# Vergelijking van twee toetsen voor periodiciteit

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

ONDERAFDELING DER WISKUNDE

GROEP STATISTIEK EN OPERATIONS RESEARCH

Memorandum COSOR 73-01

# Vergelijking van twee toetsen voor periodiciteit

J.G. Baaij

maart 1973

# Vergelijking van twee toetsen voor periodiciteit


## Samenvatting.

In deze verhandeling worden een door Heuts [2] voorgestelde toets en een in het boek van Anderson [1] beschreven toets vergeleken. De laatste toets is uniform meest onderscheidend met betrekking tot een zekere groep G van transformaties. Heuts gaat uit van een minder algemeen model dan Anderson. Wij laten zien dat:

1. De toets van Heuts uitgaande van het beperkte model ook invariant is m.b.t. G.
2. De toets van Heuts uitgaande van een algemener model niet invariant is m.b.t. G, maar dat de toets in dit geval conservatief is.
3. De toetsingsgrootheid van Heuts minder informatie bevat dan de toetsingsgrootheid uit Anderson [1].


## 1. Inleiding.

Op equidistante tijdstippen zijn $y_1, y_2, \ldots, y_T$ waargenomen. Wij beschouwen $y = (y_1, y_2, \ldots, y_T)'$ en nemen aan dat T oneven is $^{*)}$. De kolommen van de matrices $V = (v_{0*}, v_{1*}, \ldots, v_{\frac{1}{2}(T-1)*})$ en $W = (w_{1*}, w_{2*}, \ldots, w_{\frac{1}{2}(T-1)*})$ met

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{i*} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi i}{T}\ 1) \\ \cos(\frac{2\pi i}{T}\ 2) \\ \cos(\frac{2\pi i}{T}\ 3) \\ \vdots \\ \cos(\frac{2\pi i}{T}\ (T-1)) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad w_{i*} = \begin{pmatrix} \sin(\frac{2\pi i}{T}\ 1) \\ \sin(\frac{2\pi i}{T}\ 2) \\ \sin(\frac{2\pi i}{T}\ 3) \\ \vdots \\ \sin(\frac{2\pi i}{T}\ (T-1)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(i = 1,2,\ldots,\frac{1}{2}(T-1))$ vormen een orthogonale basis van $\mathbb{R}^T$ waarbij

$$\|v_{0*}\| = \sqrt{T} \quad \text{en} \quad \|v_{i*}\| = \|w_{i*}\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{2T} \quad \text{voor } i = 1,2,\ldots,\tfrac{1}{2}(T-1)\ .$$

*) Het geval dat T even is gaat nagenoeg analoog. Wij komen hier later op terug.

Opmerking. We kunnen y blijkbaar volledig verklaren met een trigonometrisch polynoom waarin alle perioden die een deler zijn van T zijn opgenomen:

$$y = a_0 v_{0*} + \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(T-1)} (a_i v_{i*} + b_i w_{i*})$$

waarin

1.1 $$a_0 = \frac{1}{T} v_{0*}' y \;,\; a_i = \frac{2}{T} v_{i*}' y \text{ en } b_i = w_{i*}' y \quad \text{voor } i = 1,2,\ldots,\tfrac{1}{2}(T-1)\;.$$

De F-toets (Anderson [1], blz.111) is toepasbaar in het volgende algemene probleem; uitgaande van het model

1.2 $$\underline{y} = \alpha_0 v_{0*} + \sum_{i\in D} (\alpha_i v_{i*} + \beta_i w_{i*}) + \underline{e}$$

waarin $D \subset \{1,2,\ldots,\frac{1}{2}(T-1)\}$ en $\underline{e} \sim N(0,\sigma^2 I)$ willen we toetsen

$$H_0\colon \sum_{i\in E} (\alpha_i^2 + \beta_i^2) = 0 \quad \text{tegen} \quad K\colon \sum_{i\in E} (\alpha_i^2 + \beta_i^2) > 0$$

waarin $E \subset D$.
De door Heuts [2] voorgestelde toets is toepasbaar in het speciale geval dat $D = E = \{p\}$ waarin $\frac{T}{p} = n$ geheel is. Het model wordt dus

1.3 $$\underline{y}_t = \alpha_0 + \alpha_p \cos(\tfrac{2\pi p}{T}\, t) + \beta_p \sin(\tfrac{2\pi p}{T}\, t) + \underline{e}_t$$

en we willen toetsen $H_0\colon \alpha_p^2 + \beta_p^2 = 0$ tegen $K\colon \alpha_p^2 + \beta_p^2 > 0$.

Opmerking. Deze laatste toets is dus alleen toepasbaar voor perioden die een deler van de serielengte zijn en bovendien gelijk zijn aan een geheel aantal malen de tijd tussen twee opeenvolgende waarnemingen. Dit is bijvoorbeeld het geval wanneer we over maandomzetten van een geheel aantal jaren beschikken en seizoensinvloed (periodiciteit van een jaar) willen onderzoeken.

## 2. Vereenvoudiging d.m.v. voldoende statistische grootheden en invariantie.

We gaan uit van het algemene model 1.2. De dichtheid van $\underline{y}$ is

$$f(y) = c\ \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y-\alpha_0 v_{0*} - \sum_{i\in D}(\alpha_i v_{i*} + \beta_i w_{i*})]'[y-\alpha_0 v_{0*} - \sum_{i\in D}(\alpha_i v_{i*} + \beta_i w_{i*})]\} =$$

$$= c'\ \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y'y - 2\alpha_0 y'v_{0*} - 2\sum_{i\in D}(\alpha_i y_i' v_{i*} + \beta_i y_i' w_{i*})]$$

zodat wegens de factorisatiestelling (zie [3], blz. 48) $\underline{y}'\underline{y}$, $\underline{y}'v_{0*}$, $\underline{y}'v_{i*}$ en $\underline{y}'w_{i*}$ voor $i \in D$ voldoende zijn voor de parameters $\sigma^2$, $\alpha_0$, $\alpha_i$ en $\beta_i$ $(i \in D)$. Dus ook $\underline{S}^2$, $\underline{a}_0$, $\underline{a}_i$ en $\underline{b}_i$ $(i \in D)$ zijn voldoende, waarin $\underline{a}_i$ en $\underline{b}_i$ zijn gedefinieerd volgens 1.1 en

2.1 $$\underline{S}^2 = \underline{y}'\underline{y} - T\underline{a}_0^2 - \tfrac{1}{2}T\sum_{i\in D}(\underline{a}_i^2 + \underline{b}_i^2)\ .$$

Zoals bekend zijn $\underline{a}_0$, $\underline{a}_i$ en $\underline{b}_i$ de kleinste kwadratenschatters voor $\alpha_0$, $\alpha_i$ en $\beta_i$. Daar $v_{0*}$, $v_{i*}$ en $w_{i*}$ orthogonaal zijn $(i = 1,2,\ldots,\frac{1}{2}(T-1))$ zijn $\underline{a}_0$, $\underline{a}_i$ en $\underline{b}_i$ o.o. normaal verdeeld.

Het toetsingsprobleem $H_0$: $\alpha_p^2 + \beta_p^2 = 0$ tegen K: $\alpha_p^2 + \beta_p^2 > 0$ $(E = \{p\})$ is invariant onder de volgende groepen van transformaties.

$G_1$: $g_{c_0}\underline{y} = \underline{y} + c_0 v_{0*}$ met $c_0 \in \mathbb{R}$; d.w.z. $g'_{c_0}\underline{a}_0 = \underline{a}_0 + c_0$ *).

Maximaal invariant is de verzameling $\underline{S}^2$, $\underline{a}_i$ en $\underline{b}_i$ voor $i \in D$.

$G_2$: $g_{c,d}\,\underline{y} = \underline{y} + \sum_{i\in D\setminus\{p\}}(c_i v_{i*} + d_i w_{i*})$ met $c_i, d_i \in \mathbb{R}$; d.w.z.

$g'_{c,d}\,\underline{a}_i = \underline{a}_i + c_i$ en $g'_{c,d}\,\underline{b}_i = \underline{b}_i + d_i$ voor $i \in D\setminus\{p\}$.

Maximaal invariant zijn de statistische grootheden $\underline{S}^2$, $\underline{a}_p^2$ en $\underline{b}_p^2$.

$G_3$: $g_\theta\,\underline{y} = (\underline{y}_1'\underline{y}_2',\ldots,\underline{y}_T')$ met

$$\underline{y}_t' = \underline{y}_t + \frac{2}{T}\sum_{s=1}^{T}[\cos(\frac{2\pi p}{T}(s-t) - \theta) - \cos(\frac{2\pi p}{T}(s-t))] \text{ voor } \theta \in (-\pi,\pi)$$

*) Met g' bedoelen we steeds de transformatie der statistische grootheden die door g geïnduceerd wordt.

d.w.z. $g'_\theta \underline{a}_p = \underline{a}_p \cos\theta + \underline{b}_p \sin\theta$ en $g'_\theta \underline{b}_p = -\underline{a}_p \sin\theta + \underline{b}_p \cos\theta$.
Maximaal invariant zijn $\underline{S}^2$ en $(\underline{a}_p^2 + \underline{b}_p^2)$.

$G_4$: $g_c \underline{y} = c\underline{y}$ voor $c > 0$; d.w.z. $g'_c \underline{S}^2 = c^2\underline{S}^2$ en $g'_c(\underline{a}_p^2 + \underline{b}_p^2) = c^2(a_p^2 + b_p^2)$.

Maximaal invariant is $\dfrac{\underline{a}_p^2 + \underline{b}_p^2}{\underline{S}^2}$.

De transformatiegroep $G = G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 \otimes G_4$ induceert de volgende groep $\bar{G}$ van transformaties op de parameterruimte.

$\bar{G}$: $\bar{g}\alpha_0 = c\alpha_0 + c_0$, $\bar{g}\alpha_i = c\alpha_i + c_i$ en $\bar{g}\beta_i = c\beta_i + d_i$ voor $i \in D \setminus \{p\}$.
$\bar{g}\alpha_p = c(\alpha_p \cos\theta + \beta_p \sin\theta)$, $\bar{g}\beta_p = c(-\alpha_p \sin\theta + \beta_b \cos\theta)$ en
$\bar{g}\sigma^2 = c^2\sigma^2$.

Maximaal invariant is $\psi^2 = \dfrac{a_p^2 + b_p^2}{\sigma^2}$.

## 3. Toetsprocedures

Het is bekend dat $\hat{\underline{F}} = \dfrac{(\underline{a}_p^2 + \underline{b}_p^2)/2}{\underline{S}^2/(T-3)}$ een F-verdeling met 2 en $T-3$ vrijheidsgraden en niet centraliteitsparameter $\psi^2 = \dfrac{\alpha_p^2 + \beta_p^2}{\sigma^2}$ heeft (zie bijv. [1], blz. 112).

De dichtheid van de niet centrale F-verdeling heeft monotoon aannemelijkheidsquotiënt in de niet centraliteitsparameter ([3], blz. 268). De F-toets met verwerpingsgebied $\{\hat{\underline{F}} > c\}$ is dus uniform meest onderscheidend in de klasse van toetsen die invariant zijn m.b.t. G. (Immers $\hat{\underline{F}}$ is maximaal invariant m.b.t. G.)

De toets van Heuts is toepasbaar in het geval we uitgaan van model 1.3

$$\underline{y} = \alpha_0 v_{0*} + \alpha_p v_{p*} + \beta_p w_{p*} + \underline{e} \quad \text{waarbij } T = n \times p .$$

We kunnen nu $v_{p*}$ en $w_{p*}$ schrijven als p dezelfde kolommen onder elkaar:

$v_{p*} = (v\ v\ \dots\ v)'$ met $v = (\cos(\frac{2\pi}{n}), \cos(\frac{2\pi}{n}\,2), \dots, \cos(\frac{2\pi}{n}\,(n-1)), 1)'$ en

$w_{p*} = (w\ w\ \dots\ w)'$ met $w = (\sin(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n}\,2), \dots, \sin(\frac{2\pi}{n}\,(n-1)), 0)'$ .

We partitioneren y op dezelfde manier:

$$\underline{y} = (\underline{y}^{(1)}, \underline{y}^{(2)}, \dots, \underline{y}^{(p)}) \quad \text{met} \quad \underline{y}^{(i)} = (\underline{y}_{(i-1)n+1}, \underline{y}_{(i-1)n+2}, \dots, \underline{y}_{in}) \quad (i = 1,2,\dots,n) .$$

Zijn nu

$$\underline{a}^{(\ell)} = \frac{2}{n}\, v'\underline{y}^{(\ell)} \quad \text{en} \quad \underline{b}^{(\ell)} = \frac{2}{n}\, w'\underline{y}^{(\ell)} \quad \text{voor } \ell = 1,2,\dots,p$$

dan is de toetsingsgrootheid van Heuts:

$$\underline{H} = \frac{1}{p}\, \frac{\left(\sum_{\ell=1}^{p} \underline{a}^{(\ell)}\right)^2 + \left(\sum_{\ell=1}^{p} \underline{b}^{(\ell)}\right)^2}{\sum_{\ell=1}^{p} (\underline{a}^{(\ell)})^2 + \sum_{\ell=1}^{p} (\underline{b}^{(\ell)})^2} .$$

$\underline{H}$ heeft nu een $\beta$-verdeling met 2 en $2p - 2$ vrijheidsgraden en niet centraliteitsparameter $\psi^2 = \frac{1}{\sigma^2}(\alpha_p^2 + \beta_p^2)$; immers:

$$\underline{a}^{(\ell)} \sim N(\alpha_p, \frac{2\sigma^2}{n}) , \quad \underline{b}^{(\ell)} \sim N(\beta_p, \frac{2\sigma^2}{n}) \quad \text{voor } \ell = 1,2,\dots,p$$

en $\underline{a}^{(1)}, \underline{b}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(p)}, \underline{b}^{(p)}$ zijn o.o.

Stellen we nu

$$\underline{u}_\ell = \sqrt{\frac{n}{2\sigma^2}}\, \underline{a}^{(\ell)} \quad \text{en} \quad \underline{v}_\ell = \sqrt{\frac{n}{2\sigma^2}}\, \underline{b}^{(\ell)}$$

dan is

$$\underline{H} = \frac{p\bar{\underline{u}}^2 + p\bar{\underline{v}}^2}{p\bar{\underline{u}}^2 + p\bar{\underline{v}}^2 + \sum_{i=1}^{p} (\underline{u}_i - \bar{\underline{u}})^2 + \sum_{i=1}^{p} (\underline{v}_i - \bar{\underline{v}})^2}$$

waarin

$$\bar{\underline{u}} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \underline{u}_i \quad \text{en} \quad \bar{\underline{v}} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \underline{v}_i .$$

Zoals bekend hebben $p\underline{\bar{u}}^2 + p\underline{\bar{v}}^2$ en $\sum_{i=1}^{p} (\underline{u}_i - \underline{\bar{u}})^2 + \sum_{i=1}^{p} (\underline{v}_i - \underline{\bar{v}})^2$ resp. een niet centrale $\chi^2$-verdeling met 2 vrijheidsgraden en niet centraliteitsparameter $\psi^2 = \frac{1}{\sigma^2} (\alpha_p^2 + \beta_p^2)$ en een centrale $\chi^2$-verdeling met $2p - 2$ vrijheidsgraden. Hieruit volgt dat $\underline{H}$ de bovengenoemde $\beta$-verdeling bezit.
Het verwerpingsgebied van deze toets heeft de vorm $\{\underline{H} > c\}$. We kunnen dit verwerpingsgebied ook schrijven in de vorm

$$\{\underline{H}' = \frac{(p\underline{\bar{u}}^2 + p\underline{\bar{v}}^2)/2}{(\sum_{i=1}^{p} (\underline{u}_i - \underline{\bar{u}})^2 + \sum_{i=1}^{p} (\underline{v}_i - \underline{\bar{v}})^2)/(2p-2)} > c'\}$$

(zie bijv. [3], blz. 768).
Volgens de bovenstaande redenering heeft $\underline{H}'$ een F-verdelign met 2 resp. $2p - 2$ vrijheidsgraden en niet centraliteitsparameter $\psi^2$.

<u>Opmerking</u>. Nu is

$$\underline{a}_p = \frac{1}{p} \sum_{\ell=1}^{p} \underline{a}^{(\ell)} \quad \text{en} \quad \underline{b}_p = \frac{1}{p} \sum_{\ell=1}^{p} \underline{b}^{(\ell)}$$

zodat

$$\underline{H}' = \frac{(\underline{a}_p^2 + \underline{b}_p^2)/2}{(\frac{1}{p} \sum_{\ell=1}^{p} (\underline{a}^{(\ell)} - \underline{a}_p)^2 + \frac{1}{p} \sum_{\ell=1}^{p} (\underline{b}^{(\ell)} - \underline{b}_p)^2)/(2p-2)} . \tag{3.1}$$

## 4. Vergelijking van beide procedures.

We gaan uit van model 1.3. De H-toets is nu invariant onder G. De transformaties uit G induceren transformaties van $\underline{a}^{(1)}, \underline{b}^{(1)}, \ldots, \underline{a}^{(\ell)}$ en $\underline{b}^{(\ell)}$.

$$G_1: \quad g'_{c_0} \underline{a}^{(\ell)} = \underline{a}^{(\ell)} + \frac{2}{n} \sum_{j=(\ell-1)n+1}^{\ell n} c_0 \cos(\frac{2\pi}{n} j) = \underline{a}^{(\ell)} \quad \text{en eveneens}$$

$$g'_{c_0} \underline{b}^{(\ell)} = \underline{b}^{(\ell)} \quad \text{voor } \ell = 1,2,\ldots,p.$$

$G_2$: $g'_\theta\, \underline{a}^{(\ell)} = \underline{a}^{(\ell)} \cos\theta + \underline{b}^{(\ell)} \sin\theta$ ([1], blz. 111) en

$g'_\theta\, \underline{b}^{(\ell)} = -\, a^{(\ell)} \sin\theta + \underline{b}^{(\ell)} \cos\theta$ zodat

$(g'_\theta\, \underline{a}^{(\ell)})^2 + (g'_\theta\, \underline{b}^{(\ell)})^2 = (\underline{a}^{(\ell)})^2 + (\underline{b}^{(\ell)})^2$ en bovendien is

$(g'_\theta\, \underline{a}_p)^2 + (g'_\theta\, \underline{b}_p)^2 = \underline{a}_p^2 + \underline{b}_p^2$ .

$G_3$: Is niet relevant wegens $D - \{p\} = \emptyset$.

$g_4$: $g'_c\, \underline{a}^{(\ell)} = ca^{(\ell)}$ en $g'_c\, \underline{b}^{(\ell)} = cb^{(\ell)}$.

We zien dat $\underline{H}$ of $\underline{H}'$ invariant is onder deze transformaties.

Stel eens dat we van een algemener model uitgaan dan model 1.3. We laten aan de hand van een voorbeeld zien dat nu

1. $\underline{H}$ in het algemeen niet invariant is onder $G_2$.

2. De noemer van H' in het algemeen ook niet centraal verdeeld is.

We gaan uit van T = 6 *), D = {1,2} en E = {2}. Het model is dus

$$\underline{y} = \alpha_0 v_{0*} + \sum_{i=1}^{2} (\alpha_i v_{i*} + \beta_i w_{i*}) + \underline{e} \tag{4.1}$$

en we willen toetsen $H_0$: $\alpha_2^2 + \beta_2^2 = 0$ tegen K: $\alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0$.

We beschouwen nu een transformatie $g \in G_2$:

$$g\underline{y} = \underline{y} + c_1 v_{1*} + d_1 w_{1*} \tag{4.2}$$

d.w.z. $g'\underline{a}_1 = \underline{a}_1 + c_1$, $g'\underline{b}_1 = \underline{b}_1 + d_1$, $g'\underline{a}_2 = \underline{a}_2$ en $g'\underline{b}_2 = \underline{b}_2$.

Voor de statistische grootheden $\underline{a}^{(1)}$, $\underline{a}^{(2)}$, $\underline{b}^{(1)}$ en $\underline{b}^{(2)}$ geldt echter:

*) Het feit dat T hier even is, is niet essentieel.

4.3
$$\begin{cases} g'\underline{a}^{(1)} = \frac{2}{3} \sum_{t=1}^{3} [\underline{y}_t + c_1 \cos(\frac{1}{3}\pi t) + d_1 \sin(\frac{1}{3}\pi t)] \cos\frac{2}{3}\pi t = \\ \quad = \underline{a}^{(1)} - c_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, d_1 \\ \text{en op dezelfde manier:} \\ g'\underline{a}^{(2)} = \underline{a}^{(2)} + c_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, d_1 , \\ g'\underline{b}^{(1)} = \underline{b}^{(1)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, c_1 \quad \text{en} \quad g'\underline{b}^{(2)} = \underline{b}^{(2)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, c_1 , \end{cases}$$

zodat wegens 3.1

4.4
$$g'\underline{H}' = \frac{(\underline{a}_2^2 + \underline{b}_2^2)/2}{[\frac{1}{p} \sum_{\ell=1}^{p} \{(\underline{a}^{(\ell)} - \underline{a}_2 + (-1)^{\ell}(c_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, d))^2 + (\underline{b}^{(\ell)} - \underline{b}_2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,(-1)^{\ell} c_1)^2\}]}$$

We zien dat $\underline{H}'$ (dus ook $\underline{H}$) niet invariant is onder g'.

Gaan we nu uit van model 1.3 en passen we de transformatie 4.2 toe op de waarnemingen met $c_1 = \alpha_1$ en $d_1 = \beta_1$, dan wordt 4.1 het model voor de getransformeerde waarnemingen.
Aangezien

$$\mathcal{E} g'\underline{a}^{(\ell)} = \alpha_2 + (-1)^{\ell}(\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\beta_1) , \qquad \mathcal{E} g'\underline{a}_2 = \alpha_2$$

en

$$\mathcal{E} g'\underline{b}^{(\ell)} = \beta_2 + (-1)^{\ell}\, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\beta_1 , \qquad \mathcal{E} g'\underline{b}_2 = \beta_2$$

geldt dat de noemer van 4.4 nu ook niet centraal ($\chi^2$-) verdeeld is met niet centraliteitsparameters

$$2(\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\beta_1)^2 + 2(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\beta_2)^2 .$$

De toets is dus conservatief in dit geval.
Hetzelfde is het geval voor de F-toets wanneer men minder systematiek in zijn model veronderstelt dan in werkelijkheid aan de waarnemingen ten grondslag ligt.

$\underline{H}'$ en $\hat{\underline{F}}$ hebben identieke tellers terwijl de noemers van deze statistische grootheden verdeeld zijn resp. volgens een $\chi^2$-verdeling met $2p-2$, resp. $T-3$ vrijheidsgraden.
Daar $p < \frac{1}{2}(T-1)$ geldt altijd $T-3 > 2p-2$ waaruit volgt dat $\underline{H}'$ minder informatie bevat dan $\hat{\underline{F}}$. De noemer van $\hat{\underline{F}}$ bevat immers meer informatie over $\sigma^2$ dan de noemer van $\underline{H}'$.

Opmerking. In het geval T even is kunnen we $\underline{y}$ weer volledig verklaren met de kolommen van V en W (zie § 1) als we aan W de kolom $w_{0*} = (-1,1,-1,1,\ldots,1)'$ toevoegen.
De statistische grootheid $\underline{b}_0 = \frac{1}{T} w'_{0*}y$ en eventueel de parameter $\beta_0$ spelen dezelfde rol als $\underline{b}_i$ en $\beta_i$ voor $i = 1,2,\ldots,\frac{1}{2}(T-1)$.

Tot slot merken we nog op dat, in geval we uitgaande van het algemene model 1.2 willen toetsen

$$H_0\colon \sum_{i\in E} (\alpha_i^2 + \beta_i^2) = 0 \quad \text{tegen} \quad K\colon \sum_{i\in E} (\alpha_i^2 + \beta_i^2) > 0 ,$$

we groep $G_3$ vervangen door een groep transformaties die $\sum_{i\in E} (\underline{a}_i^2 + \underline{b}_i^2)$ invariant laat. (Dit zijn bijvoorbeeld orthogonale transformaties van de vectoren waarvan de componenten uit $\underline{a}_i$ en $\underline{b}_i$ voor $i \in E$ (zie § 1) bestaan.)
Maximaal invariant is dan

$$\frac{\sum_{i\in E} (\underline{a}_i^2 + \underline{b}_i^2)}{\underline{S}^2}$$

met $\underline{S}^2$ gedefinieerd in 2.1.
Als toetsingsgrootheid kunnen we dan gebruiken

$$\underline{F} = \frac{\sum_{i\in E} (\underline{a}_i^2 + \underline{b}_i^2)/2\ell}{\underline{S}^2/(T-2k-1)}$$

waarin $\ell$ het aantal elementen van E is.
$\underline{F}$ heeft dan een F-verdeling met $2\ell$ en $T-2k-1$ vrijheidsgraden en niet centraliteitsparameter $\psi^2 = \sum_{i\,E} (\alpha_i^2 + \beta_i^2)$.

Literatuur.

[1] T.W. Anderson [1971]. The Statistical Analysis of Time Series.
John Wiley & Sons, inc., New York.

[2] R.M.J. Heuts [1971]. A new test statistic for searching hidden periodicities in time series and the derivation and numerical calculation of its power function.
Katholieke Economische Hogeschool Tilburg, ongepubliceerd.

[3] E.L. Lehmann [1959]. Testing Statistical Hypothesis.
John Wiley & Sons, inc., New York.