

**MASTER**

**De eendimensionale Helmholtzvergelijking en haar oplossingsmethoden**

van Vroonhoven, J.B.

*Award date:*  
1970

[Link to publication](#)

**Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

DE EENDIMENSIONALE HELMHOLTZVERGELIJKING EN HAAR OPLOSSINGSMETHODEN

Verslag van het afstudeerwerk van  
J.B. van Vroonhoven  
in de groep Theoretische Natuurkunde  
onder supervisie van Prof.Dr.L.J.F.Broer.

Technische Hogeschool Eindhoven,  
september 1970.

Inhoudsopgave.

pag.	
2	Notaties.
3	Inleiding.
6	Probleemstelling.
7	Operatoren.
10	De equivalentie van de reeks volgens Broer en de reeks volgens Bremmer.
12	De splitsing in een doorgelaten en een gereflecteerde golf.
18	De steile gradient oplossing.
21	Het diagonalisatieproces volgens van Kampen.
23	Reflectie en transmissie-coefficient.
28	Over de constructie van exakte oplossingen.
26	Appendix 1.
38	Literatuurverwijzing.

Notaties.

Enige notaties met verwijzing naar pagina van definitie.

3  $b(\xi) = \frac{k'(\xi)}{2k(\xi)}$

4  $g(\xi) = b^2(\xi) + b'(\xi)$

16  $g_-(\xi) = b^2(\xi) - b'(\xi)$

8  $G, G^+, G^-, G_+, G_-$

5  $L, L^+, L^-$

12 L.T. [q], duidt op Liouville-transformatie met functie q

5  $U_+ = U_0 + U_2 + U_4 + \dots$

5  $U_- = U_1 + U_3 + U_5 + \dots$

8  $\Gamma^+, \Gamma^-$

5  $\delta(x) = \frac{1}{k^2(x)} \cdot k^{\frac{1}{2}}(x) \frac{d^2}{dx^2} k^{-\frac{1}{2}}(x)$

- ' betekent afgeleide nemen naar de variabele, die blijkt uit de context

- (X)<sub>j</sub> geeft literatuur verwijzing, waarbij X duidt op de beginletter(s) van de auteur(s); j op de j<sup>o</sup> aangehaalde publicatie van de auteur(s)

Inleiding.

Aan de hand van een model uit de optica geeft Bremmer een oplossing van de golfvergelijking:

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2(x) \right] y(x) = 0 \quad (0-1)$$

en wel door het gedrag te beschouwen van een vlakke golf die loodrecht invalt op een medium dat opgebouwd is uit lagen met constante brekingsindex. Zie hiervoor (B). Bremmer vindt dan een oplossing van (0-1) in de vorm:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_0^{\infty} u_n(x) \text{ met} \\ u_0(x) &= \left( \frac{1}{k(x)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp i \int^x k(\sigma) d\sigma \\ u_{2n}(x) &= \left( \frac{1}{2k(x)} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^x ds \frac{k'(s)}{k(s)} u_{2n-1}(s) \exp i \int_s^x k(\sigma) d\sigma \\ u_{2n+1}(x) &= - \left( \frac{1}{2k(x)} \right)^{\frac{1}{2}} \int_x^{\infty} ds \frac{k'(s)}{k(s)} u_{2n}(s) \exp i \int_x^s k(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (0-2)$$

De convergentie-voorwaarde voor deze reeks is  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{k'(s)}{2k(s)} \right| ds \leq \frac{1}{2}\pi$  (A).

Door de Liouville-transformatie:

$$u_n = \frac{1}{k(x)} U_{2n}, \quad \xi = \int^x k(\sigma) d\sigma \quad (0-3)$$

gaat (0-2) over in een voor ons doel meer overzichtelijke vorm:

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \sum_0^{\infty} U_n(\xi) \\ U_0(\xi) &= \exp i\xi \\ U_{2n+1}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\xi} \exp i(\eta-\xi) b(\eta) U_{2n}(\eta) d\eta \\ U_{2n}(\xi) &= \int_{\xi}^{\infty} \exp i(\xi-\eta) b(\eta) U_{2n-1}(\eta) d\eta \\ \text{met } b(\eta) &= \frac{k'(\eta)}{2k(\eta)} \end{aligned} \quad (0-4)$$

De golfvergelijking (0-1) gaat door de transformatie (0-3) over in:

$$\left[ \frac{d^2}{d\xi^2} + 1 \right] U(\xi) = \left[ b^2(\xi) + b'(\xi) \right] U(\xi) \quad (0-5)$$

De Liouville-transformatie (0-3) krijgt nu een fysische betekenis in (0-5):  $(b^2 + b')$  kan opgevat worden als een storing op een reflectievrij medium dat beschreven wordt door:

$$\left[ \frac{d^2}{d\xi^2} + 1 \right] U(\xi) = 0 \quad (0-6)$$

Met behulp van variatie van constanten kan van (0-6) onder de randvoorwaarde:  $(\xi \rightarrow \infty) \rightarrow U(\xi) = \exp i\xi$  overgegaan worden op de Volterra-integraalvergelijking van het 2<sup>o</sup> soort:

$$U(\xi) = \exp i\xi + \int_{-\infty}^{\xi} \sin(\xi-\eta) [b^2(\eta) + b'(\eta)] U(\eta) d\eta \quad (0-7)$$

Zonder de transformatie (0-3) kan voor (0-7) geschreven worden:

$$u(x) = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}(x)} \exp i \int_x^{\infty} k(y) dy + \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}(x)} \int_{-\infty}^x \sin \left( \int_x^y k(z) dz \right) \frac{d^2}{dy^2} (k^{-\frac{1}{2}}) u(y) dy \quad (0-7')$$

Aan (0-7) en dus aan (0-6) onder de gegeven randvoorwaarden wordt voldaan door:

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \sum_n U_n(\xi) \quad \text{met} \\ U_0(\xi) &= \exp i\xi \\ U_n(\xi) &= \int_{-\infty}^{\xi} \sin(\xi-\eta) g(\eta) U_{n-1}(\eta) d\eta \\ \text{met } g(\eta) &= \{b^2(\eta) + b'(\eta)\} \end{aligned} \quad (0-8)$$

De reeks zal zeker absoluut convergeren voor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |b^2(\sigma) + b'(\sigma)| d\sigma \leq a < 1$$

(0-8) geeft de oplossing van de golfvergelijking volgens Broer (Br)<sub>2</sub>.

Sluijter geeft een variant op de Bremmerreeks door in het model van Bremmer de lagen geen constante brekingsindex te geven. De reeks volgens Sluijter (zie hiervoor (S)<sub>1</sub>):

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \sum_n u_n(x), \quad \text{met } u_0(x) = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}(x)} \exp i \int^x \{1 + \delta(\sigma)\} k(\sigma) d\sigma \\
 u_{2n}(x) &= \frac{i}{k^{\frac{1}{2}}(x)} \int_{-\infty}^x ds k^{\frac{1}{2}} \delta(s) u_{2n-1}(s) \exp i \int_s^x \{1 + \delta(\sigma)\} k(\sigma) d\sigma \\
 u_{2n+1}(x) &= \frac{i}{k^{\frac{1}{2}}(x)} \int_x^{\infty} ds k^{\frac{1}{2}} \delta(s) u_{2n}(s) \exp i \int_x^s \{1 + \delta(\sigma)\} k(\sigma) d\sigma \\
 \text{met } \delta(x) &= k^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{d^2}{dx^2} k^{-\frac{1}{2}}(x)
 \end{aligned} \tag{0-9}$$

De recurrente betrekkingen (0-4) en (0-9) worden in differentiaalvorm:  
 voor (0-4):

$$\begin{cases}
 U'_{2n}(\xi) = i U_{2n}(\xi) + b(\xi) U_{2n-1} \\
 U'_{2n+1}(\xi) = b(\xi) U_{2n} - i U_{2n+1}
 \end{cases}$$

Stel:  $U_{\uparrow} = U_0 + U_2 + U_4 + \dots$   
 $U_{\downarrow} = U_1 + U_3 + U_5 + \dots$

dan gaat (0-4) over in:

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} U_{\uparrow} \\ U_{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & b \\ b & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{\uparrow} \\ U_{\downarrow} \end{pmatrix} \tag{0-10}$$

Analoog voor (0-9):

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u_{\uparrow} \\ u_{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k'}{2k} + ik\{1+\delta\} & ik\delta(x) \\ -ik\delta(x) & -\frac{k'}{2k} - ik\{1+\delta\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\uparrow} \\ u_{\downarrow} \end{pmatrix} \tag{0-11}$$

Uit bijvoorbeeld (0-10) kan door transformatie een ander 1<sup>o</sup> orde stelsel afgeleid worden. Schrijf daartoe (0-10) in de vorm:

$$\frac{d}{d\xi} U = AU \tag{0-12}$$

Definieer:  $U = Sw$  dan gaat (0-12) over in:

$$\frac{dw}{d\xi} = S^{-1}ASw - S^{-1} \frac{dS}{d\xi} w.$$

Van Kampen beschouwt nu transformaties  $S$  zodat  $S^{-1}AS$  diagonaal is ( $K$ ).

Probleemstelling.

De oplossingen (0-4) en (0-8) zijn beide oplossingen die ook reflectie beschrijven van de golfvergelijking  $\frac{d^2}{dx^2}y(x) + k^2(x)y(x) = 0$ .

Bewezen zal worden dat deze 2 oplossingen in elkaar overgevoerd kunnen worden <sup>1)</sup> en een multiplicatieve factor verschillen.

De Bremmerreeks geeft een splitsing in een naar rechts en een naar links lopende golf. Er zijn meerdere oplossingen te geven met een dergelijke splitsing. Een fysisch zinvolle beperking ten aanzien van deze splitsing is: alleen splitsingen toe te laten waarbij met de splitsing van de golf ook de intensiteit gesplitst wordt.

Het zal blijken dat dan alleen Bremmerachtige splitsingen toegelaten zijn.

Hoofdstuk 6 geeft een enkele opmerking over de reflectie en transmissiecoëfficiënt. De in de inleiding gegeven oplossingen gelden alleen voor langzaam veranderende  $k(x)$ : in hoofdstuk 4 wordt een oplossing afgeleid voor een verloop van  $k(x)$  met een steile gradient. Hoofdstuk 5 geeft een enkele opmerking over het diagonaliseringsproces volgens van Kampen.

De behandeling van het een en ander zal operatorisch zijn; zie hiervoor het hoofdstuk 1. Een generalisatie van de reeks van Bremmer en de reeks van Sluiter is te vinden in hoofdstuk 7.

---

<sup>1)</sup> Dit onderdeel behoort tot het stage onderzoek in de sectie theoretische natuurkunde.



Hoofdstuk 1. Operatoren.

Definieer  $D(1) : L^- = \frac{d}{dx} - i$

$D(2) : L^+ = \frac{d}{dx} + i$

$D(3) : L = \frac{d^2}{dx^2} + 1$

zodat:  $E(1) : L^+ L^- = L = L^- L^+$   $E(2) : L^\pm(\alpha\beta) = \alpha L^\pm \beta + \alpha' \beta$

Het bewijs wordt gegeven door substitutie.

$E(3) : L^+ u = f \rightarrow u = C_1 \exp -ix + \int \exp i(y-x)f(y)dy$

$E(4) : L^- u = f \rightarrow u = C_1 \exp +ix + \int \exp i(x-y)f(y)dy$

E(3) en E(4) worden afgeleid met behulp van variatie van constanten.

Beschouw nu in E(3) en E(4) de klasse van functies q waarvoor geldt dat  $q(x_1) = 0$  dan is de oplossing van  $L^+ u = f$  binnen deze klasse:

$E(5) : L^+ u = f \rightarrow u = \int_{x_1}^x \exp i(y-x)f(y)dy$

Analoog geldt:

$E(6) : L^- u = f \rightarrow u = \int_{x_1}^x \exp i(x-y)f(y)dy$

Beschouw nu in het bijzonder die klasse van functies waarvoor geldt  $q(\infty) = 0$  (resp.  $q(-\infty) = 0$ ). Een functie uit die klasse wordt aangegeven met  $\bar{q}$  (resp.  $q$ ).

Een functie  $\bar{q}$  behoort tot beide klassen.

$E(7) : L^\pm \bar{u} = \bar{f} \rightarrow \bar{u} = \int \exp \pm i(y-x)\bar{f}(y)dy =: \bar{G}_\pm \bar{f}$

$E(8) : L^\pm \underline{u} = \underline{f} \rightarrow \underline{u} = \int \exp \pm i(y-x)\underline{f}(y)dy =: \underline{G}_\pm \underline{f}$

en:  $E(9) : \text{Binnen de klasse } \bar{q} \text{ (resp. } q) \text{ is } \bar{G}_\pm \text{ (resp. } \underline{G}_\pm)$

de inverse van  $L^\pm$  :

$L^\pm \bar{G}_\pm \bar{f} = \bar{f} = \bar{G}_\pm L^\pm \bar{f}$

$L^\pm \underline{G}_\pm \underline{f} = \underline{f} = \underline{G}_\pm L^\pm \underline{f}$

Voor de tweede orde operator L kan analoog een inverse G ingevoerd worden, maar dan dient de klasse van functies beperkt te worden tot functies die in  $x_1$  naar 0 gaan en waarvan bovendien de afgeleide naar 0 gaat. notatie:  $\bar{q}$  voor  $x_1 = \infty$  resp.  $q$  voor  $x_1 = -\infty$

Met behulp van variatie van constanten geldt:

$$E(10) : Lu = f \rightarrow u = C_1 \exp -ix + C_2 \exp ix + \int_{x_1}^x \sin(x-y) f(y) dy$$

en

$$E(11) : \underline{L} \bar{G} \bar{f} = \bar{f} = \bar{G} \underline{L} \bar{f}$$

$$\underline{L} \underline{G} \underline{f} = \underline{f} = \underline{G} \underline{L} \underline{f}$$

De hierboven gedefinieerde operatoren  $G$  en  $G^\pm$  en  $\bar{G}_\pm$  zijn Green operatoren voor de daar beschouwde randcondities.

In het vervolg van dit verslag zullen 2 relaties een belangrijke rol spelen: a) binnen de klasse functies  $\bar{f}$  waarbij  $\underline{G}^\pm \bar{f} - \bar{G}_\pm \bar{f}$  zin heeft geldt

$$E(12) : \underline{G}^\pm \bar{f} - \bar{G}_\pm \bar{f} = \{ \exp \mp ix \} \int_{-\infty}^{\infty} dy \{ \exp \pm iy \} \bar{f}(y) =: \{ \exp \mp ix \} I^\pm(\bar{f})$$

b) E(13) maakt het mogelijk de  $\bar{G}_\pm$  operatoren uit te drukken in de

$\bar{G}$  operator:

$$E(13) : \bar{G}_\pm \bar{f} = \bar{G} \bar{L}^\mp \bar{f}$$

Analoog voor E(14):

$$E(14) : \underline{G}^\pm \underline{f} = \underline{G} \underline{L}^\mp \underline{f}$$

Bewijs E(13):

$$\underline{L}^\mp \bar{G}_\pm \bar{f} = \bar{f}$$

Voorvermenigvuldiging met  $\bar{G} \bar{L}^\mp$  geeft:

$$\bar{G} \bar{L}^\mp \underline{L}^\mp \bar{G}_\pm \bar{f} = \bar{G} \bar{L}^\mp \bar{f}$$

zodat

$$\bar{G} \bar{L}^\mp \bar{G}_\pm \bar{f} = \bar{G} \bar{L}^\mp \bar{f}$$

$$\bar{G}_\pm \bar{f} = \bar{G} \bar{L}^\mp \bar{f} \quad \text{q.e.d.}$$

Met behulp van deze operatoren wordt de reeks volgens Broer:

$$U = \phi + \left[ \int_{x_1}^x G^n(b^2 + b') \right] \phi \quad (1-1)$$

en de Bremmerreeks

$$U = \phi + \left[ \bar{G}_+ b + \underline{G}_- b \bar{G}_+ b + \bar{G}_+ b \underline{G}_- b \bar{G}_+ b + \dots \right] \phi \quad (1-2)$$

De differentiaalvormen gaan over in:

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + 1 \right] U = (b^2 + b') U \quad \leftrightarrow \quad \underline{L} U = (b^2 + b') U \quad (1-3)$$

$$\left[ \frac{d}{dx} - i \right] U_\uparrow = b U_\downarrow \quad \leftrightarrow \quad \bar{L}^- U_\uparrow = b U_\downarrow \quad (1-4)$$

$$\left[ \frac{d}{dx} + i \right] U_\downarrow = b U_\uparrow \quad \leftrightarrow \quad \bar{L}^+ U_\downarrow = b U_\uparrow \quad (1-5)$$

Door voorvermenigvuldiging van (1-4) en (1-5) volgens:

$$\bar{L}^+ \bar{L}^- U_\uparrow = \underline{L} U_\uparrow = \bar{L}^+ b U_\downarrow = b \bar{L}^+ U_\downarrow + b' U_\downarrow = b^2 U_\uparrow + b' U_\downarrow$$

$$\bar{L}^- \bar{L}^+ U_\downarrow = \underline{L} U_\downarrow = \bar{L}^- b U_\uparrow = b \bar{L}^- U_\uparrow + b' U_\uparrow = b^2 U_\downarrow + b' U_\uparrow$$

volgt hieruit:

<sup>1)</sup>  $\phi = \exp ix$

$$L (U_{\uparrow} + U_{\downarrow}) = (b^2 + b')(U_{\uparrow} + U_{\downarrow}) \quad (1-6)$$

resp.  $L (U_{\uparrow} - U_{\downarrow}) = (b^2 - b')(U_{\uparrow} - U_{\downarrow}) \quad (1-7)$

(1-7) komt overeen met de golfvergelijking:

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2(x) - 2 \left\{ \frac{k'(x)}{k(x)} \right\}^2 + \frac{k''(x)}{k(x)} \right] v(x) = 0 \quad (1-8)$$

Voor een nadere beschouwing van deze golfvergelijking zij verwezen naar appendix 1.

De Bremmerreeks volgt nu uit (1-4) en (1-5) door dit stelsel op te lossen met  $\bar{G}_{\uparrow}$  en  $\bar{G}_{\downarrow}$  operatoren. Het stelsel kan echter ook met  $\bar{G}_{\downarrow}$  en  $\bar{G}_{\uparrow}$  operatoren opgelost worden en dit geeft:

$$U^{\circ} = \exp i\xi + \left[ \bar{G}_{\downarrow} b + \bar{G}_{\downarrow} b \bar{G}_{\downarrow} b + \bar{G}_{\downarrow} b \bar{G}_{\downarrow} b \bar{G}_{\downarrow} b + \dots \right] \psi \quad (1-9)$$

De oplossing (1-9) zal verder de Bremmerreeks van de tweede soort genoemd worden.

Hoofdstuk 2. De equivalentie van de reeks volgens Broer en de Bremmerreeks.

Het bewijs zal in 2 stappen gegeven worden. Allereerst de equivalentie van de reeks volgens Broer en de Bremmerreeks van de tweede soort; vervolgens dat deze laatste op een multiplicatieve factor na gelijk is aan de Bremmerreeks.

*Lemma 1. De reeks volgens Broer en de Bremmerreeks van de tweede soort zijn equivalent.*

Bewijs. Beschouw de 2<sup>o</sup> W.K.B.-correctie:  $\bar{G}_+ b\phi$   
 dan:  $U_1^{\circ} = \bar{G}_+ b\phi \xrightarrow{a(1)} \bar{G}L^- b\phi \xrightarrow{b(2)} \bar{G}(bL^- \phi + b'\phi) = \bar{G}b'\phi$   
 daar  $L^- \phi = 0$ .

Analoog:

$$U_2^{\circ} = \bar{G}_- b \bar{G}_+ b\phi = \bar{G}b^2\phi + \bar{G}b'\bar{G}b'\phi$$

$$U_3^{\circ} = \bar{G}_+ b \bar{G}_- b \bar{G}_+ b\phi = \bar{G}b^2\bar{G}b'\phi + \bar{G}b'\bar{G}b'\bar{G}b'\phi + \bar{G}b'\bar{G}b^2\phi$$

Algemeen:  $U_n^{\circ}$  wordt verkregen uit  $U_{n-1}^{\circ}$  en  $U_{n-2}^{\circ}$  door de termen van  $U_{n-1}^{\circ}$  te nemen en hierop  $\bar{G}b'$  te laten werken en op de termen van  $U_{n-2}^{\circ}$ ;  $\bar{G}b^2$  te laten werken. Vanwege dit principe zijn alle termen onderling verschillend.<sup>1)</sup>

Definieer  $\chi$  is de graad in b van een term.

Voorbeeld:  $\chi(\bar{G}b') = 1$ ,  $\chi(\bar{G}b^2) = 2$ .

De Bremmerreeks geeft dan een opsplitsing van de reeks volgens Broer naar constante  $\chi$ . Het aantal termen met constante  $\chi$  is bepaald door de 1.1.-getallen van Fibonacci (Leonardo van Pisa). ( $F_n$ : het n<sup>o</sup> getal van Fibonacci is gelijk aan de som van de 2 voorlaatste getallen:  $F_{n-1} + F_{n-2}$ . De eerste 2 getallen zijn 1 en 1.)

Combinatoriek leert dan dat in de reeks volgens Broer;

$$F_{2n} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{4} + \dots + \binom{2n}{2n}$$

termen voorkomen met  $\chi = 2n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) en

$$F_{2n+1} = \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{3} + \dots + \binom{2n+1}{2n+1}$$

termen met  $\chi = 2n+1$  ( $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Nu geldt:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= 1 \\
 F_1 &= 1 \\
 F_{2n} + F_{2n+1} &= F_{2n+2} \text{ vanwege } \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}
 \end{aligned}$$

en de  $F_n$ 's zijn de getallen van Fibonacci. <sup>2)</sup>

Uit 1) en 2) volgt direct Lemma 1.

*Lemma 2. De Bremmerreeks van de tweede soort en de Bremmerreeks verschillen een multiplicatieve factor.*

Bewijs. Het Lemma volgt direct uit het gedrag van de beide reeksen in  $\infty$ . Zie hiervoor de opmerking na Theorema 1. De multiplicatieve factor kan gemakkelijk berekend worden omdat met behulp van E(12) de beide reeksen in elkaar overgevoerd kunnen worden:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \phi \\
 U_1 &= \bar{G}_+ b \phi = \bar{G}_+ b \phi \\
 U_2 &= \bar{G}_- b \bar{G}_+ b \phi = \phi \Gamma^-(bU_1) + \bar{G}_- b \bar{G}_+ b \phi \\
 U_3 &= \bar{G}_+ b \bar{G}_- b \bar{G}_+ b \phi = \bar{G}_+ b \phi \Gamma^-(bU_1) + \bar{G}_+ b \bar{G}_- b \bar{G}_+ b \phi
 \end{aligned}$$

enz. De algemene termen worden:

$$\begin{aligned}
 U_{2n} &= \Gamma^-(bU_{2n-1})U_0 + \Gamma^-(bU_{2n-3})U_2 + \dots + \Gamma^-(bU_1)U_{2n-2} + U_{2n} \\
 U_{2n-1} &= \Gamma^-(bU_{2n-3})U_1 + \Gamma^-(bU_{2n-5})U_3 + \dots + \Gamma^-(bU_1)U_{2n-3} + U_{2n-1}
 \end{aligned}$$

zodat:

$$\sum_n U_n = [1 + \Gamma^-(bU_1) + \Gamma^-(bU_3) + \dots] \sum_n U'_n \quad (2-1)$$

Hiermee is Lemma 2 bewezen, zodat het volgende theorema geformuleerd kan worden:

*Theorema 1. Binnen het gemeenschappelijke gebied van absolute convergentie zijn de reeksen van Broer en Bremmer op een multiplicatieve factor na gelijk.*

Opmerking. De factor  $[1 + \Gamma^-(bU_1) + \Gamma^-(bU_3) + \dots]$  treedt op door een verschil in normering bij de beide reeksen. De reeks van Bremmer is genormeerd op de invallende golf terwijl Broer normeert op de doorgelaten golf. Beschouwen we de Bremmerreeks voor  $\xi \rightarrow \infty$  dan geven alleen de even termen een bijdrage:

$$\int_0^{\infty} \exp^{-in b(\eta)U_{2n-1}(\eta)} d\eta$$

wat overeenkomt met:  $\Gamma^-(bU_{2n-1})$  uit (2-1).

Hoofdstuk 3. De splitsing in een doorgelaten en een gereflecteerde golf.

Er kunnen fysisch zinvolle beperkingen opgelegd worden om de oplossing van de golfvergelijking te splitsen in een doorgelaten en een gereflecteerde golf. De voorwaarden die Mirovitskii en Budagyan (M) stellen beperken het aantal splitsingen aanzienlijk; echter niet tot één mogelijke. De splitsing volgens Sluyter voldoet ook aan de gestelde voorwaarden. (S)<sub>2</sub>.

De splitsing volgens Bremmer geeft eveneens een splitsing van de intensiteit. Uit de golfvergelijking  $\left[\frac{d^2}{dx^2} + k^2(x)\right]u(x) = 0$  volgt voor reële  $k(x)$  de behoudswet:

$$I(u, u) = u\bar{u}' - \bar{u}u' = \text{constant} \quad (3-1)$$

( $\bar{u}$  betekent: complex toegevoegde, de differentiatie is naar  $x$ )

$iI(u, u)$  geeft de intensiteit van de golf  $u$ . Substitutie van (1-4) en (1-5) in (3-1) geeft

$$I(U, U) = I(U_{\uparrow}, U_{\uparrow}) + I(U_{\downarrow}, U_{\downarrow}) \quad (3-2)$$

Alvorens de voorwaarden voor splitsing te formuleren eerst enkele eigenschappen van (3-1).

$I(\phi, \phi)$  is invariant voor Liouville-transformatie.

Bewijs: Stel  $\phi(x) = q(x)\psi(x)$

$$I(\phi, \phi) = |\psi|^2 [q(x)\bar{q}'(x) - \bar{q}(x)q'(x)] + |q|^2 [\psi\bar{\psi}' - \bar{\psi}\psi']$$

Nu is  $I(\phi, \phi) = I(\psi, \psi)$  als

1)  $q(x)$  is reëel

2) overgegaan wordt op de variabele  $\xi = \int \frac{dx'}{q^2}$

1) en 2) houdt juist een reële Liouville-transformatie in.

Definitie: De hierboven gegeven Liouville-transformatie wordt genoteerd met L.T.  $[q]$ .

Is  $I(u, v) = u\bar{v}' - \bar{u}v'$  dan geldt  $I(\bar{u}, \bar{u}) = -I(u, u)$  en  $I(v, u) = \overline{I(u, v)}$ .

Bewijs door substitutie.

$$\begin{aligned} \text{Laat nu: } \frac{d}{dx}u_{\uparrow} &= \alpha u_{\uparrow} + \beta u_{\downarrow} \\ \frac{d}{dx}u_{\downarrow} &= \gamma u_{\uparrow} + \delta u_{\downarrow} \end{aligned} \quad (3-3)$$

een splitsing zijn van de golfvergelijking,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2(x) \right] u(x) &= 0 \\ \text{met } u(x) &= u_{\uparrow} + u_{\downarrow}. \end{aligned} \quad (3-4)$$

(3-3) zal nu een splitsing van de golf in een doorgelaten en een gereflecteerde golf voorstellen die met de splitsing van de golf ook een splitsing naar de intensiteit inhoudt als voldaan is aan:

1) voor  $|x| \rightarrow \infty$  treedt ont koppeling op: d.w.z.  $x \rightarrow \infty$  geeft de doorgelaten golf en  $x \rightarrow -\infty$  de invallende plus de gereflecteerde golf.

2) Is  $u = u_{\uparrow} + u_{\downarrow}$  een oplossing van (3-3) dan is  $\bar{u} = \bar{u}_{\downarrow} + \bar{u}_{\uparrow}$  ook een oplossing. De golf  $\bar{u}$  loopt de andere kant op dan  $u$ .

3) Met de splitsing van de golf wordt ook de intensiteit gesplitst: d.w.z.

$$I(u, u) = -I(\bar{u}, \bar{u}) = I(u_{\uparrow}, u_{\uparrow}) + I(u_{\downarrow}, u_{\downarrow}) \quad (3-5)$$

4)  $u = u_{\uparrow} + u_{\downarrow}$  voldoet aan de golfvergelijking (3-4).

De voorwaarde 1) houdt in dat  $\beta$  en  $\gamma = 0$  voor  $|x| \rightarrow \infty$  en  $\alpha$  en  $-\delta = i$  voor  $|x| \rightarrow \infty$ .

2) impliceert dat  $u_{\uparrow} = \bar{u}_{\downarrow}$  en  $u_{\downarrow} = \bar{u}_{\uparrow}$  een oplossing van (3-3) moet zijn, zodat  $\delta = \bar{\alpha}$  en  $\gamma = \bar{\beta}$

Substitutie van (3-3) in (3-5) rekening houdend met 1) en 2) geeft

$$I(u, u) = (\bar{\alpha} + \alpha) \left\{ |u_{\uparrow}|^2 - |u_{\downarrow}|^2 \right\} \quad (3-6)$$

en

$$\text{Im}\{I(u_{\uparrow}, u_{\uparrow})\} = \text{Im}\{\beta(|u_{\uparrow}|^2 - |u_{\downarrow}|^2)\} = 0 \quad (3-7)$$

zodat  $\beta = \gamma$  is reëel.

Stel nu  $\alpha = r + is$ .

Substitutie van (3-3) in (3-4) geeft

$$r = -\frac{s'(x)}{2s(x)}$$

Het stelsel (3-3) is nu van de vorm:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u_{\uparrow} \\ u_{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} is - \frac{s'}{2s} & \beta \\ \beta & -is - \frac{s'}{2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\uparrow} \\ u_{\downarrow} \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

en de bijbehorende golfvergelijking is:

$$\frac{d^2}{dx^2} u + \left\{ s^2 + \left( \beta - \frac{s'}{2s} \right)^2 + \left( \beta - \frac{s'}{2s} \right)' \right\} u = 0$$

zodat

$$k^2 = s^2 + \left( \beta - \frac{s'}{2s} \right)' + \left( \beta - \frac{s'}{2s} \right)^2 \quad (3-9)$$

Merk op dat de voorwaarde <sup>1)</sup> inhoudt dat  $\beta \rightarrow 0$  voor  $|x| \rightarrow \infty$  en  $\frac{s'}{2s} \rightarrow 0$  voor  $|x| \rightarrow \infty$  zodat  $s(x) \rightarrow k(x)$  voor  $|x| \rightarrow \infty$ .

(3-8) is van het type van Bremmer. Door de L.T.  $\left[ \frac{1}{s'k} \right]$  blijkt duidelijk de overeenkomst met (0-10):

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} U_{\uparrow} \\ U_{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & \frac{\beta}{s} \\ \frac{\beta}{s} & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\uparrow} \\ U_{\downarrow} \end{pmatrix} \quad (3-10)$$

met

$$\left( \frac{\beta}{s} \right)' + \left( \frac{\beta}{s} \right)^2 = 1 - \frac{k^2}{s^2} + \left( \frac{s'}{2s} \right)' + \left( \frac{s'}{2s} \right)^2 \quad (3-11)$$

De splitsing (0-10) volgens Bremmer volgt uit (3-10) en (3-11) door  $s(x) = k(x)$  te stellen, zodat  $\frac{\beta}{s} = \frac{k'(\xi)}{2k(\xi)} = b(\xi)$  en

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} U_{\uparrow} \\ U_{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & b \\ b & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\uparrow} \\ U_{\downarrow} \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

(3-12) kan ontstaan gedacht worden uit de oorspronkelijke golfvergelijking  $\left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2(x) \right] u(x) = 0$  door de L.T.  $\left[ \frac{1}{k(x)} \right]$  wat geeft:

$$\left[ \frac{d^2}{d\xi^2} + 1 \right] U = [b^2 + b'] U \quad (3-13)$$



Door de L.T.  $\left[ \sqrt{\frac{1}{1-b^2-b'}} \right]$  volgt nu een nieuwe splitsing uit (3-13):

$$\begin{aligned} \underline{U}'_{\uparrow}(\tau) &= i \underline{U}_{\uparrow}(\tau) + \frac{\delta'}{2(1+\delta)} \underline{U}_{\downarrow}(\tau) \\ \underline{U}'_{\downarrow}(\tau) &= \frac{\delta'}{2(1+\delta)} \underline{U}_{\uparrow}(\tau) - i \underline{U}_{\downarrow}(\tau) \end{aligned} \quad (3-14)$$

met  $\delta(\tau) = \{b^2(\tau) + b'(\tau)\}$

Dit procédé kan in het algemeen willekeurig vaak herhaald worden en zo wordt een rij splitsingen verkregen die verder de rij splitsingen S zal heten.

Men verifieert gemakkelijk dat de splitsing volgens Sluyter niet van de vorm (3-8) is.

Het een en ander is nu uitgedrukt in:

*Theorema 2. De mogelijke splitsingen van de golf, onder de gestelde "intensiteitsvoorwaarden", die oplossing is van  $\left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2(x) \right] u(x) = 0$ ; zijn van het type van Bremmer:*

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u_{\uparrow} \\ u_{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} is - \frac{s'}{2s} & \beta \\ \beta & -is - \frac{s'}{2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\uparrow} \\ u_{\downarrow} \end{pmatrix}$$

met:  $k^2(x) = s^2(x) + \left( \beta - \frac{s'}{2s} \right)^2 + \left( \beta + \frac{s'}{2s} \right)^2$

De vraag doet zich voor of de rij splitsingen S de enige splitsingen voorstellen die mogelijk zijn. Het antwoord hierop kan nog niet gegeven worden. De vraag hangt ten nauwste samen met de vraag hoeveel oplossingen de vergelijking (3-9) toe laat.

De randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} \beta &\rightarrow 0 \quad \text{voor } |x| \rightarrow \infty \\ s(x) &\rightarrow k(x) \quad \text{voor } |x| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

zullen het aantal beperken.

De rij splitsingen S ligt geïsoleerd. Een andere beperking ten aanzien van de mogelijke splitsingen ligt nu hierin dat deze geïsoleerdheid geldt voor iedere mogelijke splitsing, hetgeen uitgedrukt wordt door:

De mogelijke splitsingen van de golf onder de "intensiteitsvoorwaarden" liggen geïsoleerd op eerste orde. Dit betekent dat  $I(u_{\uparrow} + w, u_{\uparrow} + w) + I(u_{\downarrow} - w, u_{\downarrow} - w) = I(u_{\uparrow}, u_{\downarrow}) + I(u_{\uparrow}, u_{\downarrow})$  impliceert dat  $w = 0$  voor eerste orde variaties in  $w$ .

$$\begin{aligned} \text{Beschouw } I(u_{\uparrow} + w, u_{\uparrow} + w) + I(u_{\downarrow} - w, u_{\downarrow} - w) = \\ I(u_{\uparrow}, u_{\uparrow}) + I(u_{\downarrow}, u_{\downarrow}) + w(\bar{u}'_{\uparrow} - \bar{u}'_{\downarrow}) - \bar{w}(u'_{\uparrow} - u'_{\downarrow}) + \\ \bar{w}'(u_{\uparrow} - u_{\downarrow}) - w'(\bar{u}_{\uparrow} - \bar{u}_{\downarrow}) + 2ww' - 2\bar{w}\bar{w}' \quad 1) \end{aligned} \quad (3-15)$$

waaruit door verwaarlozing van 2<sup>o</sup> orde termen volgt:

$$w\bar{u}'_{\downarrow} - \bar{w}u'_{\downarrow} + \bar{w}'u_{\downarrow} - w'\bar{u}_{\downarrow} = 0 \quad (3-16)$$

$$\text{met } u_{\downarrow} = u_{\downarrow} - u_{\uparrow}$$

De randvoorwaarden voor  $w$  zijn

- 1)  $w \rightarrow 0$  voor  $|\xi| \rightarrow \infty$
- 2)  $w' \rightarrow 0$  voor  $|\xi| \rightarrow \infty$
- 3)  $w \neq 0$

Differentiatie van (3-16) geeft

$$\begin{aligned} w''\bar{u}_{\downarrow} - w\bar{u}''_{\downarrow} - w''\bar{u}_{\downarrow} - w\bar{u}''_{\downarrow} = 0 \\ \text{zodat } w''\bar{u}_{\downarrow} - w\bar{u}''_{\downarrow} = \text{Re} \end{aligned} \quad (3-17)$$

met  $\text{Re}$  een reële functie.

Verder geldt:

$$\begin{aligned} \bar{u}''_{\downarrow} + (1 - g_{\downarrow})\bar{u}_{\downarrow} = 0 \\ g_{\downarrow} = B^2 - B^e = \left(\frac{\beta}{s}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{s}\right)^e \quad 2) \end{aligned}$$

zodat (3-17) overgaat in

$$w'' - w(g_{\downarrow} - 1) = \frac{\text{Re}}{\bar{u}_{\downarrow}} \quad (3-18)$$

De oplossing van (3-18) onder de gegeven randvoorwaarden is:

$$w = \frac{1}{I(u, u)} \left\{ u_{\downarrow} \int_{\infty}^{\xi} \text{Re} + \bar{u}_{\downarrow} \int_{\infty}^{\xi} \frac{u_{\downarrow}}{\bar{u}_{\downarrow}} \text{Re} \right\} \quad (3-19)$$

1)  $u_{\uparrow}$  en  $u_{\downarrow}$  voldoen aan een 1<sup>o</sup> orde stelsel van de vorm (3-10)

2) Zie ook appendix 1.

(3-19) in (3-17) geeft

$$\text{voor alle } \xi \rightarrow \left[ 2 \left\{ |u_{-} \bar{u}'_{-} - u'_{-} \bar{u}_{-}| \right\} \int_{\dots}^{\dots} \text{Re} = 0 \right]$$

dus  $\text{Re} \neq 0$  zodat  $w \neq 0$  moet zijn.

De splitsingen liggen geïsoleerd.

Hoofdstuk 4. De steile gradient oplossing.

De Bremmerreeks zal convergeren voor  $\int_{-\infty}^{\infty} |b(\rho)| d\rho \ll \frac{1}{2}\pi$ . (A). Dit betekent dat voor een steile gradient in  $k(x)$  de Bremmerreeks in het algemeen niet geldt.

Beschouw een  $k(x)$  verloop met asymptotische waarde  $k_<$  voor  $x \rightarrow -\infty$  en  $k_>$  voor  $x \rightarrow \infty$

Beschouw de golfvergelijking  $\frac{d^2}{dx^2}U + k^2(x)U(x) = 0$  als

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x) + s^2(x)U(x) = [s^2(x) - k^2(x)]U(x) \quad (4-1)$$

met  $s(x) = k_< + (k_> - k_<)H(x)$  waarin

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Heuristisch kan nu het rechterlid geïnterpreteerd worden als een storing op het golfprobleem:

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x) + s^2(x)U(x) = 0 \quad (4-2)$$

(4-2) moet dan als basis van oplossing functies hebben, die continu en continu differentieerbaar zijn in  $x = 0$ .

Een mogelijke basis is nu:

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{\sin k_> x}{k_>} & x \geq 0 \\ \frac{\sin k_< x}{k_<} & x < 0 \end{cases} \quad (4-3)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos k_> x & x \geq 0 \\ \cos k_< x & x < 0 \end{cases} \quad (4-3)$$

(De uitdrukkingen (4-3) kunnen formeel gegeven worden in de vorm:

$$\phi(x) = \frac{\sin \int_{\bullet}^x s(y) dy}{s(y)} \quad (4-3')$$

en  $\psi(x) = \cos \int_{\bullet}^x s(y) dy$

Met behulp van deze basis kan een oplossing van (4-2) gegeven worden met randvoorwaarde de doorgelaten golf:

$$\exp ik_> x \text{ voor } x > 0$$

ofwel:

$$U(x) = \psi + ik_> \phi(x).$$

Formeel kan met (4-3) een Greense operator voor (4-2) geconstrueerd worden zodat voor de gestoorde golfvergelijking (4-1) de volgende integraalvorm gegeven kan worden:

$$U(x) = \psi(x) + ik_1 \phi(x) + \phi(x) \int \psi(y) f(y) dy + \psi(x) \int \phi(y) f(y) dy \quad (4-4)$$

met  $f(y) = [s^2(y) - k^2(y)] U(y)$ .

*Theorema 3.* Voor het steile gradient probleem kan voor de golfvergelijking

$\frac{d^2}{dx^2} U(x) + k^2(x) U(x) = 0$  onder de voorwaarde  $\int_{-\infty}^{\infty} |s^2(y) - k^2(y)| dy \leq a < 1$  de integraalvoorstelling gegeven worden:

$$a) U(x) = \exp ik_1 x + \int_{-\infty}^x \frac{\sin k_1(x-y)}{k_1} [k_1^2 - k^2(y)] U(y) dy \quad x \geq 0$$

$$b) U(x) = \psi(x) + ik_1 \phi(x) + \int_{-\infty}^x \frac{\sin k_1(x-y)}{k_1} [k_1^2 - k^2(y)] U(y) dy + \int_x^{\infty} \frac{\sin k_2(x-y)}{k_2} [k_2^2 - k^2(y)] U(y) dy \quad x < 0$$

$U(x)$  kan hieruit iteratief verkregen worden.

Het theorema kan formeel ook in de volgende vorm gegeven worden:

*Theorema 3.* Voor het steile gradient probleem kan voor de golfvergelijking

$\frac{d^2}{dx^2} U(x) + k^2(x) U(x) = 0$  onder de voorwaarde  $\int_{-\infty}^{\infty} |s^2(y) - k^2(y)| dy \leq a < 1$  de integraalvoorstelling

$$U(x) = \psi(x) + ik_1 \phi(x) + \int_{-\infty}^x \frac{\sin \int_s^y s(\sigma) d\sigma}{s(y)} [s^2(y) - k^2(y)] U(y) dy$$

gegeven worden.  $U(x)$  volgt hier via een iteratieproces uit.

In deze vorm blijkt duidelijk de analogie met de oplossing:

$$U(x) = \psi + \frac{1}{k^2(x)} \int_{-\infty}^x \frac{\sin \int_k^y k(\sigma) d\sigma}{k^2(y)} [k^2(y) \frac{d^2}{dy^2} k^2(y)] U(y) dy$$

die geldt voor het geval  $k(x)$  langzaam verandert. Zie (0-7). Aan beide oplossingen ligt dan ook hetzelfde model ten grondslag.

Bewijs van het theorema.

Beschouw de 2 halfoneindige media  $(-\infty, 0)$  en  $[0, \infty)$ . In deze media afzonderlijk kan van de golfvergelijking overgegaan worden op de integraalvoorstelling:

$$U(x) = A \exp ikx + B \exp -ikx + \int \frac{\sin k(x-y)}{k} [k^2 - k^2(y)] U(y) dy$$

met  $k$  de waarde  $k_<$  dan wel  $k_>$ .

Voor het hier gegeven probleem moet voldaan zijn aan de randvoorwaarden:

- a)  $X \rightarrow \infty$  :  $U(x) = \exp ik_>x$  (de doorgelaten golf),
- b) voor  $x = 0$  moet  $U(x)$  en  $\frac{d}{dx}U(x)$  continu zijn.

Voor  $[0, \infty)$  geldt dan:

$$U(x) = \exp ik_>x + \int_0^{\infty} \frac{\sin k_>(x-y)}{k_>} [k_>^2 - k^2(y)] U(y) dy$$

Stel voor  $(-\infty, 0)$ :

$$U(x) = A\phi(x) + B\psi(x) + \int_0^{\infty} \frac{\sin k_<(x-y)}{k_<} [k_<^2 - k^2(y)] U(y) dy.$$

De voorwaarde b) geeft dan:

$$U(x) = \psi(x) + ik_>\phi(x) + \int_0^{\infty} \frac{\sin k_>(x-y)}{k_>} [k_>^2 - k^2(y)] U(y) dy + \int_0^{\infty} \frac{\sin k_<(x-y)}{k_<} [k_<^2 - k^2(y)] U(y) dy.$$

Opmerking. Herschrijven van deze uitdrukkingen geeft inderdaad (4-4).

Vanwege de formele analogie met (0-7) zou het mogelijk moeten zijn de oplossing te splitsen in een naar rechts en een naar links lopende golf en die moet voldoen aan een stelsel van de vorm:

$$U_{\uparrow}' = is U_{\uparrow} + B U_{\downarrow}$$

$$U_{\downarrow}' = B U_{\uparrow} - is U_{\downarrow}$$

$$U(x) = U_{\uparrow} + U_{\downarrow}$$

met  $B^2 + B^1 = s^2(x) - k^2(x)$ .

Hoofdstuk 5. Het diagonalisatieproces volgens van Kampen.

Van Kampen transformeert het 1<sup>o</sup> orde stelsel

$$\begin{pmatrix} U_{\uparrow}^{\prime} \\ U_{\downarrow}^{\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & b \\ b & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\uparrow} \\ U_{\downarrow} \end{pmatrix} \quad (5-1)$$

zodanig dat de interactieterm b van een lagere graad wordt.

Daartoe wordt  $\begin{pmatrix} i & b \\ b & -i \end{pmatrix}$  gediagonaliseerd via een unitaire matrix:

$$U = SV \quad \text{en} \quad \frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} V_{\uparrow} \\ V_{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{1-b^2} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{1-b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\uparrow} \\ V_{\downarrow} \end{pmatrix} - S^{-1} \frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} V_{\uparrow} \\ V_{\downarrow} \end{pmatrix} \quad (5-2)$$

De transformatie naar de diagonaalmatrix is eenduidig op een transformatiematrix na die diagonaal is. Deze vrijheidsgraad en een Liouville-transformatie volgens:

$$\tau_1 = \int^{\xi} \sqrt{1-b^2} d\sigma \quad V = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} W$$

wordt nu gebruikt om (5-2) een vorm analoog aan (5-1) te geven, d.w.z.

$$\frac{d}{d\tau_1} \begin{pmatrix} W_{\uparrow} \\ W_{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & B \\ B & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{\uparrow} \\ W_{\downarrow} \end{pmatrix} \quad (5-3)$$

Het verband tussen (5-3) en (5-2) wordt gegeven door:

$$\begin{pmatrix} W_{\uparrow}(\tau) \\ W_{\downarrow}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp \frac{1}{2} \gamma i \cosh \frac{1}{2} \gamma_1 & -\exp \frac{1}{2} \gamma i \sinh \frac{1}{2} \gamma_1 \\ -\exp -\frac{1}{2} \gamma i \sinh \frac{1}{2} \gamma_1 & \exp -\frac{1}{2} \gamma i \cosh \frac{1}{2} \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\uparrow}(\tau) \\ U_{\downarrow}(\tau) \end{pmatrix}$$

waarbij :  $\tau_1 = \int^{\xi} (1-b^2(\sigma))^{\frac{1}{2}} d\sigma = \int^{\xi} \frac{1}{\cosh \gamma_1} d\sigma$

en:  $B = \frac{1}{2} \gamma \dot{\tau}_1$

In het algemeen kan deze transformatie, die herhaalbaar is, uitgevoerd worden. (K).

Volgens dit procedé kan door alleen de diagonaaltermen mee te nemen een hogere orde reflectievrije W.K.B.-benadering gegeven worden. Zo wordt de W.K.B.-benadering na eenmaal diagonaliseren:

$$U_{1,2}(\xi) = \frac{1}{(1-b^2(\xi))} \exp \pm i \int^{\xi} \sqrt{1-b^2(\sigma)} d\sigma$$

of:

$$u_{1,2}(x) = \frac{1}{k(x) (1-b^2(x))} \exp \pm i \int^x k(\sigma) \sqrt{1-b^2(\sigma)} d\sigma \quad (5-4)$$

Uitgaande van de 2<sup>o</sup> orde vergelijking kan het diagonaalprocedé beschouwd worden als het invoeren van een reflectievrij medium analoog aan de methode die door Broer gegeven wordt.

Het procedé is dan identiek met de volgende gedachtengang:

Ga uit van:

$$\left[ \frac{d^2}{d\tau_0^2} + 1 \right] U(\tau_0) = [b^2(\tau_0) + b'(\tau_0)] U(\tau_0) \quad (5-5)$$

Via:  $\tau_1 = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{1 - b^2(\tau)} d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{\cosh \gamma_1} d\tau \quad (5-6)$

zodat  $b(\tau_0) = \tanh \gamma_1$

wordt een nieuw reflectievrij medium geïntroduceerd (waarop een storing gesuperponeerd is) en via:

$$\begin{aligned} U(\tau_1) &= \bar{\alpha} w_{\uparrow}(\tau_1) + \alpha w_{\downarrow}(\tau_1) \\ \bar{\alpha} &= \exp^{-\frac{1}{4}\pi i} \cosh \frac{1}{2}\gamma_1 + \exp^{-\frac{3}{4}\pi i} \sinh \frac{1}{2}\gamma_1 \end{aligned} \quad (5-7)$$

wordt de vorm analoog aan (5-5) verkregen:

$$\left[ \frac{d^2}{d\tau^2} + 1 \right] z(\tau_1) = [B^2(\tau_1) + B'(\tau_1)] z(\tau_1)$$

met  $z(\tau_1) = w_{\uparrow}(\tau_1) + w_{\downarrow}(\tau_1)$

en  $B(\tau_1) = \frac{1}{2}\gamma_1'(\tau_1)$

Het belang van deze methode schuilt hierin dat

- a) betere reflectievrije W.K.B.-benaderingen gevonden worden,
- b) kan (5-1) niet opgelost worden volgens Bremmer omdat

$\int |b(\sigma)| d\sigma > \frac{1}{2}\pi$ ; dan kan door diagonaliseren vaak een B gevonden worden zodat

$\int |B(\sigma)| d\sigma \leq \frac{1}{2}\pi$ . Zie hiervoor (V).

Opmerking: Wordt in (5-6) met  $\tau_1 = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{1 - b^2 - b'}$  de getransformeerd, dan krijgen we de bekende iteratieve W.K.B.-benadering (Br.)<sub>2</sub>.

Opmerking 2. De splitsing van de golf in een naar rechts en een naar links lopende golf volgens het diagonaalprocede houdt geen splitsing meer in naar de intensiteiten zoals gemakkelijk te verifiëren is.



Hoofdstuk 6. Reflectie en transmissiecoëfficiënt.

§ 1. Voor  $\xi \rightarrow \infty$  gaat de Bremmerreeks over in

$$\exp i\xi [1 + \Gamma^-(bu_1) + \Gamma^-(bu_3) + \dots] =: T \exp i\xi \quad (6-1)$$

Voor  $\xi \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \exp i\xi + \exp -i\xi [\Gamma^+(bu_0) + \Gamma^+(bu_2) + \dots] =: \\ =: \exp i\xi + R \exp -i\xi \end{aligned} \quad (6-2)$$

R en T zijn uitdrukkingen voor resp. de reflectie en transmissiecoëfficiënten.

Merk op dat de lineaire functionalen  $\Gamma^-$  resp  $\Gamma^+$  ook als Fouriergetransformeerde geïnterpreteerd kunnen worden.

Zo is:

$$\Gamma^\pm(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \pm i\eta f(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \pm ik\eta f(\eta) d\eta \quad (k = \pm 1)$$

en dit laatste is de Fouriergetransformeerde van f voor  $k = \pm 1$

Voor de reeks volgens Broer volgen deze coëfficiënten uit  $\xi \rightarrow -\infty$  daar de golf op de doorgelaten golf genormeerd is:

$$\begin{aligned} u(-\infty) = \exp i\xi [1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp -i\eta}{2i} g(\eta)u(\eta) d\eta] - \\ \exp -i\xi [\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp i\eta}{2i} g(\eta)u(\eta) d\eta] \end{aligned} \quad (6-3)$$

$$\text{Hier kan } \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\eta \frac{g(\eta)u(\eta)}{2i} d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \exp ik\eta \frac{g(\eta)u(\eta)}{2i} d\eta \quad (6-4)$$

voor  $k = +1$ , geïnterpreteerd worden als de Fouriergetransformeerde van  $\frac{g(\eta)u(\eta)}{2i}$  voor  $k = 1$ . Met de benadering  $u(\xi) = \exp i\xi$  gaat (6-4) over in

$$F_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp 2i\eta \frac{g(\eta) d\eta}{2i} = F\left(\frac{g}{2i}\right)_{k=2} \quad (6-5)$$

Definieer:

$$F_n = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\eta \frac{g(\eta)u_n(\eta)}{2i} d\eta \quad (6-6)$$

dan kan  $F_n$  uitgedrukt worden in  $F_{n-1}$ .

Voor  $n \geq 1$  is de reeks volgens Broer equivalent met het stelsel:

$$\begin{cases} \left[ \frac{d^2}{d\xi^2} + 1 \right] u_{n+1} = g u_n & n \geq 0 \\ u_0 = \exp i\xi \\ u_n \rightarrow 0 \text{ voor } \xi \rightarrow \infty \text{ als } n \geq 1 \\ u'_n(\xi) \rightarrow 0 \text{ voor } \xi \rightarrow \infty \text{ als } n \geq 1 \end{cases} \quad (6-7)$$

Voor het geval  $g$  een tempered function (L) is bestaat  $F[gu_n]$  voor  $n \geq 0$  en geldt formeel:

$$F(u_{n+1}) = \frac{F(gu_n)}{1-k^2}$$

waaruit:

$$F(u_{n+1}) = \frac{1}{2} \int \frac{\hat{g}(n-k) \hat{g} u_n(\eta)}{1-\eta^2} d\eta \quad (6-8)$$

( $\hat{\phantom{x}}$  betekent: Fouriergetransformeerde)

De integratieweg in (6-8) bestaat uit een weg langs de reële as die boven langs de polen gaat ( $\eta_{1,2} = \pm 1$ ) en een dito die onderlangs gaat.

Een benaderde oplossing kan verkregen worden d.m.v. het Schwinger-variatië principe (Mo).

De transmissie-coëfficiënt wordt gegeven door de uitdrukking:

$$T = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(x)g(x)u(x)dx - \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(y)g(y)\sin(y-x)g(x)u(x) dydx}{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(x)g(x)e^{ix}dx \int_{-\infty}^{\infty} u(y)g(y)e^{-iy}dy} \quad (6-9)$$

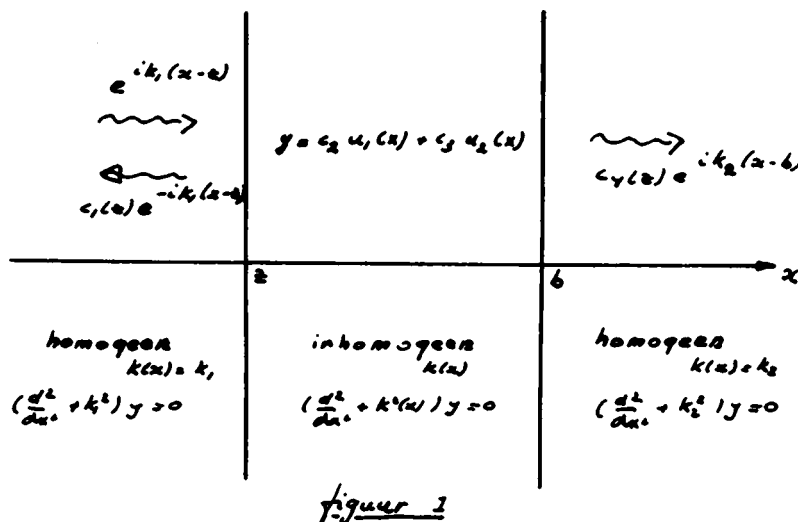
die stationair is. Uitdrukkingen voor  $T$  worden verkregen door substitutie van testfuncties voor  $u$  in (6-9).

Opmerking: geen van de hier gegeven uitdrukkingen geeft inzicht in een zinvolle orde-ontwikkeling voor de reflectie-c.q. transmissie-coëfficiënt.

§ 2. De reflectie en transmissie wordt anderzijds beschreven door een Ricatti-vergelijking. Beschouw daartoe figuur 1.

Hier is een medium gegeven dat voor  $(-\infty, z)$  en  $(b, \infty)$  homogeen is en voor  $(z, b)$  inhomogeen. Vanuit  $-\infty$  valt de genormaliseerde golf  $e^{ik_1(x-z)}$  in. Een gedeelte van deze golf wordt gereflecteerd aan het inhomogene medium en deze golf zal te beschrijven zijn als  $c_1(z)e^{-ik_1(x-z)}$  waarbij  $c_1(z)$  de reflectiecoëfficiënt voorstelt. De golf die door het inhomogene wordt doorgelaten kan voorgesteld worden als  $c_4(z)e^{ik_2(x-b)}$ . In het inhomogene medium wordt het golfverschijnsel beschreven door  $y = c_2 u_1(x) + c_3 u_2(x)$  waarbij  $y$  voldoet aan

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2(x) \right] y(x) = 0$$



Uit de randvoorwaarden:

1) het golfverschijnsel is continu en continu differentieerbaar in  $x = z$  en  $x = b$

$$\begin{aligned} 2) \quad & u_1(b) = 1 & u_1'(b) = 0 \\ & u_2(b) = 0 & u_2'(b) = 1 \end{aligned}$$

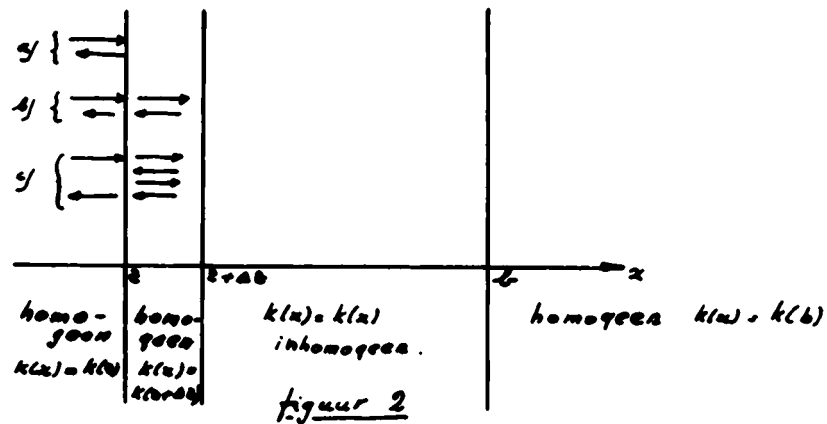
(Dit zijn voorwaarden die  $u_1$  en  $u_2$  vastleggen. Merk op dat  $u_1$  en  $u_2$  a priori niet samenvallen met  $u_+$  resp.  $u_-$ )

volgt de Ricatti-vergelijking voor de reflectie coëfficiënt

$$c_1'(z) = -2ik(z)c_1(z) + \frac{k'(z)}{2k(z)} [1 - c_1^2(z)]^2 \quad (6-10)$$

Een afleiding vanuit het model van Bremmer is gegeven door Bellman & Kalaba (B&K).

Denk een laagje ter dikte  $\Delta z$  met constante k-waarde voor het inhomogene medium en beschouw de verandering in  $c_1(z)$  ter plaatse  $x = z$  en  $x = z + \Delta z$ . Zie figuur 2.



Tot op 1<sup>o</sup> orde wordt de bijdrage aan de gereflecteerde golf gegeven door :

- a) reflectie aan het vlak  $x = z$ ,
- b) reflectie aan het vlak  $x = z + \Delta z$  (zie figuur),
- c) analoog (zie figuur),

zodat geldt:

$$c_1(z) = \frac{k(z) - k(z+\Delta)}{k(z) + k(z+\Delta)} + \frac{2k(z)}{k(z) + k(z+\Delta)} c_1(z+\Delta) e^{2ik(z+\Delta)\Delta} \frac{2k(z)}{k(z) + k(z+\Delta)} + \frac{2k(z)}{k(z) + k(z+\Delta)} e^{ik(z+\Delta)\Delta} u(z+\Delta) e^{ik(z+\Delta)} \frac{k(z+\Delta z) - k(z)}{k(z) + k(z+\Delta z)} e^{ik(z+\Delta)\Delta} \cdot u(z+\Delta) e^{ik(z+\Delta)\Delta} \frac{2k(z+\Delta)}{k(z+\Delta) + k(z)} + o(\Delta) \quad (6-11)$$

In de limiet gaat (6-11) over in (6-10).

Toepassing van deze methode aan het model van Sluijter (het laagje heeft een k-verloop volgens  $k(x) = \frac{1}{(\alpha x + \beta)^2}$  en het k-verloop is continu voor alle x) geeft voor (6-11):

$$c_1(z) = \frac{\alpha(z+\Delta z) - \alpha(z)}{\alpha(z+\Delta z) - \alpha(z) + 2i\sqrt{k(z)}} + \frac{2i\sqrt{k(z)}}{\alpha(z+\Delta z) - \alpha(z) + 2i\sqrt{k(z)}} \left( \frac{k(z)}{k(z+\Delta z)} \right)^{1/2} \exp(2i \int_{\Delta} k(s) ds) \cdot c_1(z+\Delta z) \frac{2i\sqrt{k(z)}}{\alpha(z) - \alpha(z+\Delta z) + 2i\sqrt{k(z)}} + \frac{2i\sqrt{k(z)}}{\alpha(z+\Delta z) - \alpha(z) + 2i\sqrt{k(z)}} \cdot \left( \frac{k(z)}{k(z+\Delta z)} \right)^{1/2} \exp(4i \int_{\Delta} k(s) ds) \cdot u(z+\Delta z) \frac{\alpha(z) - \alpha(z+\Delta z)}{\alpha(z) - \alpha(z+\Delta z) + 2i\sqrt{k(z)}} \cdot u(z+\Delta z) \frac{2i\sqrt{k(z+\Delta z)}}{\alpha(z) - \alpha(z+\Delta z) + 2i\sqrt{k(z+\Delta z)}} + o(\Delta) \quad (6-12)$$

In de limiet gaat (6-12) over in:

$$c_1'(z) = 2i \cdot k(1+\delta) c_1(z) + ik [1 + c_1^2(z)] \quad (6-13)$$

Hierin is  $\delta(z) = \frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}}(z) \frac{d^2}{dz^2} k^{-\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}}(z) \frac{d}{dz} \alpha(z)$

(6-13) komt overeen met de Ricattivergelijking voor de reflectie-coëfficiënt gebaseerd op de oplossing volgens Sluijter. (S)<sub>2</sub>

Hoofdstuk 7. Over de constructie van exakte oplossingen.

§1. De oplossingsmethode van de golfvergelijking volgens Bremmer (B) kan toegepast worden op ieder gelaagd model als het gedrag van het golfverschijnsel in dit model bekend is. Zo beschouwt Bremmer lagen met  $k(x)$  is constant. Reflectie en transmissie volgen uit continuïteit en de continuïteit van de afgeleide van het golfverschijnsel.

Sluïjter (S)<sub>1</sub> beschouwt lagen met

$$k(x) = k_s(x) = \frac{1}{(c_1 x + c_2)^2} \quad (c_1 \text{ en } c_2 \text{ constant}) \quad (7-1)$$

De constanten  $c_1$  en  $c_2$  kunnen nu gebruikt worden om het  $k(x)$  verloop met een continue kromme te benaderen. Het golfverschijnsel in de lagen wordt beschreven op de basis:

$$\phi_{1,2} = \frac{1}{k_s^{\frac{1}{2}}(x)} \exp \pm i \int_s^x k_s(s) ds \quad (7-2)$$

Om aan te tonen dat  $\phi_{1,2}(x)$  exakt aan de golfvergelijking voldoet wordt de golfvergelijking geschreven als:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \left[ k^2(x) - k^{\frac{1}{2}}(x) \frac{d^2}{dx^2} k^{-\frac{1}{2}}(x) \right] \phi(x) = \left[ -k^{\frac{1}{2}}(x) \frac{d^2}{dx^2} k^{-\frac{1}{2}}(x) \right] \phi(x) \quad (7-3)$$

(Deze schrijfwijze ligt ten grondslag aan de reeks volgens Broer. (Br)<sub>1</sub>)

Aan het linkerlid van (7-3) wordt exakt voldaan door:

$$\phi_{1,2}(x) = \frac{1}{k_s^{\frac{1}{2}}(x)} \exp \pm i \int^x k(y) dy$$

Beschouw nu het rechterlid als een storing op het golfverschijnsel beschreven door het linkerlid. Zie ook (0-7').

Nu geldt voor  $k(x) = k_s(x) = (c_1 x + c_2)^{-2}$  dat  $k^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dx^2} k^{-\frac{1}{2}}(x) = 0$

zodat  $\phi_{1,2}(x)$  volgens (7-2) een exacte oplossing is van de golfvergelijking met  $k(x) = k_s(x)$ .

Een andere exacte oplossing wordt verkregen door  $k(x) = k_i(x)$  waar  $k_i(x)$  volgt uit:

$$k_i^{\frac{1}{2}}(x) \frac{d^2}{dx^2} k_i^{-\frac{1}{2}}(x) = a k_i^2(x) \quad (a \text{ constant}) \quad (7-4)$$

Een basis van oplossingen wordt gegeven door

$$\phi_{1,2}(x) = \frac{1}{k_i^{\frac{1}{2}}(x)(1+a)^{\frac{1}{4}}} \exp \pm i \int k_i(y) [1+a]^{\frac{1}{2}} dy \quad (7-5)$$

Immers (7-5) voldoet aan

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + [k_i^2(x)(1+a) - k_i^{\frac{1}{2}}(1+a)^{\frac{1}{4}} \frac{d^2}{dx^2} k_i^{-\frac{1}{2}}(x)(1+a)^{-\frac{1}{4}}] \phi = 0 \quad (7-6)$$

nu geldt

$$k_i^2(1+a) - k_i^{\frac{1}{2}}(1+a)^{\frac{1}{4}} \frac{d^2}{dx^2} k_i^{-\frac{1}{2}}(1+a)^{-\frac{1}{4}} =$$

$$k_i^2 + k_i^2 a - k_i^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dx^2} k_i^{-\frac{1}{2}} =$$

$$k_i^2 + k_i^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dx^2} k_i^{-\frac{1}{2}} - k_i^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dx^2} k_i^{-\frac{1}{2}} = k_i^2$$

zodat (7-6) overgaat in

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + k_i^2 \phi = 0 \quad (7-7)$$

Aan (7-4) wordt voldaan door

$$k_i = \frac{c_1}{a + (c_1 x + c_2)^2} \quad (a, c_1 \text{ en } c_2 \text{ constant}) \quad (7-8)$$

Merk op dat voor  $a = 0$  (7-8) overgaat in (7-1).

Hier treden 3 vrijheidsgraden op voor de constructie van een exacte oplossing i.p.v. 2 zoals bij Sluifster (S)<sub>1</sub>.

De derde vrijheidsgraad  $a$  kan nu dienen voor speciale, echter wel continue benadering van de  $k(x)$ -kromme.

een bepaalde keuze voor  $a$  is de volgende. Beschouw daartoe de getransformeerde golfvergelijking:

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \phi = (b^2 + b') \phi$$

in de vorm:

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + [\sqrt{1-b^2-b'}]^2 \phi = 0 \quad (7-9)$$

Stel verder  $\{b^2 + b'\} = -\delta(\xi)$

De oplossing volgens Bremmer van (7-9) is

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_n u_n \\ u_0 &= \left\{ \frac{1+\delta(0)}{1+\delta(\xi)} \right\}^{\frac{1}{4}} \exp i \int_0^\xi \{1+\delta(s)\}^{\frac{1}{2}} ds \\ u_{2n} &= \frac{1}{2[1+\delta(\xi)]^{\frac{1}{4}}} \int_0^\xi dy \frac{\delta'(y)}{[1+\delta(y)]^{\frac{3}{4}}} u_{2n-1} \exp i \int_y^\xi dy' \{1+\delta(y')\}^{\frac{1}{2}} \quad (7-10) \\ u_{2n+1} &= \frac{-1}{2[1+\delta(\xi)]^{\frac{1}{4}}} \int_\xi^\infty dy \frac{\delta'(y)}{[1+\delta(y)]^{\frac{3}{4}}} u_{2n} \exp i \int_y^\xi dy' \{1+\delta(y')\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

De oplossing kan opgebouwd gedacht worden uit een laagjes model met  $\delta(\xi) = c$  (c constant) wat overeen komt met :

$$k^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dx^2} k^{-\frac{1}{2}}(x) = ck^2(x)$$

In de volgende paragraaf zal volgens het laagjesmodel de reeks afgeleid worden met willekeurige a.

Het zal dan blijken dat de keuze:

$$c = \left[ \frac{1}{k^2(x)} k^{\frac{1}{2}}(x) \frac{d^2}{dx^2} k^{-\frac{1}{2}}(x) \right]_{x_s} \quad (7-11)$$

(met  $x_s$  een willekeurige x uit dat laagje) juist (7-10) oplevert.

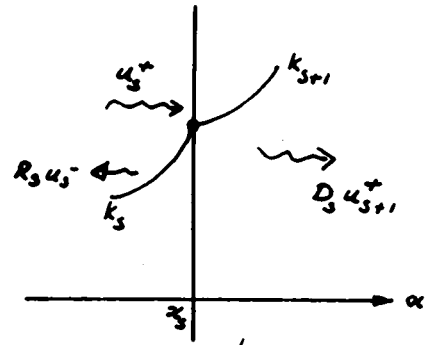


§ 2. De 1<sup>o</sup> orde W.K.B. benadering met a willekeurig.

figuur 1 geeft 2 media met een reflectievrij  $k(x)$  verloop van resp.  $k_s$  en  $k_{s+1}$  met

$$k_\alpha = \frac{c_\alpha^{(1)}}{a_\alpha + (c_\alpha^{(0)} x + c_\alpha^{(2)})^2} \quad (7-12)$$

( $\alpha = s, s+1$ )



figuur 1.

Verder is het  $k$ -verloop continu, zodat geldt:

$$k_s(x_s) = k_{s+1}(x_s) \quad (7-13)$$

De coëfficiënten  $R_s$  en  $D_s$  (resp. reflectie- en transmissiecoëfficiënt) volgen uit continuïteit en continuïteit van de afgeleide van het golfverschijnsel. Dit levert de 2 volgende vergelijkingen op:

$$\frac{1}{[k_{s+1}(x_s)]^{\frac{1}{2}}(1+a_{s+1})^{\frac{1}{4}}} D_s = \frac{1}{[k_s(x_s)]^{\frac{1}{2}}(1+a_s)^{\frac{1}{4}}} \{1 + R_s\} \quad (7-14)$$

en:

$$\frac{1}{k_{s+1}^{\frac{1}{2}}(x_s)(1+a_{s+1})^{\frac{1}{4}}} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{k'_{s+1}(x_s)}{k_{s+1}(x_s)} + ik_{s+1}(x_s)[1+a_{s+1}]^{\frac{1}{2}} \right\} D_s =$$

$$\frac{1}{k_s^{\frac{1}{2}}(1+a_s)^{\frac{1}{4}}} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{k'_s(x_s)}{k_s(x_s)} + ik_s(x_s)[1+a_s]^{\frac{1}{2}} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{k_s^{\frac{1}{2}}(x_s)(1+a_s)^{\frac{1}{4}}} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{k'_s(x_s)}{k_s(x_s)} - ik_s(x_s)[1+a_s]^{\frac{1}{2}} \right\} R_s \quad (7-15)$$

Uit (7-14) en (7-15) volgt met (7-13):

$$D_s = \frac{2i \left\{ \frac{1+a_s}{1+a_{s+1}} \right\}^{\frac{1}{4}} k_s(x_s) [1+a_s]^{\frac{1}{2}}}{\frac{k'_s(x_s)}{2k_s(x_s)} - \frac{k'_{s+1}(x_s)}{2k_{s+1}(x_s)} + ik_s(x_s) [(1+a_s)^{\frac{1}{2}} + (1+a_{s+1})^{\frac{1}{2}}]} \quad (7-16)$$

en de uitdrukking voor  $R_s$  wordt:

$$-R_s = \frac{\frac{k'_s(x_s)}{2k_s(x_s)} - \frac{k'_{s+1}(x_s)}{2k_{s+1}(x_s)} + ik_s(x_s) \{1 + a_{s+1}\}^{\frac{1}{2}} - ik_s(x_s) \{1 + a_s\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{k'_s(x_s)}{2k_s(x_s)} - \frac{k'_{s+1}(x_s)}{2k_{s+1}(x_s)} + ik_s(x_s) \{1 + a_{s+1}\}^{\frac{1}{2}} + ik_s(x_s) \{1 + a_s\}^{\frac{1}{2}}} \quad (7-17)$$

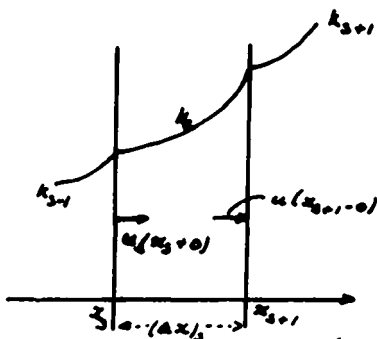
Nu is:  $\frac{k'(x)}{2k(x)} = -\{c''x + c'''\}k(x) = -k^{\frac{1}{2}}(x)/(c'' - ak) \quad (7-18)$

en:  $c'' = k(x) \left[ a + \left\{ \frac{k'(x)}{2k^{\frac{3}{2}}(x)} \right\}^2 \right] \quad (7-19)$

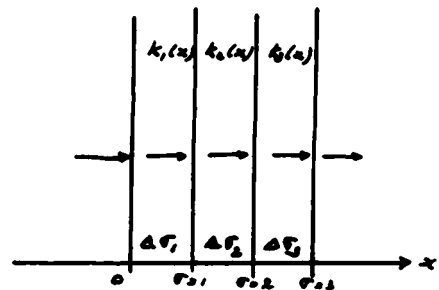
zodat:

$$\frac{k'_s(x_s)}{2k_s(x_s)} - \frac{k'_{s+1}(x_s)}{2k_{s+1}(x_s)} = k_s^{\frac{1}{2}}(x) \left\{ \sqrt{c''_{s+1} - a_{s+1}k_s} - \sqrt{c''_s - a_s k_s} \right\} \quad (7-20)$$

De fase- en amplitude verandering in een laagje met dikte  $\Delta x$  (Zie ook figuur 2) is:



figuur 2



figuur 3

$$\frac{u(x_{s+1} - 0)}{u(x_s + 0)} = \left\{ \frac{k_s}{k_{s+1}(x_{s+1})} \right\}^{\frac{1}{2}} \exp i \int_{x_s}^{x_{s+1}} k(y) \{1 + a_s\}^{\frac{1}{2}} dy =$$

$$\left\{ \frac{k_s}{k_{s+1}} \right\}^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ ik_s \{1 + a_s\}^{\frac{1}{2}} \frac{[1 + k_s \Delta x_s (c'' x_s + c''')] }{[1 + k_s \Delta x_s (c'' x_s + c''')] - (\Delta x_s)^2 k_s^2 a_s} \right\} \Delta x_s \quad (7-21)$$

Voor een lagen model geldt volgens Bremmer (zie (B), (S)<sub>1</sub> en figuur 3) dat de eerste orde W.K.B.-benadering gegeven wordt door:

$$u_0(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \prod_{\sigma=0}^{s-1} D_{\sigma} \frac{u_0(\sigma+1-0)}{u_0(\sigma+0)} \quad (7-22)$$

met:

$$\prod_{\sigma=0}^{s-1} D_{\sigma} \frac{u_0(\sigma+1-0)}{u_0(\sigma+0)} = \exp \left\{ \sum_{\sigma=0}^{s-1} \left[ \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{k_{\sigma}}{k_{\sigma+1}} \right\} + \ln D_{\sigma} + i k_{\sigma} (1+a_{\sigma})^{\frac{1}{2}} \Delta x_{\sigma} \right] \right\} \quad (7-22)$$

met  $\Delta x_{\sigma}$  voldoende klein, in verband met de toegepaste benadering voor (7-21):

Met behulp van (7-16) tot en met (7-21) geldt:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \exp \sum_{\sigma=0}^{s-1} \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{k_{\sigma}}{k_{\sigma+1}} \right] &= \left\{ \frac{k(0)}{k(x)} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \exp \sum_{\sigma=0}^{s-1} \ln D_{\sigma} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \exp \sum_{\sigma=0}^{s-1} \ln \left\{ \frac{1+a_{\sigma}}{1+a_{\sigma+1}} \right\}^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \exp \sum_{\sigma=0}^{s-1} \frac{\sqrt{c_{\sigma+1}^{(u)} - a_{\sigma+1} k_{\sigma}} - \sqrt{c_{\sigma}^{(u)} - a_{\sigma} k_{\sigma}}}{\Delta x_{\sigma}} \Delta x_{\sigma} = \\ &= \left\{ \frac{1+a(0)}{1+a(x)} \right\}^{\frac{1}{2}} \exp i \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{c^{(u)} - ak}} \left\{ \frac{dc^{(u)}}{dy} - k \frac{da}{dy} \right\} \frac{k^{-1} dy}{2(1+a(y))^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

(7-22) geeft nu:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \prod_{\sigma=0}^{s-1} D_{\sigma} \frac{u_0(\sigma+1-0)}{u_0(\sigma+0)} = \\ u_0(x) &= \left\{ \frac{k(0)}{k(x)} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1+a(0)}{1+a(x)} \right\}^{\frac{1}{2}} \exp i \int_0^x \left\{ \frac{1}{2\sqrt{c^{(u)} - ak}} \frac{dc^{(u)}}{dy} - \frac{k \frac{da}{dy}}{2(1+a)^{\frac{1}{2}}} + k(1+a)^{\frac{1}{2}} \right\} dy \end{aligned} \quad (7-23)$$

met  $c^{(u)}(x) = k(x) \left[ a(x) + \left\{ \frac{k'(x)}{2k(x)} \right\}^2 \right]$

De constructie met een lagen model met  $a_s = 0$  (voor alle  $s$ ) geeft voor

(7-23):

$$u_0(x) = \left\{ \frac{k(0)}{k(x)} \right\}^{\frac{1}{2}} \exp i \int_0^x k(y) \{ 1 + \delta(y) \} dy \quad (7-24)$$

met  $\delta(y) = \frac{1}{k} k^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dx^2} k^{-\frac{1}{2}}$

(7-24) is inderdaad de " $1^0$  orde W.K.B. -benadering" gegeven door Sluijter (5)<sub>1</sub>.

De constructie van een lagenmodel met a volgens (7-11) geeft voor (7-23):

$$u_0(x) = \left\{ \frac{k(0)}{k(x)} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1+\delta(0)}{1+\delta(x)} \right\}^{\frac{1}{2}} \exp i \int_0^x k(y) \{1 + \delta(y)\}^{\frac{1}{2}} dy \quad (7-25)$$

(7-25) is inderdaad de " $1^0$  orde W.K.B.-benadering" volgens Bremmer in de vorm (7-10).

§3. Hogere orde benaderingen.

Analoog aan de methode van Bremmer kunnen hogere orde correcties gegeven worden, in de vorm van recurrente betrekkingen. Voor de oplossing wordt dan gevonden:

$$u(x) = \sum_0^{\infty} u_n(x),$$

met

$$u_0(x) = \frac{1}{\alpha} \exp i \int_0^x \{ \beta(y) + k(y)(1+a)^{\frac{1}{2}} \} dy$$

$$u_{2n+1}(x) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^x d\sigma u_{2n}(\sigma) \{1+a\}^{\frac{1}{4}} \left\{ \frac{\beta}{i} + \gamma \right\} \exp i \int_{\sigma}^x \{ \beta + k(1+a)^{\frac{1}{2}} \} dn$$

$$u_{2n}(x) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^x d\sigma u_{2n-1}(\sigma) \{1+a\}^{\frac{1}{4}} \left\{ \frac{\beta}{i} - \gamma \right\} \exp i \int_{\sigma}^x \{ \beta + k(1+a)^{\frac{1}{2}} \} dn$$

met:  $\alpha(x) = k^{\frac{1}{2}}(x) \{1+a\}^{\frac{1}{4}}$

$$\beta = \frac{1}{2\sqrt{c - ak}} \frac{\frac{dc}{dx} - k \frac{da}{dx}}{2(1+a)^{\frac{1}{2}} k}$$

$$\gamma = \frac{\frac{dk}{dx}}{2(1+a)}$$

Verdere uitwerking, ook ten aanzien van de convergentie en ten aanzien van hoofdstuk 3 valt buiten het kader van dit verslag.

Appendix 1.

De golfvergelijking :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left\{ k^2(x) - 2\left[\frac{k'(x)}{k(x)}\right]^2 + \frac{k''(x)}{k(x)} \right\} \phi = 0 \quad (\text{A})$$

gaat door de transformatie:

$$\phi(x) = \frac{1}{k^{1/4}(x)} u(x)$$

$$\xi = \int^x k(y) dy$$

over in:

$$\left[ \frac{d^2}{d\xi^2} + 1 \right] u = \left[ b^2 - b' \right] u \quad (\text{B})$$

(B) is equivalent met:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} u_1 = i u_1 - b u_2 \\ \frac{d}{d\xi} u_2 = -b u_1 - i u_2 \end{cases} \quad (\text{C})$$

of wat hetzelfde is :

$$\begin{cases} L^- u_1 = -b u_2 \\ L^+ u_2 = -b u_1 \end{cases} \quad (\text{D})$$

Immers met behulp van E(1) en E(2) (Zie hoofdstuk 1) geldt:

$$L u_1 = L^+ L^- u_1 = L^+ (-b u_2) = -b L^+ u_2 - b' u_1 = b^2 u_2 - b' u_1$$

$$L u_2 = L^- L^+ u_2 = L^- (-b u_1) = -b L^- u_1 - b' u_2 = b^2 u_1 - b' u_2$$

waaruit door optelling (B).

Anderzijds volgt (C) uit het stelsel van Bremmer:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} U_{\uparrow} = i U_{\uparrow} + b U_{\downarrow} \\ \frac{d}{d\xi} U_{\downarrow} = b U_{\uparrow} - i U_{\downarrow} \end{cases} \quad (\text{E})$$

door de transformatie:

$$\begin{aligned}u_1 &= U_{\uparrow} \\u_2 &= -U_{\downarrow}.\end{aligned}$$

Qua structuur volgt (C) uit (E) door  $b$  te vervangen door  $-b$ .

Het een en ander kan als volgt geformuleerd worden:

*De vervanging van  $k^2(x)$  door  $k^2(x) - 2\left\{\frac{k'(x)}{k(x)}\right\}^2 + \frac{k''(x)}{k(x)}$  in de golfvergelijking  $\frac{d^2}{dx^2}\phi + k^2(x)\phi = 0$  houdt voor  $\phi$  in dat de fase van de naar links lopende golf tegengesteld genomen moet worden. In de uitdrukking voor  $\phi$  volgens (0-2) of (0-4) betekent dit dat  $b$  door  $-b$  vervangen dient te worden.*

Referenties.

- (A) Atkinson, F.V., J.Math.Anal. and Appl. 1 (1960) 255
- (B) Bremmer, H., Comm. Pure and Appl. Math. IV (1955) 105
- (B&K) Belmann, R., Robert Kalaba, J. of Math. and Mech. Vol.8 no.5  
(1959) 683
- (Br)<sub>1</sub> Broer, L.J.F., Appl.Sci.Res. B 10 (1963) 110
- (Br)<sub>2</sub> Broer, L.J.F., Collegedictaat math.fysica, pag.149 1<sup>o</sup> druk
- (K) Kampen, N.G. van, Physica 35 (1967) 70
- (L) Lighthill, M.J., Introduction to Fourieranal. and generalised  
functions, Cambridge 1959
- (Mo) Moiseiwitsch, B.L., Variational Principles, New York 1966,  
pag.213 e.v.
- (M) Mirovitskii, D.I. and I.F. Budagyan, Optics and Spectroscopy  
21 (1966) 138
- (S)<sub>1</sub> Sluijter, F.W., J.Math.Anal. Applic. 27 (1969) 282
- (S)<sub>2</sub> Sluijter, F.W., Journ. of the optical Soc. of America 60  
(1970) 8
- (V) Verheggen, Th.M.M., Stageverslag Theoretische Natuurkunde