^{II} // BE$ en $B^{II} E^{II} // BB_0$. Tenslotte wordt de met de index II aangeduide figuur meetkundig vermenigvuldigd met de constante factor $\lambda = -|\overline{BE}/\overline{BA}|$. Het meetkundige vermenigvuldigingscentrum wordt zó genomen, dat daarbij B_0^{II} in B_0 overgaat. Er ontstaat de vierzijde ($B_0 B'' C'' A_0$) met haar koppeldriehoek $B'' C'' E''$ (zie figuur 57). Nu geldt, dat $B_0 B'' // B_0^{II} B^{II} // BE$ en $B'' E'' // B^{II} E^{II} // BB_0$. Voorts is

$$\begin{aligned} \overline{B_0 B''} &= -|\overline{BE}/\overline{BA}| \cdot \overline{B_0^{II} B^{II}} = -|\overline{BE}/\overline{BA}| \cdot \overline{B_0^{II} B^{II}} \\ &= -|\overline{BE}/\overline{BA}| \cdot \overline{AB} = \overline{BE} \\ \text{en} \\ \overline{B'' E''} &= -|\overline{BE}/\overline{BA}| \cdot \overline{B^{II} E^{II}} = -|\overline{BE}/\overline{BA}| \cdot \overline{B^I E^I} \\ &= \overline{B^I C^I} = \overline{BB_0} \end{aligned}$$

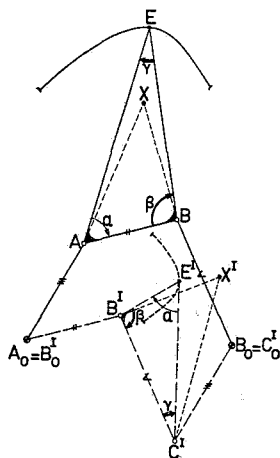
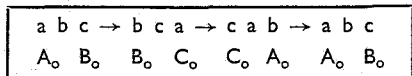
Hieruit volgt, dat $E'' = E$.

Met andere woorden: er is in iedere stand van de stangenvierzijde, waarvan men is uitgegaan, een toegevoegde vierzijde te vinden, waarbij het koppelpunt met het oorspronkelijke koppelpunt samenvalt. Uit de ontstaanswijze blijkt ook, dat de afmetingen van de toegevoegde vierzijde en van haar koppeldriehoek *onafhankelijk* zijn van de positie van de ingangsschakel A_0A van de oorspronkelijke vierzijde ten opzichte van haar gestel $A_0 B_0$. Hieruit volgt, dat voor iedere positie van de kruk A_0A de koppelpunten E'' en E samenvallen, zodat de koppelkromme die behoort bij de toegevoegde vierzijde, identiek is met die welke behoort bij de oorspronkelijke vierzijde.

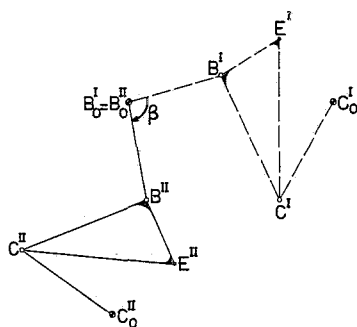
Voorts is aangetoond, dat $\square B_0 B E B''$ een parallellogram is, terwijl uit de ontstaanswijze van de toegevoegde vierzijde volgt, dat de gesteldriehoek $A_0 B_0 C_0$ gelijkvormig is met de beide koppeldriehoeken. Dus $\triangle A_0 B_0 C_0 \sim \triangle ABE \sim \triangle E B'' C''$.

Men vindt zo doorgaande, dat aan de vierzijde ($B_0 B'' C'' A_0$) met koppeldriehoek $B'' C'' E''$ is toegevoegd de vierzijde ($C_0 C'' A'' A_0$) met de koppeldriehoek $C'' A'' E''$ (zie figuur 58). Aan de laatste vierzijde is weer de oorspronkelijke vierzijde toegevoegd, zodat dan de kring is gesloten en geen nieuwe vierzijden meer verkregen worden. De stelling van Roberts is hiermee bewezen. Men kan nog opmerken, dat in de configuratie van Roberts, waarin de drie vierzijden en hun respectieve koppeldriehoeken zijn opgenomen, drie parallellogramen optreden, te weten $\square B_0 B E B''$, $\square C_0 C'' E C''$ en $\square A_0 A'' E A$.

Voorts is $\triangle A_0 B_0 C_0 \sim \triangle ABE \sim \triangle E B'' C'' \sim \triangle A'' E C''$. In het vervolg zal de configuratie van Roberts worden aangeduid met C_R . De cyclische verwisseling in de bewegende stangen uit C_R vindt plaats volgens het schema



55.



56.

***) Wetenschappelijk hoofdmedewerker aan de T.H. te Eindhoven. De tekeningen zijn verzorgd door de heer H. A. Bulten.

*) Deel 1, P.T. Werktuigbouw 22 (19) 808, (20) 847 (1967)
 Deel 2, P.T. Werktuigbouw 22 (21) 903 (1967)
 Deel 3, P.T. Werktuigbouw 22 (22) 948 (1967)

Ook kan worden opgemerkt, dat de verhoudingen der stanglengten van elke vierzijde uit C_R onafhankelijk zijn van de ligging van het koppelpunt in ieder van de drie koppelvlakken.

Daar in C_R drie parallelogrammen voorkomen, zijn telkens drie stangen in C_R aan te wijzen, die dezelfde hoekverdraaiingen doorlopen. De hoekverdraaiingen van de stangen A_0A , $A'C'$ en C_0C'' kunnen daarom worden aangeduid met dezelfde letter φ ; de hoekverdraaiingen van de stangen AB , A_0A' en B_0B'' met de letter ε en de hoekverdraaiingen van de stangen B_0B , $B''C''$ en C_0C' met ψ . De drie koppeldriehoeken ABE , $EB''C''$ en $A'EC'$ doorlopen de respectieve hoekverdraaiingen ε , ψ en φ .

STELLING 1:

Aan elk punt X van de koppeldriehoek ABE uit C_R is een punt X' van de koppeldriehoek $A'C'E$ toegevoegd, waarvan de koppelkromme gelijkvormig is met die welke door het punt X wordt doorlopen.

Daarbij wordt het aan het punt X toegevoegde punt X' gevonden met behulp van de gelijkvormigheidsrelatie:

$$\triangle ABX \sim \triangle A'X'C'$$

(De stelling is cyclisch voortzetbaar in C_R).

Het bewijs van deze stelling volgt uit de ontstaanswijze van de figuur van Roberts:

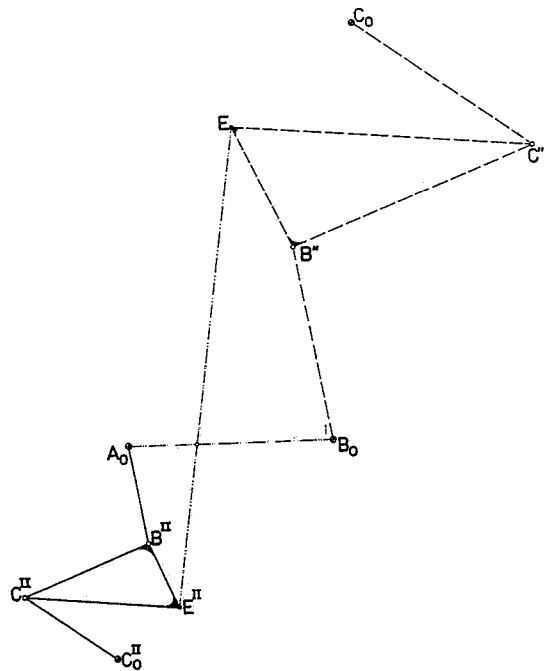
Aangetoond is reeds, dat de door de punten E en E^I beschreven koppelkrommen onderling gelijkvormig zijn, mits $\triangle ABE \sim \triangle E^I B^I C^I$.

Dit geldt voor ieder stel overeenkomstige punten X en X^I . Voorwaarde daartoe is steeds, dat $\triangle ABX \sim \triangle X^I B^I C^I$ en dat X resp. X^I een punt is van het met \overline{AB} respectievelijk met $\overline{B^I C^I}$ meebewegend koppelvlak. Daar bij de overgang van de met het Romeinse cijfer I aangeduide vierzijde met haar koppeldriehoek, naar de met een dubbel accent aangeduide figuur, uitsluitend sprake is van een gelijkvormigheids-transformatie, waarbij ook de gelijkvormigheid van de door ieder punt uit het koppelvlak beschreven koppelkromme bewaard blijft, is het duidelijk dat ook de punten X en X'' gelijkvormige koppelkrommen beschrijven, mits $\triangle ABX \sim \triangle X'' B'' C''$.

Het gelijkvormigheidsprincipe is dus nu bewezen voor overeenkomstige punten van de koppeldriehoeken ABE en $EB''C''$ uit C_R .

Dit proces op cyclische wijze in C_R voortzettend, vindt men, dat het gelijkvormigheidsprincipe ook geldt voor overeenkomstige punten van de koppeldriehoeken $EB''C''$ en $A'EC'$.

Voor deze punten geldt, dat $\triangle X'' B'' C'' \sim \triangle A'X'C'$, zodat tenslotte het gelijkvormigheidsprincipe ook geldt voor de

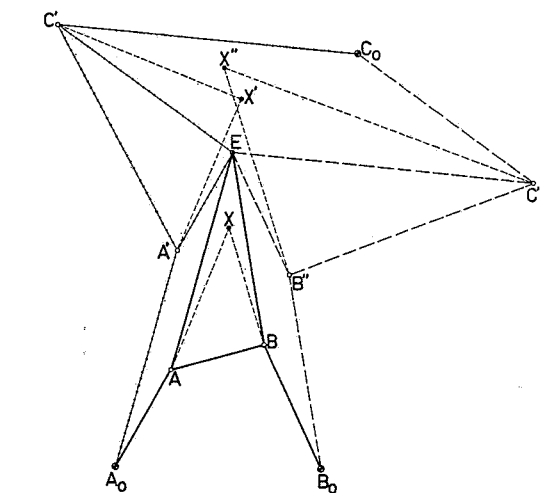


57.

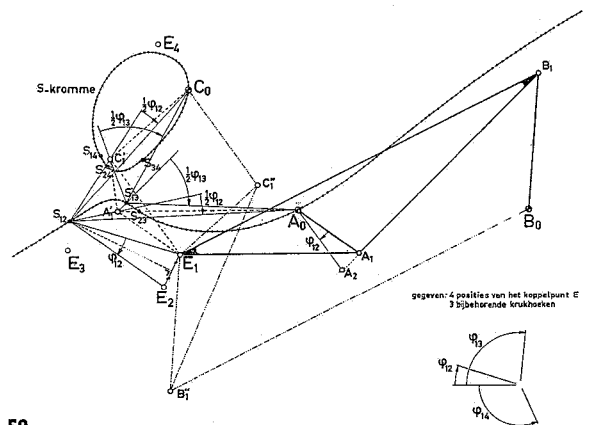
koppeldriehoeken ABE en $A'EC'$, mits $\triangle ABX \sim \triangle A'X'C'$. Daarmee is de stelling bewezen.

Wordt de opgave gesteld een stangenvierzijde te construeren als gegeven zijn de vier opeenvolgende posities E_1, E_2, E_3 en E_4 van het koppelpunt en bovendien de overeenkomstige door de stang a doorlopen hoeken $\sphericalangle A_1 A_0 A_2 = \varphi_{12}$, $\sphericalangle A_1 A_0 A_3 = \varphi_{13}$ en $\sphericalangle A_1 A_0 A_4 = \varphi_{14}$, dan zijn daarmee, op grond van het voorgaande, drie hoekverdraaiingen van de koppeldriehoek $A'EC'$ bekend (zie figuur 59). Aangezien van deze koppeldriehoek bovendien vier posities van het met deze koppeldriehoek verbonden koppelvlak bekend.

Er is dus voor de vier standen van dit koppelvlak ten opzichte van de gesteldriehoek een polenkromme te construeren, waarop de gestelpunten A_0 en C_0 kunnen worden gekozen. Deze polenkromme gaat door de zes polen $S_{12}, S_{23}, S_{31}, S_{14}, S_{43}$ en S_{42} , die zijn vastgelegd door de betrekkingen: $\overline{S_{ij} E_i} = \overline{S_{ij} E_j}$ en $\sphericalangle E_i S_{ij} E_j = \varphi_{ij} = \varphi_{ik} - \varphi_{jk}$ (waarbij $i \neq j \neq k \neq i$ en i, j en $k = 1, 2, 3$ of 4).

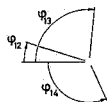


58.



59.

gegeven: 4 posities van het koppelpunt E
3 bijbehorende hoeken

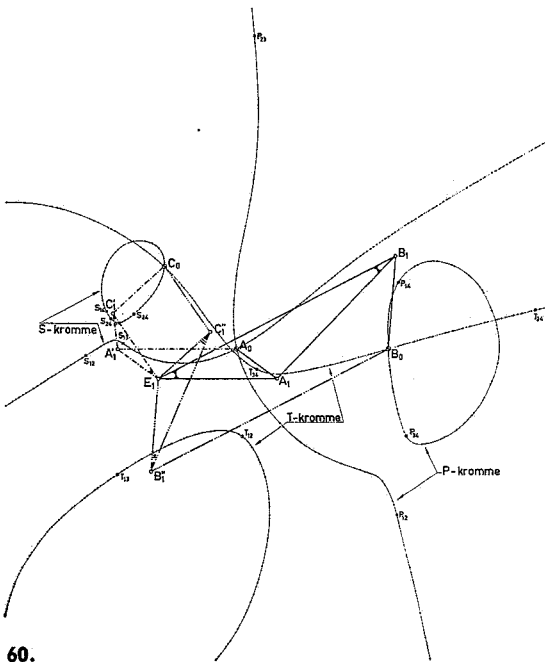


Voorts is $\sphericalangle A_1'S_1A_2' = \varphi_{12}$ en daar A_0 samen met S_{12} op de middelloodlijn van $A_1'A_2'$ ligt, is $\sphericalangle A_1'S_{12}A_0 = \varphi_{12}/2$. Net zo, is $\sphericalangle A_1'S_{13}A_0 = \varphi_{13}/2$.

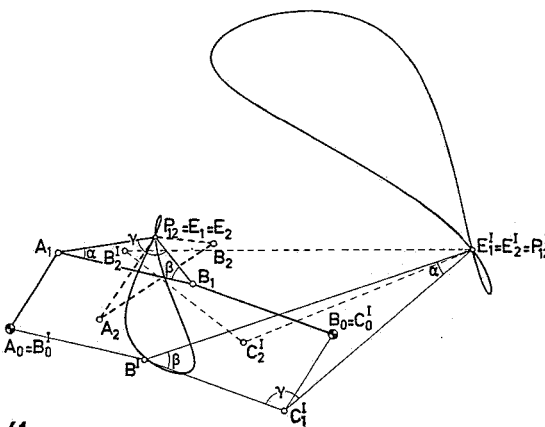
Uit de gevonden posities van de polen S_{12} en S_{13} en de gekozen positie van het punt A_0 op de polenkromme (S-kromme) is de ligging van het punt A_1' dus vast te stellen. Analoog kan ook met $\sphericalangle C_1'S_{12}C_0 = \varphi_{12}/2$ en $\sphericalangle C_1'S_{13}C_0 = \varphi_{13}/2$ de ligging van het punt C_1' worden bepaald. De stangenvierzijde ($C_0C_1'A_1'A_0$) en haar koppeldriehoek $C_1'A_1'E_1$ is dan volledig vastgelegd.

Met behulp van de configuratie van Roberts kunnen nu de twee toegevoegde vierzijden worden geconstrueerd, die dan beide aan de gestelde opgave voldoen. Dit laatste volgt uit het feit, dat de vierzijde met A_0B_0 respectievelijk B_0C_0 als gestel een stang A_0A respectievelijk C_0C' bezit, die met de gegeven hoekverdraaiingen φ_{12} , φ_{13} en φ_{14} om een gestelpunt A_0 respectievelijk C_0 roteert.

Zijn 4 standen van een van de drie koppeldriehoeken uit de configuratie van Roberts gegeven, dan vindt men C_0 en A_0 op de S-kromme; dat is de middelpuntskromme die behoort bij de vier standen van $\triangle C'A'E$ ten opzichte van de gesteldriehoek $A_0B_0C_0$; voorts vindt men A_0 en B_0 op de P-kromme; dat is de middelpuntskromme die behoort bij de vier standen van $\triangle ABE$ ten opzichte van de gestel-



60.



61.

driehoek en men vindt B_0 en C_0 op de T-kromme, de middelpuntskromme toegevoegd aan de vier standen van $\triangle B''C''E$ ten opzichte van de gesteldriehoek. De drie door middel van C_R aan elkaar toegevoegde S-, P- en T-kromme snijden elkaar achtereenvolgens in de gestelpunten A_0 , B_0 en C_0 (zie figuur 60).

Is A_0 eenmaal op de S-kromme gekozen, dan kan men in plaats van de keuze van C_0 op de S-kromme, ook B_0 op de nieuw te tekenen P-kromme kiezen. De P-kromme wordt dan vastgelegd door de vier standen van de zijde AE, die gevonden worden uit de vier standen van de zijde A'E met behulp van het parallellogram $A_0A'EA$. De P-kromme geeft een onmiddellijke indicatie van de mogelijke ligging van het punt B_0 .

Uit de afleiding van de stelling van Roberts volgt, dat de koppelkromme, voortgebracht door het koppelpunt E, gelijkvormig is met de koppelkromme die behoort bij de vierzijde ($B_0^I B^I C^I A_0^I$) en wordt voortgebracht door het koppelpunt E^I .

Wordt het koppelpunt E_1 in de pool P_{12} van het koppelvlak (A_1B_1) gekozen, dan is E_1 een dubbelpunt van de koppelkromme, omdat de twee standen $A_1B_1E_1$ en $A_2B_2E_2$ hetzelfde punt $E_1 = E_2 = P_{12}$ opleveren (zie figuur 61). Op grond van de in het voorgaande aangewezen gelijkvormigheid der koppelkrommen, is dan ook E_1^I een dubbelpunt.

Hieruit volgt, dat $E_1^I = E_2^I = P_{12}^I$, zodat tenslotte

$$\begin{aligned} \triangle A_1B_1P_{12} &\sim \triangle P_{12}^I B_1^I C_1^I \sim \triangle P_{12}^I B_1^I C_1^I \sim \\ &\sim \triangle P_{12}^I B_1^I C_1^I \sim \triangle T_{12} B_1'' C_1'' \sim \triangle A_1' S_{12} C_1' \end{aligned}$$

Evenzo is

$$\triangle A_1B_1P_{13} \sim \triangle A_1' S_{13} C_1' \text{ en } \triangle A_1B_1P_{14} \sim \triangle A_1' S_{14} C_1'$$

En voorts ook

$$\begin{aligned} \triangle A_2B_2P_{23} &\sim \triangle A_2' S_{23} C_2' \text{ en } \triangle A_2B_2P_{24} \sim \triangle A_2' S_{24} C_2' \text{ en} \\ &\triangle A_3B_3P_{34} \sim \triangle A_3' S_{34} C_3' \end{aligned}$$

Worden de polen P_{23} , P_{24} en P_{34} en evenzo de polen S_{23} , S_{24} en S_{34} overgebracht naar de stand 1 van de configuratie en worden deze polen aangeduid door de respectieve punten P_{23}^1 , P_{24}^1 , P_{34}^1 en S_{23}^1 , S_{24}^1 , S_{34}^1 , dan kunnen de volgende gelijkvormigheden worden genoteerd (zie figuur 62):

$$\begin{aligned} \triangle A_1B_1P_{23}^1 &\sim \triangle A_2B_2P_{23}^1 \sim \triangle A_2' S_{23}^1 C_2'^1 \sim \triangle A_1' S_{23}^1 C_1'^1 \\ \triangle A_1B_1P_{24}^1 &\sim \triangle A_2B_2P_{24}^1 \sim \triangle A_2' S_{24}^1 C_2'^1 \sim \triangle A_1' S_{24}^1 C_1'^1 \end{aligned}$$

en

$$\triangle A_1B_1P_{34}^1 \sim \triangle A_3B_3P_{34}^1 \sim \triangle A_3' S_{34}^1 C_3'^1 \sim \triangle A_1' S_{34}^1 C_1'^1$$

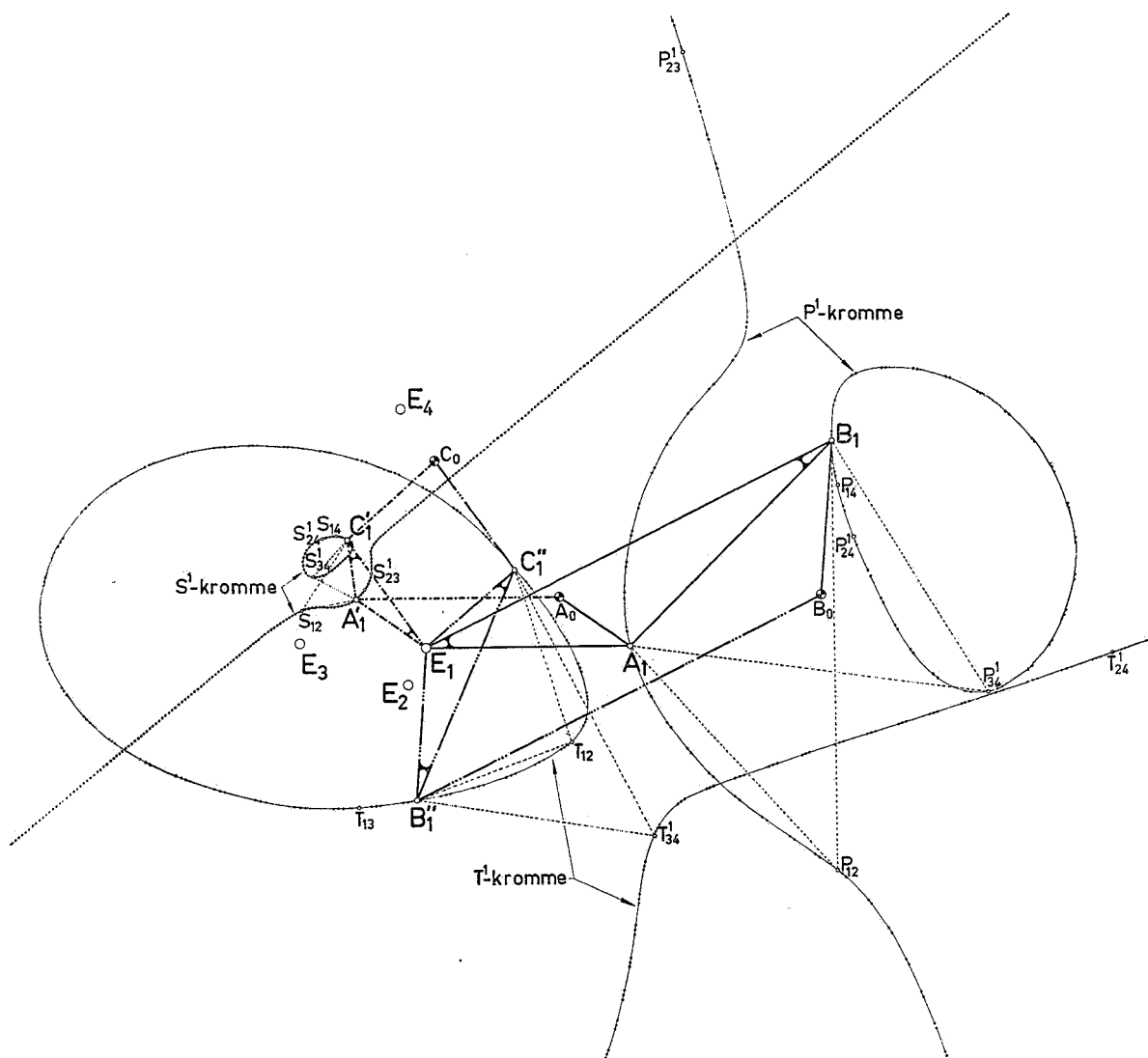
De polen P_{12} , P_{13} , P_{14} , P_{23} , P_{24} en P_{34} zijn de polen die behoren bij de vier standen van A_0B_0 ten opzichte van A_1B_1 . Ze liggen dus ook op de middelpuntskromme van deze vier standen ten opzichte van A_1B_1 . Daar deze kromme door de cirkelliggingpunten A_1 en B_1 gaat, wordt de kromme ook wel de cirkelliggingkromme van de stand 1 genoemd, die behoort bij de vier standen van AB ten opzichte van A_0B_0 . (In het vervolg wordt deze kromme kortweg met P¹-kromme aangeduid).

Evenzo zijn de polen S_{12} , S_{13} , S_{14} , S_{23} , S_{24} en S_{34} de polen die behoren bij de vier standen van A_0C_0 ten opzichte van $A_1' C_1'$. Ze liggen op de middelpuntskromme die bij deze vier standen hoort. De genoemde kromme is tevens de cirkelliggingkromme van stand 1, die hoort bij de vier standen van $A'C'$ ten opzichte van A_0C_0 . De kromme gaat door de cirkelliggingpunten A_1' en C_1' van het bijbehorende koppelvlak uit de configuratie. Ze zal in het vervolg S¹-kromme worden genoemd.

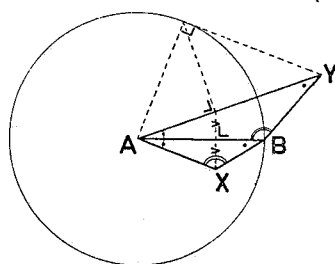
Tenslotte is de T¹-kromme de cirkelliggingkromme van stand 1, die behoort bij de vier standen van $\triangle B''C''E$ ten opzichte van $\triangle A_0B_0C_0$.

STELLING 2:

Indien een punt X_1' een punt is van de S¹-kromme uit C_R , dan



62.



is het punt X_1 , waarvoor $\triangle A_1 B_1 X_1 \sim \triangle A'_1 X'_1 C'_1$, een punt van de P^1 -kromme.

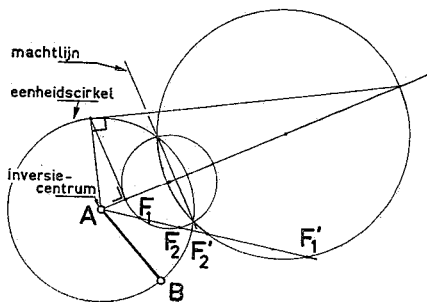
Bewijs:

Aangezien op grond van stelling 1 van dit hoofdstuk de punten X en X' gelijkvormige koppelkrommen doorlopen, geldt voor de standen 1, 2, 3 en 4 van C_R de relatie:

$$\square X'_1 X'_2 X'_3 X'_4 \sim \square X_1 X_2 X_3 X_4$$

Is $\square X'_1 X'_2 X'_3 X'_4$ een koordevierhoek, dan is $\square X_1 X_2 X_3 X_4$ dat ook. Hieruit volgt, dat in het geval X'_1 een cirkelligingspunt is van $\triangle A'_1 C'_1 E_1$, dat ook het geval is met het punt X_1 van $\triangle A_1 B_1 E_1$. Daarmee is het gestelde bewezen. (De stelling is cyclisch voortzetbaar in C_R).

63.



STELLING 3:

Ieder punt X van de koppeldriehoek ABE uit C_R , dat is toegevoegd aan een overeenkomstig punt X' van de koppeldriehoek C'E waarbij $\triangle ABX \sim \triangle A'X'C'$, kan worden verkregen uit het punt X' door een zelfde afbeelding, die bestaat uit het produkt van een gelijkvormigheidstransformatie, een inversie aan een cirkel met middelpunt A en straal AB en een spiegeling ten opzichte van de koppelstang AB.

Bewijs:

Bij de gelijkvormigheidstransformatie wordt ieder punt X' van het koppelvlak A'C'E in een zodanig punt Y getransformeerd, dat daarbij A' in A en C' in B overgaat. Dit kan

64.

gebeuren door rotatie om een vast punt, gevolgd door een meetkundige vermenigvuldiging met datzelfde punt als vermenigvuldigingscentrum. (Het is hier overigens niet noodzakelijk het rotatiecentrum en het vermenigvuldigingscentrum te laten samenvallen). Het is duidelijk, dat bij deze transformatie bepaalde krommen in daarmee gelijkvormige krommen overgaan.

Ook geldt, dat $\triangle A'X'C' \sim \triangle AYB$, zodat met het gegeven waarbij $\triangle A'X'C' \sim \triangle ABX$, tussen de punten X en Y de relatie $\triangle AYB \sim \triangle ABX$ moet bestaan.

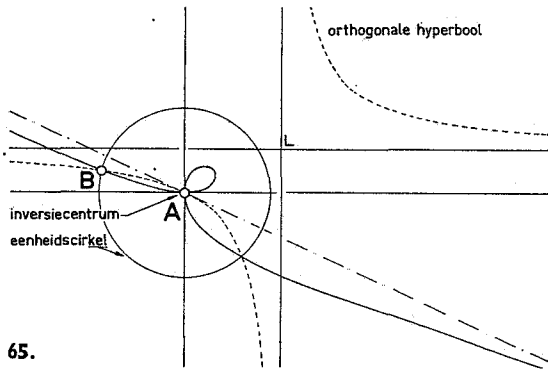
Hieruit volgt, dat $AY \cdot AX = AB^2$ en dat $\sphericalangle BAY = \sphericalangle BAX$ (zie figuur 63).

De met deze betrekkingen overeenkomende transformatie is inderdaad het produkt van een inversie aan een cirkel met middelpunt A en straal \overline{AB} , en een spiegeling ten opzichte van de koppelstang AB. Het bewijs van de stelling is hiermee geleverd. (De stelling is cyclisch voortzetbaar in C_R).

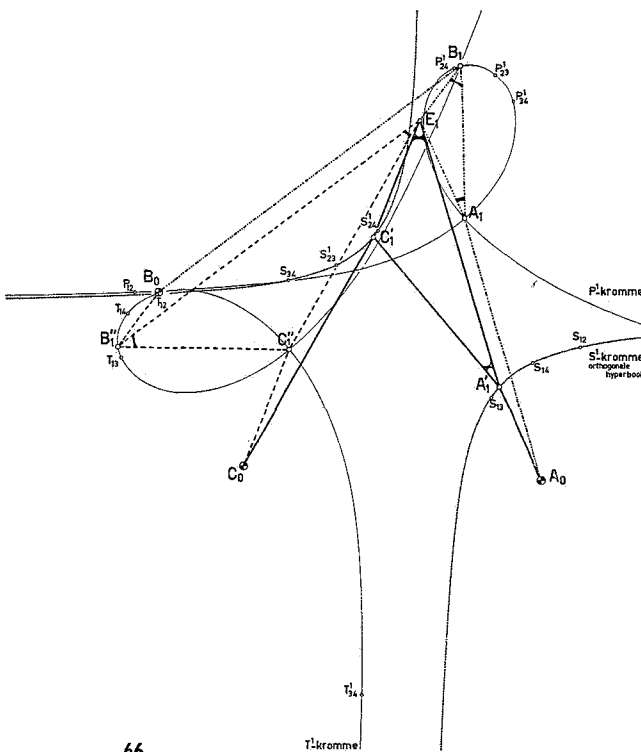
Het is duidelijk, dat alleen bij de inversie aan de cirkel \overrightarrow{AB} , de vorm van een kromme kan veranderen.

STELLING 4:

De inversie aan een cirkel \overrightarrow{AB} voert een cirkel die niet door A



65.



66.

gaat, opnieuw in een cirkel over. De drie cirkels hebben dezelfde machtlijn (zie figuur 64).

Bewijs:

Iedere lijn door de oorsprong snijdt de ongetransformeerde cirkel in twee punten F_1 en F_2 , die, indien ze reëel zijn, in twee andere punten F'_1 en F'_2 worden getransformeerd. Men heeft:

$$\overline{AF'_1} \cdot \overline{AF'_2} = \frac{\overline{AB}^4}{\overline{AF_1} \cdot \overline{AF_2}} = \text{constant.}$$

De macht van het punt A ten opzichte van de getransformeerde kromme is constant; de getransformeerde kromme is dus een cirkel. Daar de snijpunten van de ongetransformeerde cirkel met de cirkel \overrightarrow{AB} invariant zijn ten aanzien van de transformatie, gaat ook de getransformeerde cirkel door deze punten en is de verbindingslijn hiervan de machtlijn van de drie cirkels.

Opmerking: Gaat de ongetransformeerde cirkel wel door het punt A, dan is de machtlijn de getransformeerde van deze cirkel. Dit volgt uit het feit, dat de getransformeerde cirkel een oneindig grote straal krijgt.

Daar de inversie aan een cirkel een omkeerbare transformatie is, is ook het omgekeerde waar: De inversie aan een cirkel voert een rechte, die niet door A gaat, in een cirkel over, welke door de snijpunten van de rechte met de cirkel \overrightarrow{AB} en door A gaat.

Een rechte die wel door A loopt, gaat na transformatie in zichzelf over.

STELLING 5:

De inversie aan een cirkel \overrightarrow{AB} voert een orthogonale hyperbool, die door het punt A gaat, over in een circulaire kromme van de derde graad met een dubbelpunt in A en met loodrecht op elkaar staande dubbelpuntsraaklijnen, en omgekeerd (zie figuur 65).

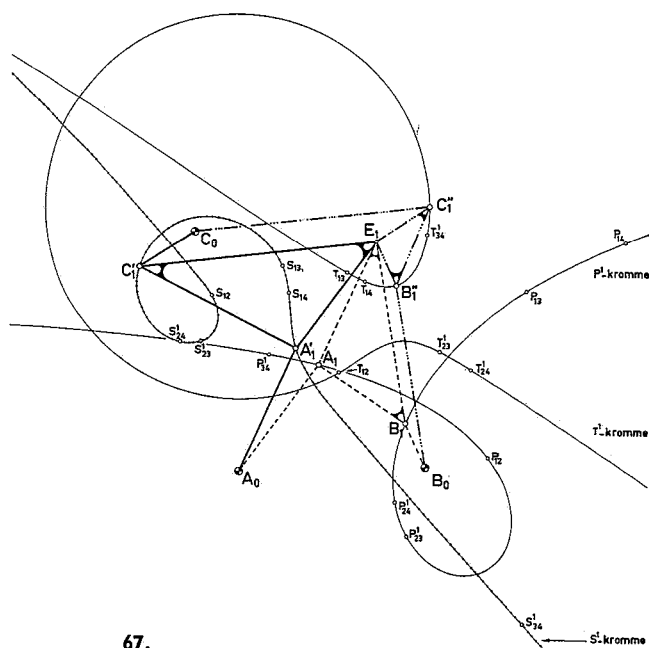
Bewijs:

Daar de twee loodrecht op elkaar staande asymptoten van de hyperbool zich transformeren in twee cirkels, die in A loodrecht op elkaar staan en de raaklijnen aan deze cirkels samenvallen met de raaklijnen aan de getransformeerde kromme in het punt A, is het punt A een dubbelpunt van deze kromme en staan in A de dubbelpuntsraaklijnen loodrecht op elkaar. Iedere rechte door A snijdt de getransformeerde kromme in drie punten, te weten, in het dubbel te tellen punt A en in nog een derde punt, dat het getransformeerde punt is van het snijpunt van de rechte met de hyperbool dat niet met A samenvalt.

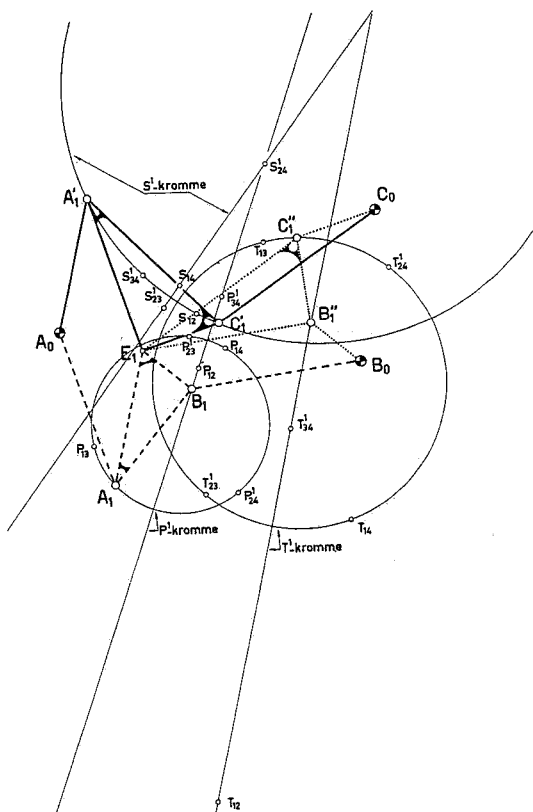
De getransformeerde kromme is dus van de 3e graad. De raaklijn in het punt A aan de hyperbool is tevens de enige asymptotische richting van de getransformeerde kromme: de oneindig verre rechte snijdt deze kromme dus in het asymptotisch punt en in twee toegevoegde complexe punten.

De hyperbool kan beschouwd worden als de meetkundige plaats van snijpunten van overeenkomstige exemplaren van twee lijnenwaaiers. De inversie aan de cirkel \overrightarrow{AB} transformeert iedere lijnenwaaier met een basispunt, dat niet met A samenvalt, in een cirkelbundel met basispunten in A en in het getransformeerde basispunt van de lijnenwaaier. De getransformeerde kromme is dus de meetkundige plaats van de snijpunten van overeenkomstige exemplaren van twee cirkelbundels. Hiertoe horen ook de isotrope punten, zodat de getransformeerde kromme een circulaire kromme is. Hiermee is het bewijs van de stelling geleverd.

Uit de stellingen 2 en 3 volgt onmiddellijk:



67.



68.

STELLING 6:

De S^1 -kromme uit C_R is gelijkvormig met een kromme, die na spiegeling ten opzichte van de koppelstang AB de, ten opzichte van een cirkel met middelpunt in A en straal AB genomen inverse is van de P^1 -kromme.

(De stelling is cyclisch voortzetbaar in C_R).

Uit het voorgaande is tevens gebleken, dat de zes polen $S_{1,2}, S_{1,3}, S_{1,4}, S_{1,24}$ en $S_{1,34}$, die de hoekpunten zijn van drie poolvierhoeken, waarvan elk stel overstaande zijden door ieder punt van de S^1 -kromme onder gelijke hoeken wordt gezien, zich op dezelfde wijze transformeren naar het overeenkomstige stel polen van de P^1 -kromme, als ieder ander punt van de S^1 -kromme.

In het vervolg zal worden nagegaan hoe het verband is tussen de onderscheiden ontaardingsgevallen van de cirkelliggingskrommen van de drie koppeldriehoeken uit de configuratie van Roberts.

STELLING 7:

Is de S^1 -kromme uit C_R uiteengevallen in een orthogonale hyperbool door minstens vier polen en in de oneigenlijke rechte, dan is de P^1 -kromme ontaard in een polenkromme met een dubbelpunt in A_1 en de T^1 -kromme in een polenkromme met een dubbelpunt in C_1 ; of cyclisch voortgezet in C_R (zie figuur 66).

Bewijs:

Daar bijvoorbeeld $\square S_{1,3}S_{1,32}S_{1,24}S_{4,1}$ een parallellogram is, is de S^1 -kromme uiteengevallen in de oneigenlijke rechte en in een orthogonale hyperbool door de vier polen $S_{1,3}, S_{1,23}, S_{1,4}$ en $S_{1,24}$ en door de punten A_1 en C_1 . Op grond van de stellingen 5 en 6 is de P^1 -kromme dan ontaard in een circulaire kromme door B_1 met loodrecht op elkaar staande dubbelpuntsraaklijnen in het punt A_1 . Toepassing van stelling 6 deel 1 leidt dan tot de conclusie, dat ieder van de drie poolvierhoeken $P_{12}P_{1,23}P_{1,34}P_{4,1}, P_{1,2}P_{1,24}P_{1,43}P_{3,1}$ en $P_{1,3}P_{1,32}P_{1,24}P_{4,1}$ een raaklijnenvierhoek is. Daar bij de overgang van $\triangle ABE$ naar $\triangle B''C''E$ het van B_1 afkomstige punt B_1'' inversiecentrum is, behoudt daarbij de cirkelliggingskromme haar dubbelpunt. Dit punt is punt C_1'' , aangezien bij de daarop volgende overgang van $\triangle B''C''E$ naar $\triangle A'C'E$ een orthogonale hyperbool door het inversiecentrum C_1' ontstaat. De T^1 -kromme is dus een polenkromme door B_1'' met loodrecht op elkaar staande dubbelpuntsraaklijnen in het punt C_1'' (zie figuur 66). $\square T_{3,1}T_{3,2}T_{1,24}T_{4,1}$ is dus ook een raaklijnenvierhoek, waarmee de stelling bewezen is.

STELLING 8:

Is de S^1 -kromme uit C_R een polenkromme met een dubbelpunt dat niet samenvalt met een der uiteinden van de koppelstang $A'C'$, dan zijn ook de P^1 - en de T^1 -kromme polenkrommen met een dubbelpunt dat niet met een der uiteinden van de betrokken koppelstang samenvalt (zie figuur 67).

Daar in dit geval het dubbelpunt van de S^1 -kromme niet met A_1 , of met C_1 samenvalt, valt geen enkel dubbelpunt met een inversiecentrum samen, zodat ieder dubbelpunt aan een eindig daarop volgend dubbelpunt wordt toegevoegd.

Ieder van de drie aan elkaar toegevoegde cirkelliggingskrommen heeft dus een dubbelpunt, zodat de daarbij horende poolvierhoeken raaklijnenvierhoeken zijn.

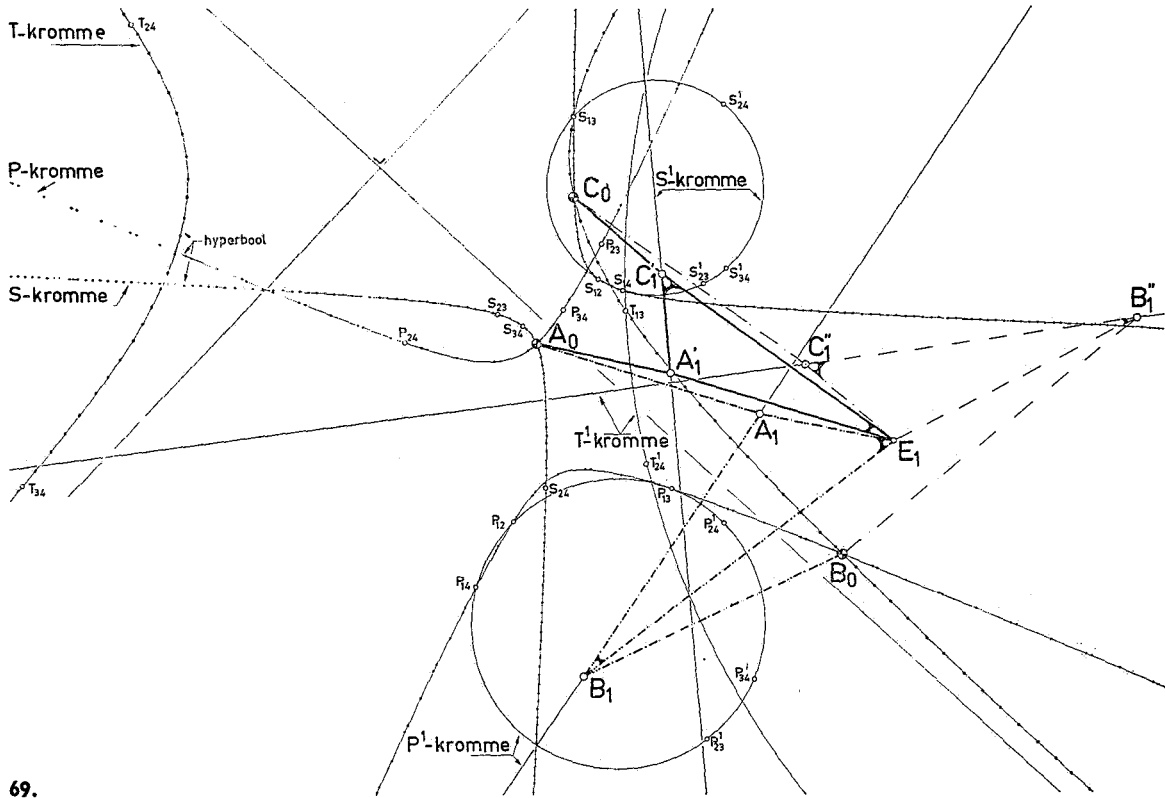
STELLING 9:

is de cirkelliggingskromme in de stand 1 van enige koppeldriehoek uit C_R ontaard in een cirkel en een rechte door het middelpunt van deze cirkel, dan is dat in het algemeen ook het geval met de cirkelliggingskrommen van de beide andere koppeldriehoeken uit C_R . Ligt een der bewegende draaipunten in de stand 1 van C_R op de cirkel respectievelijk de rechte als tak van de bijbehorende cirkelliggingskromme, dan is dat ook het geval met het bewegende draaipunt dat bij hetzelfde gestelpunt van C_R hoort.

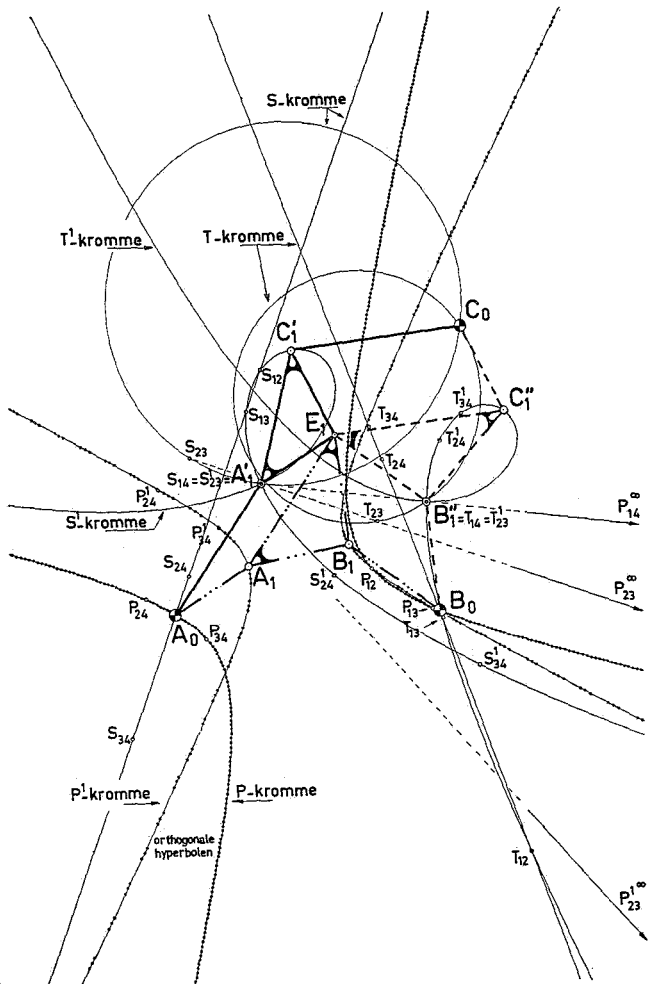
Als niet iedere koppelstang een tak is van de cirkelliggingskromme, is in het algemeen steeds een en nooit meer dan een rechte als tak te vinden, waarop zich geen enkel bewegend draaipunt bevindt (zie figuur 68).

Bewijs:

Het is geen verbijzondering, wanneer van de S^1 -kromme wordt aangenomen, dat zij ontaardt in een cirkel en een rechte. Gaat men uit van het geval dat de cirkelliggingspunten A_1 en C_1 beide op de cirkel liggen, dan is volgens stelling 4 en de opmerking onder deze stelling en stelling 6, de P^1 -kromme uiteengevallen in een cirkel door A_1 en een



69.



70.

rechte door B_1 , en door het middelpunt van deze cirkel. Zet men dit voort, dan blijkt de T^1 -kromme een rechte door B''_1 , en een cirkel door C''_1 , te zijn.

Op dezelfde wijze leidt men af, dat in het geval de S^1 -kromme bestaat uit een cirkel door A'_1 , en een rechte door C'_1 , dat dan de P^1 -kromme bestaat uit een cirkel door A_1 en B_1 , en uit een rechte, en dat de T^1 -kromme is opgebouwd uit een cirkel door B''_1 , en een rechte door C''_1 .

Is de S^1 -kromme uiteengevallen in een rechte door A'_1 , en een cirkel door C'_1 , dan is de P^1 -kromme uiteengevallen in een cirkel door B_1 , en een rechte door A_1 , en de T^1 -kromme in een cirkel door B''_1 , en C''_1 , en in een rechte door het middelpunt van deze cirkel.

Is tenslotte de koppelstang $A'_1C'_1$ een tak van de S^1 -kromme, dan is iedere koppelstang van de configuratie een tak van de daarbij horende cirkeliggingskromme. Het bewijs van de stelling is daarmee geleverd. Figuur 68 geeft een van de hier besproken gevallen weer.

STELLING 10:

Is de middelpuntskromme van enige koppeldriehoek uit C_R uiteengevallen in een orthogonale hyperbool door de zes polen en door de twee vaste draaipunten van de betrokken stangen-vierzijde en in de oneigenlijke rechte, dan is dat ook het geval met de middelpuntskrommen van de beide andere koppeldriehoeken uit C_2R (zie figuur 69).

Bewijs:

Het is geen verbijzondering, wanneer van de S-kromme wordt aangenomen, dat zij uiteengevallen is in een orthogonale hyperbool door A_0 en C_0 en in de oneigenlijke rechte. Op grond van stelling 10 deel 1 is dan de hierbij horende S^1 -kromme uiteengevallen in de rechte $A'_1C'_1$, en in een cirkel door de polen $S_{12}, S'_{23}, S_{31}, S_{14}, S'_{42},$ en S'_{43} . (Daar de punten van de oneigenlijke rechte aan deze cirkel zijn toegevoegd, kunnen A'_1 en C'_1 , die zijn toegevoegd aan de respectieve punten A_0 en C_0 van de hyperbool alleen op de rechte liggen, die een tak is van de cirkeliggingskromme).

Op grond van stelling 9 ontardt dan de P^1 -kromme in de rechte A_1B_1 en in een cirkel.

Daar het inversiecentrum het punt A_1 is, dat een punt vormt van deze rechte, is bij overgang van $\triangle A'_1C'_1E$ naar $\triangle A_1B_1E$ de cirkel in een cirkel en de rechte in een andere rechte overgegaan. De P^1 -kromme is dus uiteengevallen in de rechte A_1B_1 en in de cirkel door de zes polen $P_{12}, P_{13}, P_{123}, P_{124}, P_{143}$ en P_{41} . De overeenkomstige middelpuntskromme is dus op grond van stelling 10 deel 1 weer uiteengevallen in een hyperbool door A_0 en B_0 en in de oneigenlijke rechte. De redenering blijkt cyclisch voortzetbaar, zodat de stelling is bewezen.

STELLING 11:

Is de S-kromme van C_R ontardt in een rechte door vier polen en A_0 en in een cirkel door twee polen en C_0 , dan is de P-kromme uiteengevallen in een orthogonale hyperbool door vier polen en A_0 en B_0 en in de oneigenlijke rechte door twee polen, terwijl de T-kromme uiteengevallen is in een rechte door vier polen en B_0 en in een cirkel door twee polen en C_0 , en cyclisch voortgezet in C_R (zie figuur 70).

Bewijs:

Op grond van stelling 12 deel 1 ontardt de S^1 -kromme in een polenkromme door C'_1 met een dubbelpunt in $S'_{23} =$

$= S_{14}$ dat samenvalt met A'_1 , doordat bij de isogonale transformatie de gehele rechte door A_0 aan één punt is toegevoegd. Met behulp van stelling 7 kan worden afgeleid, dat de P^1 -kromme bestaat uit een orthogonale hyperbool door A_1 en B_1 en door de hoekpunten van het parallellogram $P_{12}P_{124}P_{143}P_{31}$ en uit de oneigenlijke rechte door P_{23}^∞ en P_{14}^∞ . Voorts is de T^1 -kromme een polenkromme door C'_1 met een dubbelpunt in $B''_1 = T'_{23} = T_{14}$. Daar $\square P_{12}P_{24}P_{43}P_{31}$ weer een parallellogram is, bestaat de P-kromme uit een orthogonale hyperbool door vier polen en A_0 en B_0 en uit de oneigenlijke rechte door P_{23}^∞ en P_{14}^∞ . Tenslotte leidt de gedaante van de T^1 -kromme met stelling 12 deel 1 tot de ontarding van de T-kromme in een cirkel door twee polen en C_0 en in een rechte door vier polen en B_0 . (Het dubbelpunt $B''_1 = T'_{23} = T_{14}$ is daarbij weer toegevoegd aan de rechte door T_{12}, T_{24}, T_{43} en T_{31} en door B_0).

STELLING 12:

Is de S-kromme van C_R ontardt in een rechte door vier polen en in een cirkel door de twee gestelpunten en door twee polen, dan is dit ook het geval met de P- en de T-kromme van C_R (zie figuur 72).

Bewijs:

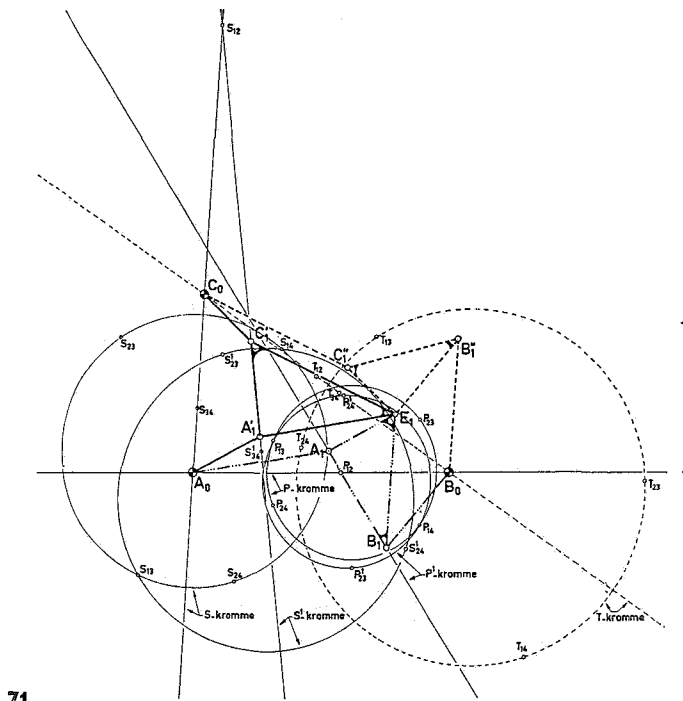
Op grond van stelling 12 deel 1 leidt de gedaante van de S-kromme tot de ontarding van de S^1 -kromme in een polenkromme door A'_1 en C'_1 met een dubbelpunt in $S'_{23} = S_{14}$. Met stelling 8 leidt dit tot de ontarding van de P^1 -kromme in een polenkromme door A_1 en B_1 met een dubbelpunt in $P'_{23} = P_{14}$. Stelling 12 deel 1 geeft daarmee een uiteenvallen van de P-kromme in een rechte door vier polen en in een cirkel door de gestelpunten A_0 en B_0 en door twee polen. Voor de gedaante van de T-kromme geldt een overeenkomstige afleiding.

STELLING 13:

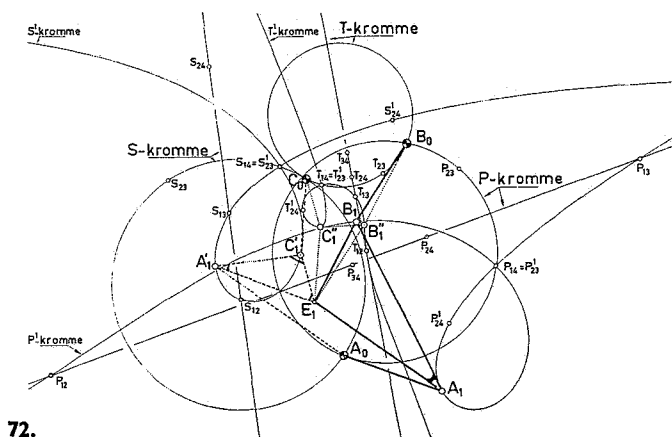
Is de S-kromme van C_R ontardt in een cirkel door vier polen en in de gestellijn door twee polen, dan is dit ook het geval met de P- en de T-kromme van C_R (zie figuur 71).

Bewijs:

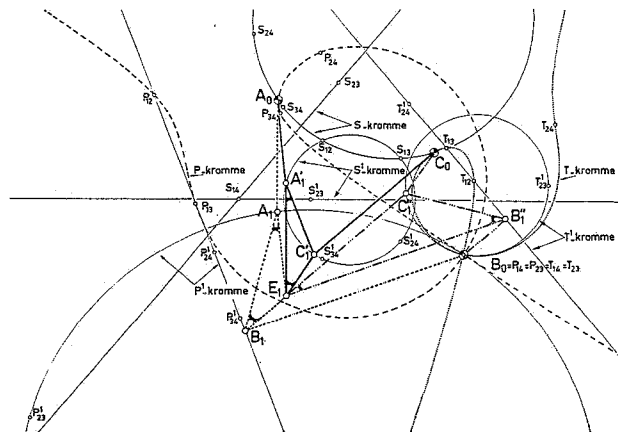
Op grond van stelling 11 deel 1 leidt de gedaante van de S-kromme tot de ontarding van de S^1 -kromme in een cirkel door vier polen en in een rechte door twee polen. Daar de rechte aan de gestellijn A_0C_0 is toegevoegd, is deze rechte de koppelstang $A'_1C'_1$. Stelling 9 geeft daarmee een uiteenvallen van de P^1 -kromme in een cirkel door vier polen en in de koppelstang A_1B_1 door twee polen. Met stelling 11 deel 1 is dan de P-kromme ontardt in een cirkel door vier polen en in de gestellijn A_0B_0 door twee polen. Voor de gedaante van de T-kromme geldt een overeenkomstige afleiding.



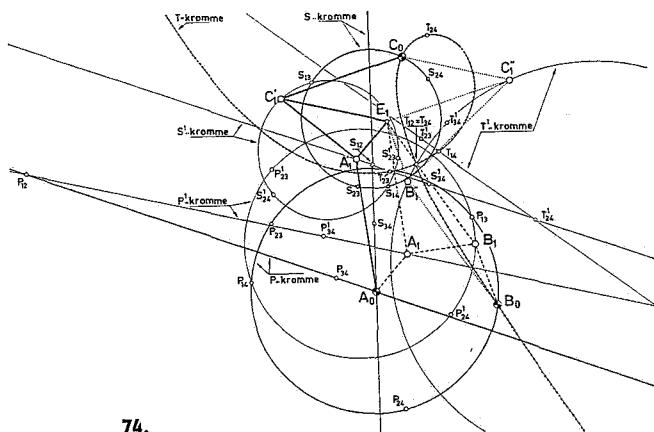
71.



72.



73.



74.

STELLING 14:

Is de S-kromme van C_R ontaard in een rechte door twee polen en in een cirkel door vier polen en door A_0 en C_0 , dan is de P-kromme ontaard in een polenkromme door A_0 met een dubbelpunt in B_0 en de T-kromme in een polenkromme door C_0 met een dubbelpunt in B_0 , en cyclisch voortgezet in C_R (zie figuur 73).

Bewijs:

Op grond van stelling 11 deel 1 leidt de gedaante van de S-kromme tot de ontaarding van de S^1 -kromme in een cirkel door vier polen en in een rechte door twee polen. Daar deze cirkel aan de cirkel door A_0 en C_0 is toegevoegd, gaat de eerstgenoemde door A'_1 en C'_1 . Stelling 9 geeft daarmee een uiteenvallen van de P^1 -kromme in een cirkel door twee polen en door A_1 en in een rechte door vier polen en door B_1 . Nogmaals toepassen van stelling 9 leidt tot de ontaarding van de T^1 -kromme in een cirkel door twee polen en door C''_1 en in een rechte door vier polen en door B''_1 . Op grond van stelling 13 deel 1 is dan de T-kromme een polenkromme door C_0 met een dubbelpunt in $T_{23} = T_{14}$. Daar hierbij de rechte door B''_1 aan het dubbelpunt is toegevoegd en B''_1 het punt B_0 bij zich heeft, is $B_0 = T_{14} = T_{23}$. Dezelfde stelling geeft voor de P-kromme een polenkromme door A_0 met een dubbelpunt in $B_0 = P_{14} = P_{23}$.

STELLING 15:

Is de S-kromme van C_R ontaard in een cirkel door vier polen en C_0 en in een rechte door twee polen en A_0 , dan is de P-kromme uiteengevallen in een cirkel door vier polen en B_0 en in een rechte door twee polen en A_0 , terwijl de T-kromme ontaard is in een polenkromme door B_0 en C_0 met een dubbelpunt, dat niet in B_0 of C_0 ligt (zie figuur 74).

Bewijs:

Op grond van stelling 11 deel 1 leidt de gedaante van de S-kromme tot de ontaarding van de S^1 -kromme in een cirkel door vier polen en C'_1 en in een rechte door twee polen en A'_1 . Stelling 9 geeft daarmee een uiteenvallen van de P^1 -kromme in een cirkel door vier polen en B_1 en in een rechte door twee polen en A_1 . Herhaald toepassen van stelling 9 leidt dan tot het uiteenvallen van de T^1 -kromme in een cirkel door twee polen en door C''_1 en B''_1 , en in een rechte door vier polen. De gedaante van de P^1 -kromme geeft dan met stelling 11 deel 1 een cirkel door vier polen en B_0 en een rechte door twee polen en A_0 voor de gedaante van de P-kromme. Voorts leidt de gedaante van de T^1 -kromme met stelling 13 deel 1 tot de ontaarding van de T-kromme in een polenkromme door B_0 en C_0 met een dubbelpunt in $T_{12} = T_{34}$ dat buiten de gestelpunten ligt.

STELLING 16:

Bestaat de S-kromme in C_R uit een cirkel door zes polen en uit de gestellijn A_0C_0 , dan is de P-kromme een polenkromme door B_0 met een dubbelpunt in A_0 en de T-kromme is een polenkromme door B_0 met een dubbelpunt in C_0 , en cyclisch voortgezet in C_R (zie figuur 75).

Bewijs:

Op grond van stelling 9 deel 1 bestaat de S^1 -kromme uit een orthogonale hyperbool door zes eindige polen en A'_1 en C'_1 en uit de oneigenlijke rechte (zie ook figuur 66). De P^1 -kromme is dan op grond van stelling 7 een polenkromme door B_1 met een dubbelpunt in A_1 . Hieruit volgt met stelling 14 deel 1, dat de P-kromme een polenkromme is door B_0 met een dubbelpunt in A_0 . Anderzijds leidt de gedaante van de P^1 -kromme op grond van stelling 7 tot een polenkromme door B''_1 met een dubbelpunt in C''_1 als T^1 -kromme. De T-kromme is dan op grond van stelling 14 deel 1 een polenkromme door B_0 met een dubbelpunt in C_0 (wordt vervolgd)

75.

