

MASTER

Reflectie en transmissie aan een gelaagd plasma

Harmsen, L.A.J.

Award date:
1972

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

REFLECTIE EN TRANSMISSIE AAN EEN GELAAGD PLASMA

Verslag van het afstudeerwerk van
L.A.J.Harmsen
in de groep Theoretische Natuurkunde
onder leiding van Dr.F.W.Sluijter

Technische Hogeschool Eindhoven
mei 1972

SAMENVATTING

In het eerste hoofdstuk van dit verslag worden de differentiaalvergelijkingen (d.v.'s) afgeleid, die het gedrag beschrijven van e.m. golven in een koud gestratificeerd plasma. Voor een willekeurige brekingsindex zijn de d.v.'s onhanteerbaar.

Er bestaat een uitvoerige literatuur over het bepalen van zodanige brekingsindices, dat de d.v. voor de e.m. golf met het elektrisch veld in het vlak van inval en bij schuine inval overgaat in een eenvoudige d.v. zoals o.a. de hypergeometrische d.v., de confluent hypergeometrische d.v., de d.v.'s van Bessel en Legendre.

In het tweede hoofdstuk wordt op bovenstaand probleem ingegaan voor de hypergeometrische d.v.. Er wordt ingegaan op de vraag of er misschien niet meer brekingsindices zijn die de bedoelde d.v. in een hypergeometrische d.v. doen overgaan.

In het laatste hoofdstuk worden enige reflectie- en transmissiecoëfficiënten berekend.

1. DE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN VOOR EEN KOUD PLASMA

A. Met uitwendig B-veld

We beschouwen een plasma, waarin zich een e.m.golf voortplant. De frequentie van de golf wordt zodanig hoog verondersteld, dat de invloed van de trillingen van de, in het plasma aanwezige ionen te verwaarlozen zijn t.o.v. de electronen-trillingen. Er wordt dus uitgegaan van een electronenplasma tegen een neutraliserende achtergrond van oneindig zware ionen. De temperatuur in het plasma wordt laag genoeg verondersteld om krachten, veroorzaakt door drukgradiënten verwaarloosbaar klein te doen zijn t.o.v. de elektrische en magnetische krachten. ref. [4].

Als \vec{E} , \vec{B} , \vec{v} , t , N , e , m resp. het elektrische veld, het magnetische veld, de snelheid van de electronen, de tijd, de electronendichtheid, de lading van het electron en de electronenmassa voorstellen, kan men de volgende vergelijkingen opstellen:

$$N m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + N m \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = N e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla N + N \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1b)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1c)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + N e \vec{v} \quad (1d)$$

Voordat de e.m.golf op het plasma valt, wordt dit geacht zich in een evenwichtstoestand te bevinden. De grootheden in evenwicht voeren een index 0. In het probleem, dat we bekijken wordt verondersteld dat N_0 alleen een functie van z is en dat de e.m.golven zich voortplanten in richtingen evenwijdig aan het y - z vlak. Een eventueel uitwendig magnetisch veld is homogeen en evenwijdig aan de x -as. We beperken ons dus tot golven, die zich loodrecht op dat statische magnetische veld voortplanten. Een grootheid in (1) schrijven we als de som van de evenwichtswaarde en een variabel deel: $N = N_0(z) + N_1$, $\vec{E} = \vec{E}_1$, $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$, $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$.

Voor het evenwicht moet nu gelden:

$$N_0 m \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_0 = N_0 e \vec{v}_0 \times \vec{B}_0 \quad (2a)$$

$$\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} N_0 + N_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 = 0 \quad (2b)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = N_0 e \vec{v}_0 \quad (2c)$$

Uit (2c) volgt dat er alleen een evenwicht mogelijk is met de hierboven aangegeven voorwaarden als $\vec{v}_0 = 0$.

De vergelijkingen (1) kunnen op de gebruikelijke wijze gelineariseerd worden. Gelineariseerd zien ze er als volgt uit:

$$N_0 m \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = N_0 e (\vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \quad (3a)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} N_0 + N_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (3b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \quad (3c)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} + N_0 e \vec{v}_1 \quad (3d)$$

Vergelijking (3b) is niet van belang voor het oplossen van \vec{E}_1 en \vec{B}_1 .

Worden de vergelijkingen (3) uitgeschreven, rekening houdend met de gegeven geometrie en laat men de index 1 weg, dan verschijnen de volgende ontkoppelde stelsels vergelijkingen:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{e}{m} E_x \quad (4a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (4b)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} N_0 e v_x \quad (4c)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (4d)$$

en

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{e}{m} (E_y + v_z B_0) \quad (5a)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{e}{m} (E_z - v_y B_x) \quad (5b)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = - \frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (5c)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{N_0 e}{\epsilon_0 c^2} v_y \quad (5d)$$

$$- \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{N_0 e}{\epsilon_0 c^2} v_z \quad (5e)$$

Het stelsel (4) beschrijft de voortplanting van de e.m.golf met het elektrische veld loodrecht op het vlak van inval en evenwijdig aan het magnetische veld (de gewone golf). Bij het stelsel (5) ligt het elektrische veld in het vlak van inval en loodrecht op het magnetische veld (de buitengewone golf).

$$\text{Met } \vec{E} = \vec{E}(z) e^{i(k(z) \sin \theta y - \omega t)}, \quad \vec{B} = \vec{B} e^{i k \sin \theta y - i \omega t}, \quad \vec{v} = \vec{v} e^{i k \sin \theta y - i \omega t} \quad (6)$$

gaat het stelsel (4) over in:

$$-i\omega \hat{v}_x = \frac{e}{m} \hat{E}_x \quad (7a)$$

$$\frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} = \hat{B}_y i\omega \quad (7b)$$

$$i k \sin \theta \hat{E}_x = -i\omega \hat{B}_z \quad (7c)$$

$$\hat{B}_z i k \sin \theta - \frac{\partial \hat{B}_y}{\partial z} - \hat{B}_y i y \frac{\partial k \sin \theta}{\partial z} = \frac{-i\omega \hat{E}_x}{c^2} + \frac{N_0 e}{\epsilon_0 c^2} \hat{v}_x \quad (7d)$$

Door eliminatie van \hat{B}_y , \hat{B}_z en \hat{v}_x uit (7) houden we een vergelijking voor \hat{E}_x over:

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_x}{\partial z^2} + \left\{ k_0^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) - (k \sin \theta)^2 \right\} \hat{E}_x = - \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} i y \frac{\partial (k \sin \theta)}{\partial z} \quad (8)$$

waarbij de plasmafrequentie ω_p gedefinieerd wordt door $\omega_p^2 = \frac{N_0 e^2}{\epsilon_0 m}$, $k_0 = \frac{\omega}{c}$.

Vergelijking (8) moet gelden voor iedere y dus $k \sin \theta$ is konstant. Als θ_0 de hoek is, die de voortplantingsrichting van de golf maakt met de z -as, voordat de golf op het plasma valt, ligt het voor de hand $k \sin \theta$ gelijk te kiezen aan $k_0 \sin \theta_0$.

De gewone golf wordt beschreven door:

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_x}{\partial z^2} + k_0^2 (\epsilon - \sin^2 \theta) \hat{E}_x = 0 \quad \epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (9)$$

Uit vergelijking (8) volgt de wet van Snellius: $\frac{\partial(k \sin \theta)}{\partial z} = 0$. Om het rekenwerk bij het aanpakken van het stelsel (5) overzichtelijk te houden wordt deze wet er bij het begin van de berekeningen al ingestopt. ref. [1]. Met behulp van (6) gaat het stelsel (5) over in:

$$-i\omega \hat{v}_y = \frac{e}{m} (\hat{E}_y + \hat{v}_z B_0) \quad (10a)$$

$$-i\omega \hat{v}_z = \frac{e}{m} (\hat{E}_z - \hat{v}_y B_0) \quad (10b)$$

$$ik \sin \theta \hat{E}_z - \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} = i\omega \hat{B}_x \quad (10c)$$

$$\frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z} = -\frac{i\omega}{c^2} \hat{E}_y + \frac{N_0 e}{\epsilon_0 c^2} \hat{v}_y \quad (10d)$$

$$-ik \sin \theta \hat{B}_x = -\frac{i\omega}{c^2} \hat{E}_z + \frac{N_0 e}{\epsilon_0 c^2} \hat{v}_z \quad (10e)$$

Uit (10a) en (10b) is \hat{v}_y en \hat{v}_z te berekenen:

$$\hat{v}_y = \frac{ie}{\omega m (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \hat{E}_y - \frac{e\Omega}{\omega^2 m (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \hat{E}_z \quad (11a)$$

$$\hat{v}_z = \frac{ie}{\omega m (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \hat{E}_z + \frac{e\Omega}{\omega^2 m (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \hat{E}_y \quad (11b)$$

$\Omega = \frac{eB_0}{m}$. Hiermee is het stelsel (10) te schrijven:

$$ik \sin \theta \hat{E}_z - \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} = i\omega \hat{B}_x \quad (12a)$$

$$\frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z} = \frac{i\omega}{c^2} \left(-1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})}\right) \hat{E}_y - \frac{\Omega \omega_p^2}{c^2 \omega^3 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \hat{E}_z \quad (12b)$$

$$-ik \sin \theta \hat{B}_x = \frac{i\omega}{c^2} \left(-1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})}\right) \hat{E}_z + \frac{\Omega \omega_p^2}{c^2 \omega^2 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \hat{E}_y \quad (12c)$$

Met behulp van (12b) en (12c) drukken we \hat{E}_z en \hat{E}_y uit in \hat{B}_x en $\frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z}$.

$$\hat{E}_y T = \frac{i\omega}{c^2} \left(-1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \right) \frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z} - \frac{ik \sin \theta \Omega \omega_p^2}{c^2 \omega^2 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \hat{B}_x \quad (13a)$$

$$\hat{E}_z T = \frac{-\Omega \omega_p^2}{c^2 \omega^2 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z} + \frac{\omega}{c^2} \left(-1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \right) k \sin \theta \hat{B}_x \quad (13b)$$

$$\text{Waarbij } T = \frac{\Omega^2 \omega_p}{c^4 \omega^4 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2} - \frac{\omega^2}{c^4} \left(-1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \right) \quad (14)$$

Door differentiatie van (13a) naar z is $\frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z}$ in $\frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z}$ en \hat{B}_x uit te drukken:

$$T \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} = \frac{i\omega}{c^2} \left(-1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \right) \frac{\partial^2 \hat{B}_x}{\partial z^2} + \frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z} \left(\frac{2i\omega_p \frac{\partial \omega_p}{\partial z}}{c^2 \omega (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} - \frac{ik \sin \theta \Omega \omega_p^2}{c^2 \omega^2 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} + \right. \\ \left. - \frac{i\omega \frac{\partial T}{\partial z}}{c^2 T} \left(-1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \right) \right) + \hat{B}_x \left(\frac{ik \sin \theta \Omega \omega_p^2 \frac{\partial T}{\partial z}}{T c^2 \omega^2 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} - \frac{2ik \sin \theta \Omega \omega_p \frac{\partial \omega_p}{\partial z}}{c^2 \omega^2 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \right) \quad (15)$$

De vergelijkingen (15) en (13b) in (12a) substitueren levert na vereenvoudiging een d.v. voor \hat{B}_x :

$$\frac{\partial^2 \hat{B}_x}{\partial z^2} + \frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z} \left(\frac{2\omega_p \frac{\partial \omega_p}{\partial z}}{(-\omega^2 + \Omega^2 + \omega_p^2)} - \frac{\frac{\partial T}{\partial z}}{T} \right) + \hat{B}_x \left\{ - (k \sin \theta)^2 + \frac{k \sin \theta \Omega \omega_p^2 \frac{\partial T}{\partial z}}{T \omega (-\omega^2 + \Omega^2 + \omega_p^2)} + \right. \\ \left. - \frac{2k \sin \theta \Omega \omega_p \frac{\partial \omega_p}{\partial z}}{\omega (-\omega^2 + \Omega^2 + \omega_p^2)} + \frac{c^2 T (\omega^2 - \Omega^2)}{(-\omega^2 + \Omega^2 + \omega_p^2)} \right\} = 0 \quad (16)$$

(14) in (16):

$$\frac{\partial^2 \hat{B}_x}{\partial z^2} + \frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z} \left\{ - \frac{2\omega_p}{\omega} \frac{\partial \frac{\omega_p}{\omega}}{\partial z} + 4 \frac{\omega_p}{\omega} \frac{\partial \frac{\omega_p}{\omega}}{\partial z} \frac{\left((1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) + \frac{\omega^2 \Omega^2}{\omega^4} \right)}{\left((1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})^2 - \frac{\omega_p^4 \Omega^2}{\omega^6} \right)} \right\} + \\ + \hat{B}_x \left\{ - (k_0 \sin \theta)^2 + \frac{4k_0 \sin \theta \Omega \frac{\omega_p}{\omega} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right) \frac{\partial \frac{\omega_p}{\omega}}{\partial z} \left((1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) + \frac{\omega^2 \Omega^2}{\omega^4} \right)}{\left((1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \left((1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})^2 - \frac{\Omega^2 \omega_p^4}{\omega^6} \right) \right)} + \frac{2k_0 \sin \theta \Omega \frac{\omega_p}{\omega} \frac{\partial \frac{\omega_p}{\omega}}{\partial z}}{\left((1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \right)} + \right. \\ \left. + \frac{k_0^2 \left((1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})^2 - \frac{\Omega^2 \omega_p^4}{\omega^6} \right)}{\left((1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \left((1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \right) \right)} \right\} = 0 \quad (17)$$

B. Zonder uitwendig magnetisch veld

De golf met het elektrisch veld loodrecht op het vlak van inval wordt beschreven door (9), ook voor het geval dat het uitwendig magnetisch veld afwezig is.

Voor de golf met het elektrisch veld in het vlak van inval gaan we uit van het stelsel (5) met $B_o = 0$.

Met (6) wordt stelsel (5):

$$ik \sin \theta \hat{E}_z - \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} - iy \frac{\partial(k \sin \theta)}{\partial z} \hat{E}_y = i\omega \hat{B}_x \quad (18a)$$

$$\frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z} + iy \frac{\partial(k \sin \theta)}{\partial z} \hat{B}_x = \left(-\frac{i\omega}{c^2} + \frac{i\omega^2}{c^2 \omega}\right) \hat{E}_y \quad (18b)$$

$$-ik \sin \theta \hat{B}_x = \left(-\frac{i\omega}{c^2} + \frac{i\omega^2}{c^2 \omega}\right) \hat{E}_z \quad (18c)$$

(18b) differentieren en met (18c) invullen in (18a):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{B}_x}{\partial z^2} + \frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z} \left(-\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right) + \hat{B}_x \left(k_o^2 \epsilon - k_o^2 \sin^2 \theta_o\right) = y \left\{ \frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z} 2i \frac{\partial(k \sin \theta)}{\partial z} + \right. \\ \left. + \hat{B}_x \left(i \frac{\partial^2(k \sin \theta)}{\partial z^2} + \frac{c'}{\epsilon} \frac{\partial(k \sin \theta)}{\partial z} - y \left(\frac{\partial(k \sin \theta)}{\partial z} \right)^2 \right) \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

We vinden weer de wet van Snellius: $\frac{\partial(k \sin \theta)}{\partial z} = 0$ en een vergelijking voor \hat{B}_x :

$$\frac{\partial^2 \hat{B}_x}{\partial z^2} + \frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z} \left(-\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right) + \hat{B}_x \left(k_o^2 \epsilon - k_o^2 \sin^2 \theta_o\right) = 0 \quad (20)$$

Vergelijking (20) is ook te krijgen uit (17) met $\Omega = 0$.

Door de substitutie $\hat{B}_x = \epsilon^{\frac{1}{2}} u$ gaat (20) over in:

$$u'' + u \left\{ \frac{\epsilon''}{2\epsilon} - \frac{3}{4} \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right)^2 + k_o^2 (\epsilon - \sin^2 \theta_o) \right\} = 0 \quad (21)$$

C. Typen van differentiaalvergelijkingen

Voor $\omega_p(z)$ kan men diverse functies kiezen.

We zullen ons beperken tot de volgende twee Epstein profielen:

het overgangsprofiel: $\omega_p^2(z) = \frac{1}{2} \omega_{p_0}^2 \left(1 + \tanh \frac{z}{2l}\right) = \omega_{p_0}^2 \frac{1}{1-\eta}$ (22)

het symmetrische profiel: $\omega_p^2(z) = -\frac{1}{4} \omega_{p_0}^2 \cosh^{-2} \frac{z}{2l} = \omega_{p_0}^2 \frac{\eta}{(\eta-1)^2}$ (23)

$$\eta = -e^{-\frac{z}{l}}$$

De vergelijkingen (9), (21), en (17) worden door resp. (24), (25) en (26) geschreven als functie van η .

$$\hat{E}_x'' + \frac{1}{\eta} \hat{E}_x' + \hat{E}_x \frac{k_0^2 l^2 (\epsilon - \sin^2 \theta_0)}{\eta^2} = 0 \tag{24}$$

$$u'' + \frac{1}{\eta} u' + u \left\{ \frac{\epsilon''}{2\epsilon} + \frac{\epsilon'}{2\eta\epsilon} - \frac{3}{4} \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right)^2 + \frac{k_0^2 l^2 (\epsilon - \sin^2 \theta_0)}{\eta^2} \right\} = 0 \tag{25}$$

$$\begin{aligned} & \hat{B}_x'' + \hat{B}_x' \left\{ \frac{1}{\eta} - \frac{2 \frac{\omega_p}{\omega} \frac{\partial \omega_p}{\partial \eta}}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)} + 4 \frac{\omega_p}{\omega} \frac{\partial \omega_p}{\partial \eta} \frac{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) + \frac{\omega_p^2 \Omega^2}{\omega^2 \omega^2}}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2 - \frac{\Omega^2 \omega_p^2}{\omega^2 \omega^2}} \right\} + \\ & + \hat{B}_x \left\{ -\left(\frac{k_0 l \sin \theta_0}{\eta}\right)^2 - \frac{4 k_0 l \sin \theta_0 \frac{\Omega}{\omega} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{\partial \omega_p}{\partial \eta} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) + \frac{\omega_p^2 \Omega^2}{\omega^2 \omega^2}}{\eta \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2 - \frac{\Omega^2 \omega_p^2}{\omega^2 \omega^2}} - \frac{2 k_0 l \sin \theta_0 \frac{\Omega}{\omega} \frac{\omega_p}{\omega} \frac{\partial \omega_p}{\partial \eta}}{\eta \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)} \right. \\ & \left. + \frac{k_0^2 l^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2 - \frac{\Omega^2 \omega_p^2}{\omega^2 \omega^2}}{\eta^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)} \right\} = 0 \tag{26} \end{aligned}$$

De vergelijkingen (24), (25) en (26) worden door de functies (22) en (23) overgevoerd in homogene lineaire d.v. van de 2e orde, waarvan alle singuliere punten regulier zijn (Fuchse d.v.).

In het meest algemene geval d.w.z. als $\frac{\Omega^2}{\omega^2}$ en $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ zodanig zijn dat er geen confluenties optreden, hebben we voor de verschillende d.v.'s de volgende aantallen reguliere singuliere punten:

	overgangsprofiel	symmetrisch profiel
verg. (24)	3	3
verg. (25)	4	4
verg. (26)	6	6

2. OPLOSBARE VERGELIJKINGEN

A. Inleiding

De d.v.'s van Fuchs kunnen opgelost worden met een machtrekssubstitutie

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\eta - b)^{n+\lambda}$. Is b een singulariteit dan geven de coëfficiënten van η^λ een 2e graads indiciaalvergelijking voor λ . De coëfficiënten van $\eta^{\lambda+n}$ ($n \neq 0$) bepalen de recurrentiebetrekking tussen de a_n 's.

Is het verschil van de oplossingen van de indiciaalvergelijking ongelijk aan een geheel getal, dan hoort bij iedere λ een oplossing van de d.v.. Deze oplossingen zijn lineair onafhankelijk.

De machtreeksen zijn convergent binnen iedere cirkel, waarbinnen geen singulariteit ligt behalve b .

Wil men de reflectie- en transmissiecoëfficiënt bepalen, dan moet de oplossing rond $z = \infty$ ($\eta = 0$) te schrijven zijn als lineaire combinatie van de oplossing rond $z = -\infty$ ($\eta = -\infty$).

In dit verband is de volgende stelling interessant.

Stelling 1

Stel $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is de oplossing van een Fuchse d.v. met m reguliere singuliere punten (zonder confluenties)

$$P \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & b_2 & b_3 & \dots & b_{m-1} & \infty \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda_1 \\ 1-\beta_1 & 1-\beta_2 & 1-\beta_3 & & 1-\beta_{m-1} & \lambda_2 \end{array} \right\}$$

met $\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2$ ongelijk aan een geheel getal.

Als verder $a(w)$, $w = x + iy$, een oplossing is van de recurrentiebetrekking met $a(0) = 1$, $a(-n) = 0$ $n = 1, 2, 3, \dots$ dan is $a(w)$ singulier in de punten $w = -\lambda_1 - n$ en $w = -\lambda_2 - n$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ en $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n}$, waarbij c_n, d_n het residu is van de functie $\frac{\pi a(w)(-z)^w}{\sin \pi w}$ in het punt $w = -\lambda_1 - n$ resp. $w = -\lambda_2 - n$ $n = 0, 1, 2, \dots$

Onder $(-z)^w$ wordt verstaan als $z = r e^{i\theta}$: $(-z)^w = e^{w(\log r + i(\theta - \pi))}$.

Bewijs

De standaardvorm van bovenbedoelde d.v. is:

$$y'' + y' \left[\frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z - b_1} + \frac{\beta_3}{z - b_2} + \dots + \frac{\beta_{m-1}}{z - b_{m-1}} \right] + y \left[\frac{\lambda_1 \lambda_2 z^{m-2} + e_1 z^{m-4} + \dots + e_{m-2}}{z(z - b_2)(z - b_3) \dots (z - b_{m-1})} \right] \quad (1)$$

met $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{m-1} = 1 + \lambda_1 + \lambda_2$.

of (1) anders geschreven:

$$z^2 \left(z^{m-2} + \dots + (-1)^m l_2 l_3 \dots l_{m-1} \right) y'' + z \left((\beta_1 + \dots + \beta_{m-1}) z^{m-2} + \dots + c \right) y' + (\lambda_1 \lambda_2 z^{m-2} + \dots + e_{m-3} z) y = 0 \quad (2)$$

Aan (2) is te zien dat de recurrentiebetrekking van (1) de volgende gedaante heeft:

$$P_0(w) a(w) = P_1(w) a(w+1) + \dots + P_{m-2}(w) a(w+m-2) \quad (3)$$

waarbij $P_0(w), P_1(w), \dots, P_{m-2}(w)$ polynomen zijn van de 2e graad in w . In het bijzonder is $P_{m-2}(w)$ en $P_0(w)$

$$P_{m-2}(w) = - \left\{ (w+m-2)(w+m-3)(-1)^m l_2 l_3 \dots l_{m-1} + (w+m-2)c \right\} \rightarrow P_{m-2}(-m+2) = 0 \quad (4)$$

$$P_0(w) = \left\{ w(w-1) + w(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{m-1}) + \lambda_1 \lambda_2 \right\} = (w + \lambda_1)(w + \lambda_2) \quad (5)$$

Milne-Thomson noemt verg. (3) een normale homogene lineaire differentievergelijking van de $(m-2)!$ orde. Voor de overzichtelijkheid beperk ik me tot het opnoemen van de eigenschappen van oplossingen van (3).

1) Er zijn $(m-2)$ oplossingen (allen zeker lineair onafhankelijk), die analytisch zijn in het halfvlak $\operatorname{Re} w > \max \operatorname{Re}(-\lambda_1, -\lambda_2)$. Met behulp van (3) kunnen die oplossingen in het halfvlak $\operatorname{Re} w \leq \max \operatorname{Re}(-\lambda_1, -\lambda_2)$ worden voortgezet. Vanwege (5) heeft $a(w)$ dus enkelvoudige polen in de punten $w = -\lambda_1 - n$, $w = -\lambda_2 - n$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

2) Oplossingen $a(w)$ worden uitgedrukt in fakulteitreeksen, waaruit het asymptotisch gedrag van $a(w)$ te halen is.

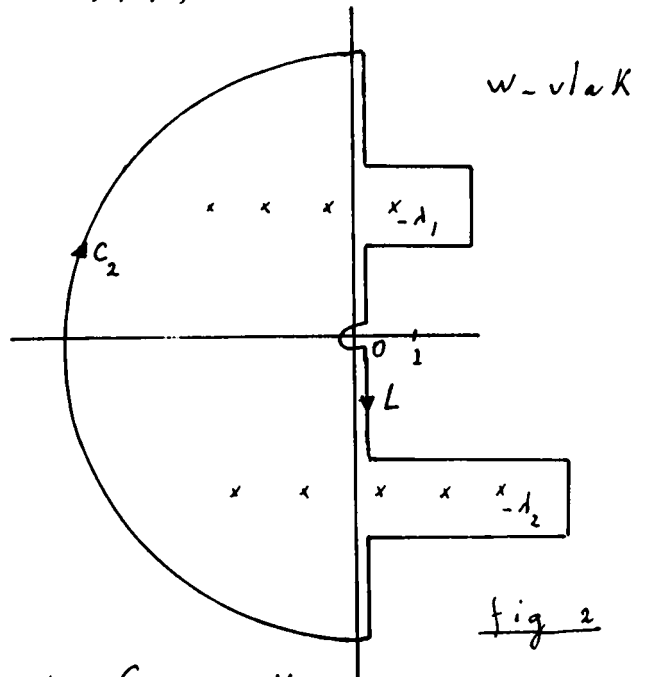
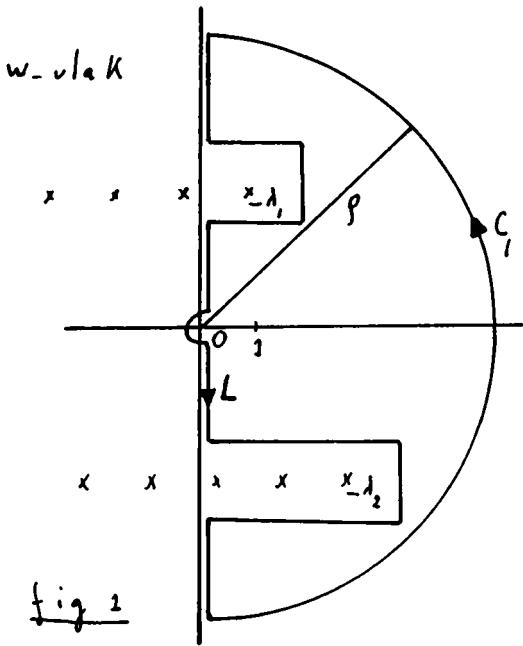
$$a_s(w) = (l_s)^{-w} w^{-\beta_s-2} (1 + \eta_s(w)) \quad \lim_{|w| \rightarrow \infty} \eta_s(w) = 0 \quad s = 2, 3, \dots, m-1$$

Omdat de differentievergelijking lineair is kan men een lineaire combinatie van de $(m-2)$ oplossingen maken $a(w) = \sum_{s=2}^{m-1} c_s a_s(w)$ zodanig dat $a(0) = 1$ en $a(-1) = a(-2) = \dots = a(-m+3) = 0$.

Uit (3) volgt $P_{m-2}(-m+2) = 0$ en $a(-n) = 0$ voor $n = 1, 2, 3, \dots$

De functie $\frac{\pi a(w)(-2)^w}{\sin \pi w}$ heeft dus alleen van nul verschillende residuen in

de punten $w = -\lambda_1 - n, w = -\lambda_2 - n, w = n \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$



We trachten een afschatting te maken van $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\pi a(w)(-z)^w}{s \sin \pi w} dw$

(fig.1) voor $\rho \rightarrow \infty$.

De integrand is $\sum_{s=2}^{m-1} \frac{c_s a_s(w)(-z)^w}{s \sin \pi w} = \sum_{s=2}^{m-1} \frac{c_s w^{-\beta_s-2} \left(-\frac{z}{b_s}\right)^w}{s \sin \pi w} (1 + \eta_s(w))$.

Als $w = \rho e^{i\psi}$ en $b_s = R_s e^{i\phi_s}$, dan is de absolute waarde van de integrand kleiner dan :

$$\sum_{s=2}^{m-1} K \left| e^{i\psi(-\beta_s-2)} \right| \left| \rho^{-\beta_s-2} \right| e^{\rho \log \frac{r}{R_s} \cos \psi - \rho(\phi - \pi - \phi_s) \sin \psi - \pi \rho / \sin \rho} \quad (6)$$

De integrand gaat naar nul voor $\rho \rightarrow \infty$ en $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ als $\log \frac{r}{R_s} < 0$ en $\max(\phi_s) < \phi < \min(\phi_s) + 2\pi$.

Onder deze omstandigheden is dus $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\pi a(w)(-z)^w}{s \sin \pi w} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \text{Res} \frac{\pi a(w)(-z)^w}{s \sin \pi w} \right\}_{w=n} = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) z^n = f(z)$.

Op dezelfde wijze is een afschatting te maken over C_2 (fig.2). We krijgen dan weer (6). Omdat nu $\cos \psi < 0$ moeten we eisen $\log \frac{r}{R_s} > 0$ en

$$\max(\phi_s) < \phi < \min(\phi_s) + 2\pi.$$

Dus is $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\pi a(w)(-z)^w}{s \sin \pi w} dw = - \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res} \left\{ \frac{\pi a(w)(-z)^w}{s \sin \pi w} \right\}_{w=-\lambda_1-n} - \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res} \left\{ \frac{\pi a(w)(-z)^w}{s \sin \pi w} \right\}_{w=-\lambda_2-n}$

Zoals al is opgemerkt kan de oplossing van een normale homogene lineaire differentievergelijking gegeven worden in de vorm van fakulteitreeksen. Alleen de oplossingen van een eerste orde recurrentiebetrekking van bovenstaande soort kan in elementaire functies uitgedrukt worden.

Stelling 2

Iedere d.v. van Fuchs (m reguliere-singuliere punten) met een tweeterm-recurrentiebetrekking is door overgang op een andere onafhankelijke variabele te herleiden tot een hypergeometrische d.v. (dus met een eerste orde differentievergelijking).

Bewijs

De d.v. van Fuchs met m reguliere-singuliere punten wordt gegeven door (2). We noemen de coëfficiënten van de machten van z anders n.l.

$$z^2(z^{m-1} + a_{m-1}z^{m-2} + \dots + a_0)y'' + z(d_{m-1}z^{m-2} + \dots + d_0)y' + (c_{m-1}z^{m-2} + \dots + c_1z)y = 0 \quad (7)$$

Van de recurrentiebetrekking (3) is bekend dat $P_0(w) = (w+1)(w+\lambda_1) \neq 0$ voor iedere w, en $P_{m-2}(w) = -\{(w+m-2)(w+m-3)a_0 + (w+m-2)d_0\} = 0$ als $a_0 = d_0 = 0$.

Uit $a_0 = 0$ volgt dat $b_2 b_3 \dots b_{m-1} = 0$. Als een der b's nul is dan heeft de d.v. (m-1) reguliere-singuliere punten. Als er meerdere b's gelijk aan nul zijn is de d.v. niet meer van Fuchs.

De enige mogelijkheid voor een twee-term recurrentiebetrekking is dus als

$P_i(w) = 0, i = 1, 2, \dots, m-3$. Deze eis betekent $a_i = 0, d_i = 0, c_i = 0$ voor $i = 1, 2, \dots, m-3$.

Aan de voorwaarde $c_i = 0, i = 1, 2, \dots, m-3$ is voldaan als: $e_1 = e_2 = \dots = e_{m-3} = 0$.

Aan de voorwaarde $a_i = 0, i = 1, 2, \dots, m-3$ is voldaan als:

$$(z - b_2)(z - b_3) \dots (z - b_{m-1}) \equiv z^{m-2} - a \quad (8)$$

Als b_2, b_3, \dots, b_{m-1} op een cirkel liggen met straal $a^{\frac{1}{m-2}}$ en de argumenten een veelvoud van $\frac{2\pi}{m-2}$ verschillen (fig.3) is (8) waar.

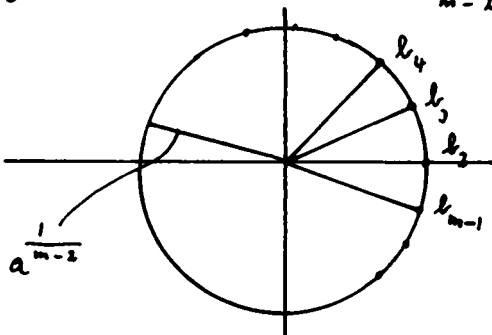


fig. 3.

Aan de voorwaarde $d_i = 0$ voor $i = 1, 2, \dots, m-3$ is voldaan als :

$$\beta_1 (z - \ell_2)(z - \ell_3) \dots (z - \ell_{m-1}) + \beta_2 z (z - \ell_3) \dots (z - \ell_{m-1}) + \dots + \beta_{m-1} z (z - \ell_2) \dots (z - \ell_{m-1}) \equiv K_1 z^{m-2} + K_2 \quad (9)$$

(9) is waar voor iedere z als (9) waar is voor $(m-1)$ verschillende waarden van z .

$$\left. \begin{aligned} z = 0 \text{ in (9)} &\rightarrow \beta_1 = -\frac{K_2}{a} \\ z = \ell_2 \text{ in (9)} &\rightarrow \beta_2 \left\{ \ell_2 (\ell_2 - \ell_3) (\ell_2 - \ell_4) \dots (\ell_2 - \ell_{m-1}) \right\} = K_1 a + K_2 \\ &\vdots \\ z = \ell_{m-1} \text{ in (9)} &\rightarrow \beta_{m-1} \left\{ \ell_{m-1} (\ell_{m-1} - \ell_2) (\ell_{m-1} - \ell_3) \dots (\ell_{m-1} - \ell_{m-2}) \right\} = K_1 a + K_2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Het stelsel (10) kan geschreven worden als :

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 \left\{ \left(1 - \frac{\ell_3}{\ell_2}\right) \dots \left(1 - \frac{\ell_{m-1}}{\ell_2}\right) \right\} &= K_1 + K_2 \frac{1}{a} \\ &\vdots \\ \beta_{m-1} \left\{ \left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_{m-1}}\right) \dots \left(1 - \frac{\ell_{m-2}}{\ell_{m-1}}\right) \right\} &= K_1 + K_2 \frac{1}{a} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

In (11) zijn de getallen tussen accoladen gelijk, dus $\beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_{m-1}$.
De gezochte d.v. is dus:

$$y'' + y' \left\{ \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z - \ell_2} + \frac{\beta_2}{z - \ell_3} + \dots + \frac{\beta_2}{z - \ell_{m-1}} \right\} + y \frac{\lambda_1 \lambda_2 z^{m-4}}{z^{m-2} - a} = 0 \quad (12)$$

Door de substitutie $t = z^{m-2}$ gaat (7) met $a_i = 0, d_i = 0, c_i = 0$ voor $i = 1, 2, \dots, m-3$ over in een hypergeometrische d.v.:

$$(m-2)^2 t^2 (t + a_0) y_{tt} + t \left\{ [(m-2)(m-3) + (m-2)d_{m-2}] t + [(m-3)(m-3)a_0 + (m-3)d_0] \right\} y' + c_{m-2} t y = 0$$

Het probleem, dat in dit hoofdstuk bekeken wordt is nu die ϵ 's te bepalen, waarvoor een d.v. van Fuchs bestaat, die een twee-term recurrentiebetrekking

heeft en die terug te voeren is tot (1.21).

B. De d.v. van Heun

We bepalen die ϵ 's, waarvoor (1.25) een d.v. van Heun met een twee-term recurrentiebetrekking wordt.

Gezien stelling 2 heeft de d.v. van Heun

$$y'' + y' \left\{ \frac{\gamma}{\eta} + \frac{\delta}{\eta-a} + \frac{\epsilon}{\eta-b} \right\} + y \frac{\alpha\beta\eta + \gamma}{\eta(\eta-a)(\eta-b)} = 0 \quad 1 + \alpha + \beta - \delta - \epsilon = 0 \quad (13)$$

een twee-term recurrentiebetrekking als $b = -a$, $\epsilon = \delta$ en $\gamma = 0$

$$y'' + y' \left\{ \frac{\gamma}{\eta} + \frac{\delta}{\eta-a} + \frac{\delta}{\eta+a} \right\} + y \frac{\alpha\beta}{(\eta-a)(\eta+a)} = 0 \quad (14)$$

Door de substitutie $y = \eta^{-\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}} (\eta+a)^{-\frac{\delta}{2}} (\eta-a)^{-\frac{\delta}{2}} u$ gaat (14) over in:

$$u'' + \frac{1}{\eta} u' + u \left\{ \frac{-\frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4}}{\eta^2} + \frac{-\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta}{2}}{(\eta-a)^2} + \frac{-\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta}{2}}{(\eta+a)^2} + \frac{\alpha\beta - \frac{\delta^2}{2} - \delta\gamma}{(\eta-a)(\eta+a)} \right\} = 0 \quad (15)$$

Uit (15) en (1.25) volgt dat ϵ moet voldoen aan de niet-lineaire d.v.:

$$\frac{\epsilon''}{2\epsilon} + \frac{\epsilon'}{2\eta\epsilon} - \frac{3}{4} \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon} \right)^2 + \frac{l^2 k_0^2 \epsilon}{\eta^2} - \frac{l^2 k_0^2 \sin^2 \theta_0}{\eta^2} = \frac{-\frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4}}{\eta^2} + \frac{-\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta}{2}}{(\eta-a)^2} + \frac{-\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta}{2}}{(\eta+a)^2} + \frac{\alpha\beta - \frac{\delta^2}{2} - \delta\gamma}{(\eta+a)(\eta-a)} \quad (16)$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ willekeurig, $1 + \alpha + \beta - \gamma - 2\delta = 0$).

Stelling 3

Van vergelijking (16) zijn slechts de oplossingen

$$\epsilon = \frac{\eta^2}{(\eta+a)(\eta-a)}, \frac{\eta^2}{(\eta+a)^2(\eta-a)^2}, \frac{1}{(\eta+a)(\eta-a)}, \frac{1}{(\eta+a)^2(\eta-a)^2}, \frac{\eta^4}{(\eta-a)^2(\eta+a)^2} \quad (17)$$

fysisch zinvol.

Fysisch zinvol zijn profielen die onafhankelijk zijn van k_0 en $\sin \theta_0$.

Bewijs

Een ϵ die aan (16) voldoet, voldoet ook aan (18):

$$\frac{\epsilon''(-\eta)}{2\epsilon(-\eta)} + \frac{\epsilon'(-\eta)}{2\eta\epsilon(-\eta)} - \frac{3}{4}\left(\frac{\epsilon'(-\eta)}{\epsilon(-\eta)}\right)^2 + \frac{l^2 k_0^2 \epsilon(-\eta)}{\eta^2} - \frac{l^2 k_0^2 \sin^2 \theta_0}{\eta^2} \equiv \text{Rechter lid (16)} \quad (18)$$

De linkerleden van (16) en (18) moeten aan elkaar gelijk zijn voor iedere η en k_0 . Daar de eerste 3 termen in (18) geen functie van k_0 zijn, geldt voor een fysisch zinvolle ϵ $\epsilon(\eta) = \epsilon(-\eta)$ en ϵ voldoet aan (19)

$$\frac{\epsilon}{\eta^2} = \frac{c_1}{\eta^2} + \frac{c_2}{(\eta-a)^2} + \frac{c_2}{(\eta+a)^2} + \frac{c_3}{(\eta+a)(\eta-a)} \quad (19)$$

$$\text{Uit (19)} \rightarrow \epsilon(\eta) = \frac{c_1(\eta-a)^2(\eta+a)^2 + c_2\eta^2\{(\eta+a)^2 + (\eta-a)^2\} + c_3\eta^2(\eta^2-a^2)}{(\eta-a)^2(\eta+a)^2} \quad (20)$$

De nulpunten van ϵ manifesteren zich als singuliere punten in de eerste 3 termen van (16). Het profiel ϵ mag dus alleen nulpunten hebben in de punten $\eta = 0, -a, a$.

Stel de teller (T) van (20) is van de vierde graad. Vanwege $\epsilon(\eta) = \epsilon(-\eta)$ moet T even zijn in η , dus $T = \eta^2(\eta+a)(\eta-a)$ of $T = \eta^4 \rightarrow c = \frac{\eta^2}{(\eta-a)(\eta+a)}$

$$\text{resp. } \epsilon = \frac{\eta^4}{(\eta-a)^2(\eta+a)^2}$$

Stel T is van de tweede graad dan $T = \eta^2$ of $T = (\eta+a)(\eta-a) \rightarrow c = \frac{\eta^2}{(\eta+a)^2(\eta-a)^2}$

$$\text{resp. } \epsilon = \frac{1}{(\eta+a)(\eta-a)}$$

Als T van de nulde graad is dan $T = 1 \rightarrow c = \frac{1}{(\eta-a)^2(\eta+a)^2}$

De profielen (17) geschreven als functie van z : $\frac{e^{-2\frac{z}{l}}}{e^{-2\frac{z}{l}} - a^2}, \frac{e^{-2\frac{z}{l}}}{(e^{-2\frac{z}{l}} - a^2)^2}$

$$\frac{1}{e^{-2\frac{z}{l}} - a^2}, \frac{1}{(e^{-2\frac{z}{l}} - a^2)^2}, \frac{e^{-4\frac{z}{l}}}{(e^{-2\frac{z}{l}} - a^2)^2} \quad (21)$$

Opmerking 1

Zouden we uitgegaan zijn van $\eta = -e^{-c \frac{z}{l}}$, dan was (16) verkregen met l

vervangen door $\frac{l}{c}$. Dus ook voldoen: $\frac{e^{-2c \frac{z}{l}}}{e^{-2c \frac{z}{l}} - a^2}$, $\frac{e^{-2c \frac{z}{l}}}{(e^{-2c \frac{z}{l}} - a^2)^2}$, $\frac{1}{e^{-2c \frac{z}{l}} - a^2}$,
 $\frac{1}{(e^{-2c \frac{z}{l}} - a^2)^2}$, $\frac{e^{-4c \frac{z}{l}}}{(e^{-2c \frac{z}{l}} - a^2)^2}$ (21a)

Homografische transformaties van de d.v. van Heun

We bepalen die ϵ 's, waarvoor (1.25) via een transformatie $\eta = \frac{Ax - B}{Cx - D}$ tot een d.v. van Heun met een twee-term recurrentiebetrekking terug te brengen is.

Door de transformatie $\eta = \frac{Ax - B}{Cx - D}$ ($x = \frac{D\eta - B}{C\eta - A}$) gaat (1.25) over in:

$$u_{xx} + u_x \left\{ \frac{2}{Cx - D} + \frac{K}{(Cx - D)(Ax - B)} \right\} + u \left\{ \frac{\epsilon_{xx}}{2c} + \frac{\epsilon_x}{\epsilon} \frac{1}{Cx - D} + \frac{\epsilon_x}{\epsilon} \frac{K/2}{(Ax - B)(Cx - D)} - \frac{3}{4k^2} \left(\frac{\epsilon_x}{\epsilon} \right)^2 + \frac{e^2 b_0^2 K^2 c}{(Ax - B)^2 (Cx - D)^2} - \frac{e^2 b_0^2 K^2 \sin^2 \theta_0}{(Ax - B)^2 (Cx - D)^2} \right\} = 0, \quad K = BC - AD \neq 0 \quad (22)$$

(22) moet teruggebracht worden tot

$$y_{xx} + y_x \left\{ \frac{\delta}{x} + \frac{\delta}{x-a} + \frac{\delta}{x+a} \right\} + y \frac{\alpha\beta}{(x-a)(x+a)} = 0 \quad (23)$$

Stelling 4

Uitgaande van (22) zullen we als enig nieuw fysisch zinvol profiel vinden

$$\epsilon = \left(\frac{\eta + A}{\eta - A} \right)^2 \quad (A \text{ willekeurig})$$

Bewijs

Gezien de laatste term in het linkerlid van (22) liggen er twee singuliere punten in (22) vast (ϵ is fysisch zinvol) n.l. $x = \frac{B}{A}$ en $x = \frac{D}{C}$, die dus ook singuliere punten van (23) moeten zijn.

Omdat (23) over te voeren is tot (15) met x als onafhankelijke variabele, en (15) onafhankelijk is voor transformaties $\eta \rightarrow -\eta$ moet $\frac{B}{A} = -a$ (of a) en $\frac{D}{C} = a$ (of $-a$). We kiezen als transformatie

$$\eta = A \frac{x-a}{x+a} \rightarrow x = a \frac{\eta+A}{\eta-A} \quad (24)$$

(22) wordt met (24) en $y = (x+a)^{\frac{1}{2}} (x-a)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} u$:

$$u_{xx} + u_x \frac{1}{x} + u \left\{ \frac{\epsilon_{xx}}{2\epsilon} + \frac{x \epsilon_x}{\epsilon(x-a)(x+a)} - \frac{3}{4} \left(\frac{\epsilon_x}{\epsilon} \right)^2 + \frac{-4a^2 l^2 k_o^2 \epsilon}{(x+a)^2 (x-a)^2} - \frac{4a^2 l^2 k_o^2 \sin^2 \theta_o}{(x+a)^2 (x-a)^2} \right. \\ \left. + \frac{-3/2}{(x+a)^2} + \frac{-3/2}{(x-a)^2} + \frac{-1/4}{x^2} + \frac{-1/2}{(x+a)(x-a)} \right\} = 0 \quad (25)$$

We hebben dus op te lossen

$$\frac{\epsilon_{xx}}{2\epsilon} + \frac{x \epsilon_x}{\epsilon(x-a)(x+a)} - \frac{3}{4} \left(\frac{\epsilon_x}{\epsilon} \right)^2 - \frac{4a^2 l^2 k_o^2 \epsilon}{(x+a)^2 (x-a)^2} - \frac{4a^2 l^2 k_o^2 \sin^2 \theta_o}{(x+a)^2 (x-a)^2} - \frac{3/2}{(x+a)^2} - \frac{3/2}{(x-a)^2} \\ - \frac{1/4}{x^2} - \frac{1/2}{(x+a)(x-a)} = \frac{-\delta^2 + \delta^2 - 1/4}{x^2} + \frac{-\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta}{2}}{(x-a)^2} + \frac{-\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta}{2}}{(x+a)^2} + \frac{\alpha\beta - \frac{\delta^2}{2} - \delta\gamma}{(x+a)(x-a)} \quad (26)$$

Zoals bij stelling 3 is $\epsilon(x) = \epsilon(-x)$, en ϵ voldoet aan (27):

$$\epsilon(x) = \frac{A(x+a)^2(x-a)^2 + Bx^2\{(x+a)^2 + (x-a)^2\} + Cx^2(x^2 - a^2)}{x^2} \quad (27)$$

Evenals bij stelling 3 mag de teller (T) van (27) alleen nulpunten hebben in de punten $0, a, -a$.

Stel T van de 4e graad $\rightarrow \epsilon = \frac{(x+a)^2(x-a)^2}{x^2}$, $\epsilon = (x+a)(x-a)$, $\epsilon = x^2$

Stel T van de 2e graad $\rightarrow \epsilon = 1$, $\epsilon = \frac{(x+a)(x-a)}{x^2}$

Stel T van de 0e graad $\rightarrow \epsilon = \frac{1}{x^2}$

Gezien (17) en opmerking 1 is alleen $\epsilon = x^2$ iets nieuws.

C. De d.v. met m reguliere-singuliere punten $m > 4$:

We bepalen die ϵ 's, waarvoor (1.25) een d.v. met m reguliere-singuliere punten wordt.

Uit stelling 2 volgt dat zo'n d.v. met een twee-term recurrentiebetrekking ge-

geven wordt door :

$$y''_1 + y'_1 \left\{ \frac{\beta_1}{\eta} + \frac{\beta_2}{\eta - \ell_2} + \frac{\beta_3}{\eta - \ell_3} + \dots + \frac{\beta_m}{\eta - \ell_{m-1}} \right\} + y \frac{\lambda_1 \lambda_2 \eta^{m-4}}{\eta^{m-2} - a} = 0 \quad (28)$$

Waarbij voor het verband tussen $a, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_{m-1}$, naar fig.3 wordt verwezen.

Door de substitutie $y = \eta^{-\frac{\beta_1}{2} + \frac{1}{2}} (\eta - \ell_2)^{-\frac{\beta_2}{2}} (\eta - \ell_3)^{-\frac{\beta_3}{2}} \dots (\eta - \ell_{m-1})^{-\frac{\beta_m}{2}} u$ gaat (28) over in:

$$u''_1 + u'_1 \left\{ \frac{-\frac{\beta_1^2}{4} + \frac{\beta_1}{2} - \frac{1}{4}}{\eta^2} + \frac{-\frac{\beta_2^2}{4} + \frac{\beta_2}{2}}{(\eta - \ell_2)^2} + \frac{-\frac{\beta_3^2}{4} + \frac{\beta_3}{2}}{(\eta - \ell_3)^2} + \dots + \frac{-\frac{\beta_m^2}{4} + \frac{\beta_m}{2}}{(\eta - \ell_{m-1})^2} + \frac{\eta^{m-4} \left(\lambda_1 \lambda_2 - \frac{\beta_1 \beta_2}{2} (m-2) - \frac{\beta_2^2}{4} (m-2) \right)}{\eta^{m-2} - a} \right\} = 0 \quad (29)$$

Stelling 5

Uitgaande van (28) zullen we geen nieuwe fysisch zinvolle profielen vinden.

Bewijs

1) Een d.v. van Fuchs met m reguliere-singuliere punten met een twee-term recurrentiebetrekking.

$$\eta^2 (\eta^{m-2} - a) y''_1 + \eta (K_1 \eta^{m-2} + K_2) y'_1 + \lambda_1 \lambda_2 \eta^{m-2} y = 0 \quad (\text{zie stelling 2})$$

gaat met $\eta = t^{\frac{2}{m-2}}$ over in:

$$\left(\frac{m-2}{2}\right)^2 t^2 (t^2 - a) y''_{tt} + t \left\{ \frac{m-2}{2} \left(\frac{m-4}{2} + K_1\right) t^2 - a \left(\frac{m-4}{2}\right) \left(\frac{m-2}{2}\right) + K_2 \frac{m-2}{2} \right\} y'_t + \lambda_1 \lambda_2 t^2 y = 0$$

Deze laatste vergelijking is die van Heun met een twee-term recurrentiebetrekking.

2) Stel dat er een $\epsilon(\eta)$ is waarvoor (1.25) een d.v. van Fuchs is met m reguliere-singuliere punten en met een twee-term recurrentiebetrekking (vergelijking 30).

$$u_{\eta\eta} + u_{\eta} \frac{1}{\eta} + u \left\{ \frac{\epsilon_{\eta\eta}}{2\epsilon} + \frac{\epsilon_{\eta}}{2\eta\epsilon} - \frac{3}{4} \left(\frac{\epsilon_{\eta}}{\epsilon} \right)^2 + \frac{\rho^2 k_0^2 (\epsilon - \sin^2 \theta_0)}{\eta^2} \right\} = 0 \quad (30)$$

Door de substitutie $\eta = t^{\frac{2}{m-2}}$ gaat (30) over in:

$$u_{tt} + \frac{1}{t} u_t + u \left\{ \frac{\epsilon_{tt}}{2\epsilon} + \frac{\epsilon_t}{2t\epsilon} - \frac{3}{4} \left(\frac{\epsilon_t}{\epsilon} \right)^2 + \frac{\left(\frac{m-2}{2}\right)^{-2} \rho^2 k_0^2 (\epsilon - \sin^2 \theta_0)}{\eta^2} \right\} = 0 \quad (31)$$

Vergelijking (31) is volgens 1) een d.v. van Heun met een twee-term recurrentiebetrekking en $\epsilon(t)$ is dus een van de onder B. gevonden profielen. Gezien opmerking 1 is $\epsilon\left(\eta^{\frac{m-2}{2}}\right)$ niets nieuws.

D. Conclusie

Bij het zoeken naar profielen $\epsilon(z)$, die aan (1.21) voldoen is steeds uitgegaan van verg. (1.25) of homografische transformaties daarvan.

Stelling 6

De enige één-éénduidige transformatie $\eta = \eta(z)$, die (1.21) overvoert in een d.v., die door een fysisch zinvolle ϵ over kan gaan in een d.v. van Fuchs, is de transformatie $\eta = e^{cz}$ of homografische transformaties daarvan.

Bewijs

Een transformatie $\eta = \eta(z)$, die iedere $z \in \mathbb{R}$ één-éénduidig op een $\eta \in \mathbb{R}$ afbeeldt, heeft een inverse en er geldt $\frac{dz}{d\eta} = \frac{1}{\frac{d\eta}{dz}}$. Stel het bereik van $\eta: A < \eta < B$.

Door de transformatie $\eta = \eta(z)$ is (1.21) te schrijven als:

$$\eta_{\eta\eta} + \eta_{\eta} \frac{z_{\eta\eta}}{z_{\eta}} + \eta \left\{ \frac{\epsilon_{\eta\eta}}{2\epsilon} + \frac{\epsilon_{\eta}}{2z_{\eta}} \frac{z_{\eta\eta}}{z_{\eta}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\epsilon_{\eta}}{\epsilon} \right)^2 + k_0^2 \epsilon(z_{\eta})^2 - k_0^2 \sin^2 \theta_0 \left(\frac{z_{\eta}}{\eta} \right)^2 \right\} = 0$$

Van deze d.v. moeten we nu eisen dat hij van Fuchs is voor een $\epsilon \neq \epsilon(\sin \theta_0)$.

Deze eisen zijn:

$$a) \frac{z_{\eta\eta}}{z_{\eta}} = \frac{B_1}{C_1 \eta - A_1} + \frac{B_2}{C_2 \eta - A_2} + \dots + \frac{B_m}{C_m \eta - A_m}$$

$$\text{integreren} \longrightarrow z_{\eta} = C \left(C_1 \eta - A_1 \right)^{\frac{B_1}{C_1}} \left(C_2 \eta - A_2 \right)^{\frac{B_2}{C_2}} \dots \left(C_m \eta - A_m \right)^{\frac{B_m}{C_m}}$$

b) Omdat $\varepsilon \neq \varepsilon(\sin \theta_0)$ heeft $(z_\eta)^2$ polen van ten hoogste de 2e orde. Uit $(z_\eta)^2 \gg 0$ voor iedere η , volgt bovendien dat $(z_\eta)^2$ alleen maar polen heeft van de 2e orde (en dus geen pool van de eerste orde).

Op grond van het bovenstaande zijn de volgende conclusies te trekken.

1) Daar de gebruikte transformatie één-éénduidig is, is z_η of monotoon niet-stijgend of monotoon niet-dalend.

Uit b) volgt dat z_η alleen polen heeft van de eerste orde. Zou er een pool in het gebied $A < \eta < B$ liggen dan wisselt z_η van teken. In het gebied $A < \eta < B$ liggen geen polen.

2) Als A en B beiden eindig zijn, heeft z_η polen in de punten A en B.

Immers als z_η geen pool zou hebben in bijv. het punt B, dan is $z(\eta)$ m.b.v. z_η rechts van het punt B voort te zetten.

3) Daar z_η monotoon niet-stijgend of monotoon niet-dalend is heeft z_η geen nulpunten.

Uit a) volgt nu :

$$z_\eta = \frac{D}{(c_1 \eta - A)(c_2 \eta - B)} \longrightarrow e^{\frac{c_1 c_2}{D} z} = \frac{c_1 \eta - A}{c_2 \eta - B}$$

Uit de stellingen 2, 3, 4, 5, 6 kunnen we nu concluderen dat de gevonden profielen de enige zijn die (1.21) over doen gaan in een d.v., die terug te voeren is tot een hypergeometrische.

3. DE REFLECTIE EN TRANSMISSIE VAN EEN E.M.GOLF AAN EEN OVERGANGS EPSTEIN-PROFIEL

A. Het elektrisch veld loodrecht op het vlak van inval

Het overgangsprofiel $\epsilon = 1 - \frac{\omega p_0^2}{\omega^2} \frac{1}{1-\eta}$ (1.22) schrijven we in een handzamer vorm:

$$\epsilon = \frac{\eta - a}{\eta - 1} \quad (1)$$

Vergelijking (1.24) met (1) geeft de d.v.:

$$\hat{E}_x'' + \frac{1}{\eta} \hat{E}_x' + \hat{E}_x \left\{ \frac{l^2 k_0^2 (\eta - a)}{\eta^2 (\eta - 1)} - \frac{l^2 k_0^2 \sin^2 \theta_0}{l^2} \right\} = 0 \quad (2)$$

Veronderstellen we $a < \sin^2 \theta_0$, dan krijgen we door de substitutie

$\hat{E}_x = (-\eta)^{k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}}$ een hypergeometrische d.v. voor u in standaardvorm:

$$u'' + u' \left\{ \frac{1 + 2 k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}}{\eta} \right\} + u \frac{k_0^2 l^2 (1 - a)}{\eta (\eta - 1)} = 0 \quad (3)$$

De oplossing rond $\eta = 0$ met exponent 0 is op eenvoudige wijze uit te drukken in de oplossingen rond $\eta = \infty$:

$$F\left(i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}, -i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}; 1 + 2 k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}; \eta\right) =$$

$$\frac{\Gamma(-2i k_0 l \cos \theta_0) \Gamma(1 + 2 k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a})}{\Gamma(-i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}) \Gamma(-i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a} + 1)} (-\eta)^{-i k_0 l \cos \theta_0 - k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}} F(\alpha', \beta'; \gamma'; \eta^{-1}) +$$

$$\frac{\Gamma(2i k_0 l \cos \theta_0) \Gamma(1 + 2 k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a})}{\Gamma(i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}) \Gamma(i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a} + 1)} (-\eta)^{i k_0 l \cos \theta_0 - k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}} F(\alpha'', \beta''; \gamma''; \eta^{-1})$$

Tussen $\hat{E}_{x_{trans.}} = (-\gamma) k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}$ ($\gamma \rightarrow 0$), $\hat{E}_{x_{inval}} = (-\gamma)^{-i k_0 l \cos \theta_0}$ ($\gamma \rightarrow -\infty$), en $\hat{E}_{x_{refl.}} = (-\gamma)^{i k_0 l \cos \theta_0}$ ($\gamma \rightarrow -\infty$) bestaat het verband $T \hat{E}_{x_{trans.}} = \hat{E}_{x_{inval}} + R \hat{E}_{x_{refl.}}$ of $T (-\gamma) k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}$ ($\gamma \rightarrow 0$) = $(-\gamma)^{-i k_0 l \cos \theta_0}$ ($\gamma \rightarrow -\infty$) + $R (-\gamma)^{i k_0 l \cos \theta_0}$ ($\gamma \rightarrow -\infty$).

Dus
$$T = \frac{\Gamma(-i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}) \Gamma(-i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a} + 1)}{\Gamma(-2 i k_0 l \cos \theta_0) \Gamma(1 + 2 k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a})}$$

en
$$R = \frac{\Gamma(2 i k_0 l \cos \theta_0) \Gamma(-i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}) \Gamma(-i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a} + 1)}{\Gamma(i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}) \Gamma(i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a} + 1) \Gamma(-2 i k_0 l \cos \theta_0)}$$

Opmerking 1

Voor $z > a$, $\epsilon(z) = \sin^2 \theta_0$ hebben we te maken met een ruimtelijk gedempte

golf: $\hat{E}_x = e^{-k_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a} z}$. De uitdrukking $(k_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a})^{-1}$ is te beschouwen als een soort indringdiepte.

B. Het elektrisch veld in het vlak van inval

Vergelijking (1.20) met (1) geeft de d.v.:

$$\hat{B}_x'' + \hat{B}_x' \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{\gamma-a} \right) + \hat{B}_x \left\{ \frac{\ell^2 k_0^2 (1-a)}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{\ell^2 k_0^2 (a - \sin^2 \theta_0)}{\gamma^2} \right\} = 0 \quad (4)$$

Veronderstellen we $a < \sin^2 \theta_0$, dan krijgen we door de substitutie

$\hat{B}_x = (-\gamma)^{k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}} u$ een d.v. van Heun voor u in standaardvorm.

$$u'' + u' \left\{ \frac{1 + 2 k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}}{\gamma} + \frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{\gamma-a} \right\} + u \frac{\ell^2 k_0^2 (1-a)\gamma + (1-a) k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a} - (1-a) a \ell^2 k_0^2}{\gamma(\gamma-1)(\gamma-a)} = 0$$

De d.v. (zie Appendix)

$$u'' + u \left\{ \frac{1+2k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}}{\gamma} + \frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{\gamma-a} \right\} + u \frac{k_0^2 l^2 (1-a) \gamma + (1-a) k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a} - (1-a) a l^2 k_0^2 \pm k_0 l (1-a) \sin \theta_0}{\gamma(\gamma-1)(\gamma-a)} = 0 \quad (6)$$

heeft als oplossing rond $\eta = 0$ met exponent 0:

$$u = F \left(i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}, -i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}; 1+2k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}; \eta \right) + \left(\frac{-\sqrt{\sin^2 \theta_0 - a} \mp \sin \theta_0}{a k_0 l} \right) \eta \frac{d}{d\eta} F \left(i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}, -i k_0 l \cos \theta_0 + k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}; 1+2k_0 l \sqrt{\sin^2 \theta_0 - a}; \eta \right) \quad (7)$$

Stelling 7

Heeft een d.v. van Heun een oplossing $y = F(\alpha, \beta; \gamma; \eta) + c \eta \frac{d}{d\eta} F(\alpha, \beta; \gamma; \eta)$ dan is oplossing (9) de asymptotische voortzetting ervan.

Bewijs

$$y = F(\alpha, \beta; \gamma; \eta) + c \eta \frac{d}{d\eta} F(\alpha, \beta; \gamma; \eta) = F(\alpha, \beta; \gamma; \eta) + c \frac{\alpha \beta}{\gamma} \eta F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(n+1)} (1+c n) \eta^n.$$

Stelling 1 toepassen:

Kennelijk is $a(w) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(w+\alpha)\Gamma(w+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(w+\gamma)\Gamma(w+1)} (1+cw)$

en $a(0) = 1$, $a(-n) = 0$ $n = 1, 2, 3 \dots$ en $a(w)$ heeft enkelvoudige polen in de punten $w = -\beta - n$, $w = -\alpha - n$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$y = - \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res} \left\{ \frac{\pi(-z)^w \Gamma(\gamma)\Gamma(w+\alpha)\Gamma(w+\beta)}{\sin \pi w \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(w+\gamma)\Gamma(w+1)} (1+cw) \right\}_{w=-\alpha-n} - \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res} \{ \dots \}_{w=-\beta-n} \quad (8)$$

Gebruik makend van enige eigenschappen van Γ -functies: $\text{Res} \{ \Gamma(z) \}_{z=-n} = \frac{(-1)^n}{n!}$,

$$\Gamma(\ell-n) = \frac{(-1)^n \Gamma(\ell)\Gamma(1-\ell)}{\Gamma(1-\ell+n)}, \quad \frac{\pi}{\sin \pi \ell} = \Gamma(\ell)\Gamma(1-\ell) \quad \text{wordt (8):}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho-\alpha)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\gamma-\alpha)} (-\gamma)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{-n} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(1+\alpha-\gamma+n)\Gamma(1-\rho+\alpha)}{n! \Gamma(\alpha-\rho+n+1)\Gamma(1-\gamma+\alpha)} \left\{ 1 + c(-\alpha-n) \right\} + \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\rho)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\rho)} (-\gamma)^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{-n} \frac{\Gamma(\rho+n)\Gamma(1+\rho-\gamma+n)\Gamma(1-\alpha+\beta)}{n! \Gamma(\rho-\alpha+n+1)\Gamma(1-\gamma+\rho)} \left\{ 1 + c(-\rho-n) \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

Voor $\sin \theta_0 = 0$ (loodrechte inval) zijn de d.v.'s (5) en (6) hetzelfde. De reflectie- en transmissiecoëfficiënt laten zich m.b.v. (9) op dezelfde manier berekenen als onder A.

$$\begin{aligned} T &= \frac{\Gamma(-ik_0 l + k_0 l \sqrt{-a'}) \Gamma(-ik_0 l + k_0 l \sqrt{-a'} + 1)}{\Gamma(1 + 2k_0 l \sqrt{-a'}) \Gamma(-2ik_0 l) (1 - c\alpha)} \\ R &= - \frac{\Gamma(2ik_0 l) \Gamma(-ik_0 l + k_0 l \sqrt{-a'}) \Gamma(-ik_0 l + k_0 l \sqrt{-a'} + 1)}{\Gamma(ik_0 l + k_0 l \sqrt{-a'}) \Gamma(ik_0 l + k_0 l \sqrt{-a'} + 1) \Gamma(-2ik_0 l)} \end{aligned}$$

Opmerking 2

Daar de verhouding tussen $|\hat{E}|$ en $|\hat{B}|$ afhangt van ϵ verschillen de reflectie- en transmissiecoëfficiënten van \hat{E} (zie A) van die van \hat{B} .

Appendix

We bepalen q en c zodanig dat de oplossing van de d.v. van Heun

$$\mathcal{L}(y) = \left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \left(\frac{\beta}{\eta} + \frac{1}{\eta-1} - \frac{1}{\eta-a} \right) \frac{d}{d\eta} + \frac{\alpha\beta\eta+q}{\eta(\eta-1)(\eta-a)} \right) y = 0 \quad (1)$$

te schrijven is als $y = y_1 + c y_2$, $y_2 = \eta y_1 = \frac{\alpha\beta}{\eta} \eta^F(\alpha+1, \beta+1; \beta+1; \eta)$ (2)

Waarbij y_1 oplossing is van de d.v.

$$y_1'' + y_1' \frac{\beta}{\eta} + y_1 \frac{\alpha\beta}{\eta(\eta-1)} = 0 \quad (3)$$

Uit (2) is makkelijk te zien dat y_2 voldoet aan :

$$y_2'' + y_2' \left(\frac{\beta-1}{\eta} + \frac{1}{\eta-1} \right) + y_2 \left(\frac{1-\beta}{\eta^2} + \frac{\alpha\beta+\beta-1}{\eta(\eta-1)} \right) = 0 \quad (4)$$

$\mathcal{L}(y_1 + c y_2) = 0$ geeft na vereenvoudiging m.b.v. (3) en (4)

$$\begin{aligned} & y_1' \left(\frac{1}{\eta-1} - \frac{1}{\eta-a} \right) + y_1 \frac{\alpha\beta a + q}{\eta(\eta-1)(\eta-a)} + c y_2' \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta-a} \right) + c y_2 \frac{\alpha\beta a + q}{\eta(\eta-1)(\eta-a)} \\ & - \frac{\beta-1}{\eta(\eta-1)} c y_2 + \frac{\beta-1}{\eta^2} c y_2 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Met $y_2 = \eta y_1'$ en $y_2' = \eta y_1'' + y_1'$ wordt (5)

$$y_1'' + y_1' \left\{ \frac{\frac{a-1}{ac} - \frac{\alpha\beta a + q}{a} + \frac{(\beta-1)(1-a)}{a}}{\eta-1} + \frac{\beta}{\eta} \right\} + y_1 \frac{-\frac{\alpha\beta a + q}{ac}}{\eta(\eta-1)} = 0 \quad (6)$$

y_1 moet aan (3) voldoen, dus:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a-1}{ac} - \frac{\alpha\beta a + q}{a} + \frac{(\beta-1)(1-a)}{a} &= 0 \\ -\frac{\alpha\beta a + q}{ac} &= \alpha\beta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Uit (7) is c en q te bepalen.

$$c = \frac{-(\gamma-1)(1-a) \pm \sqrt{(\gamma-1)^2(1-a)^2 - 4a\alpha\beta(a-1)}}{2a\alpha\beta}$$

$$q = -a\alpha\beta + \frac{1}{2}(\gamma-1)(1-a) \mp \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma-1)^2(1-a)^2 - 4a\alpha\beta(a-1)}$$

LITERATUUR

Over hoofdstuk 1

- [1] Ginzburg V.L., The propagation of electromagnetic waves in plasma, Pergamon Press, Oxford (1970)
- [2] Budden K.G., Radio waves in the ionosphere, University Press, Cambridge (1961)
- [3] Allis W.P., Buchsbaum S.J. en Bers A., Waves in anisotropic plasmas, M.I.T. Press, Cambridge (Mass.) (1963)

Over hoofdstuk 2

- [4] Milne-Thomson L.M., The calculus of finite differences, McMillan and Co, London (1951)
- [5] Ford W.B., Studies on divergent series and summability, Chelsea Publishing Company, New York (1960)
- [6] Sharaf A.L., J.London Math. Soc. 1 (1969) 193
- [7] Heading J., Proc. Cambridge Soc. 61 (1965) 897

Over hoofdstuk 3

- [8] Sluijter F.W., On the reflection of electromagnetic waves by a cold magnetoplasma (diss.)
- [9] Erdélyi A. ed, Higher transcendental functions, vol.1, McGraw-Hill Book Comp. (1953)
- [10] Erdélyi A., Duke Mathematical J. 9 (1942)