

De reeks van Taylor en soortgelijke reeksen

Citation for published version (APA):

Bruijn, de, N. G. (1959). De reeks van Taylor en soortgelijke reeksen. *Simon Stevin : Wis- en Natuurkundig Tijdschrift*, 33 (59/60)(1), 20-26.

Document status and date:

Published: 01/01/1959

Document Version:

Publisher's PDF, also known as Version of Record (includes final page, issue and volume numbers)

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:


www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

60 
A

DE REEKS VAN TAYLOR EN SOORTGELIJKE REEKSEN

N.G. de BRUIJN (*)

We beschouwen de formule van Taylor in de volgende vorm. $F(x)$ is $N-1$ keer differentieerbaar in het interval $0 \leq x \leq a$, en $F^{(N)}(x)$ bestaat nog in het open interval $0 < x < a$. Dan is er een θ ($0 < \theta < 1$) met

$$(1) \quad F(a) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a^n}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{a^N}{N!} F^{(N)}(\theta a).$$

(De restterm is die van Lagrange). Er zijn drie gangbare afleidingen voor deze formule :

1^o. Men past één keer de middelwaardestelling der differentiaalrekening toe op een gecompliceerde uitdrukking, waardoor het resultaat op nogal kunstmatige wijze voor de dag komt.

2^o. Men past partiële integratie toe :

$$F(a) = \int_0^a F'(x) dx = - \int_0^a F'(x) d(a-x) = - [(a-x) F'(x)]_0^a + \int_0^a (a-x) F''(x) dx,$$

$$\int_0^a (a-x) F''(x) dx = - \int_0^a F''(x) d \frac{(a-x)^2}{2!} = - \left[\frac{(a-x)^2}{2!} F''(x) \right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-x)^2}{2!} F'''(x) dx,$$

enz. Om (1) te bereiken onderstelt men weliswaar dat ook $F^{(N)}$ nog continu is in $0 \leq x \leq a$. Als restterm krijgt men

$$\int_0^a \frac{(a-x)^{N-1}}{(N-1)!} F^{(N)}(x) dx,$$

waarop de middelwaardestelling van de integraalrekening kan worden toegepast.

(*) Tekst van een voordracht, die op 11-6-1958 door de schrijver werd gehouden voor het Mathematisch Centrum te Amsterdam.

3°. Men past de middelwaardestelling der differentiaalrekening N keer toe. Bij deze methode trekt men eerst van $F(x)$ een polynoom $P(x)$ met graad $\leq N$ af, zodanig dat $F(a) = P(a)$, en $F(0) = P(0)$, $F'(0) = P'(0), \dots, F^{(N-1)}(0) = P^{(N-1)}(0)$. Van de functie $g(x) = F(x) - P(x)$ weet men nu $g(a) = g(0) = g'(0) = \dots = g^{(N-1)}(0) = 0$. Achtereenvolgens vindt men nu getallen $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ (alle tussen 0 en 1) die voldoen aan $g'(\theta_1 a) = 0, g''(\theta_1 \theta_2 a) = 0, \dots, g^{(N)}(\theta_1 \theta_2 \dots \theta_N a) = 0$. We hebben, identiek in θ ,

$$P(a) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a^n}{n!} P^{(n)}(0) + \frac{a^N}{N!} P^{(N)}(\theta a),$$

en voor $\theta = \theta_1 \theta_2 \dots \theta_N$ is

$$g(a) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a^n}{n!} g^{(n)}(0) + \frac{a^N}{N!} g^{(N)}(\theta a).$$

Door deze twee formules bij elkaar op te tellen, vinden we nu (1).

We zullen van de methoden 2 en 3 enkele bekende generalisaties beschouwen. (Methode 1 bekijken we verder niet; we merken slechts op dat ook methode 2 op een dergelijke manier is weer te geven, nl. door één enkele partiële integratie toe te passen op een ingewikkelde uitdrukking).

De methode der partiële integratie. Het wezenlijke is dat er een rij veeltermen $P_0(x) = 1, P_1(x) = a - x, P_2(x) = \frac{(a - x)^2}{2!}, \dots$

wordt ingevoerd. Om de partiële integratie te laten werken, dienen ze te voldoen aan $P'_1 = -P_0, P'_2 = -P_1, \dots$, en om in de « stoktermen » de $F^{(n)}(a)$ te laten verdwijnen, eisen we dat $P_1(a) = P_2(a) = \dots = 0$. Deze eisen leggen de P_n 's eenduidig vast.

Inplaats van $P_1(a) = P_2(a) = \dots = 0$ kunnen we ook andere eisen aan de P 's opleggen. Willen we bijv. $F(1)$ uitdrukken in $F(0), F'(1), F''(0), F'''(1), \dots$, dan leggen we de P 's vast door $P_1(0) = P_2(1) = P_3(0) = \dots = 0$.

Een bekend voorbeeld is hetgene dat aanleiding geeft tot de somformule van Euler-Maclaurin. Daarbij wil men $\int_0^1 f(x) dx$ uitdrukken in $f(0) + f(1), f'(1) - f'(0), f''(1) - f''(0)$, enz. Als

$P_0(x) = 1$, $P'_n(x) = -P_{n-1}(x)$, dan is

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) P_0(x) dx = \\ - \sum_{n=1}^N [f^{(n-1)}(x) P_n(x)]_0^1 + \int_0^1 f^{(N)}(x) P_N(x) dx.$$

We verlangen dat $P'_1 = -1$ en $P_1(1) = -P_1(0)$, dus $P_1(x) = \frac{1}{2} - x$, en verder dat $P_n(1) = P_n(0)$ voor $n = 2, 3, \dots$. We beschouwen formeel $V(z, x) = P_0(x) - zP_1(x) + z^2P_2(x) - \dots$.

Formeel geldt $\frac{\partial}{\partial x} V(z, x) = zV(z, x)$, dus $V(z, x) = w(z)e^{xz}$. Daar $V(z, x) = 1 + z(\frac{1}{2} - x)$ voor $x = 0$ dezelfde reeks is als voor $x = 1$, vinden we dat $w - 1 + \frac{1}{2}z = we^z - 1 - \frac{1}{2}z$, dus $V(z, x) = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1}$. Gemakkelijk is nu te bewijzen dat de ontwikkelingscoëfficiënten van V (naar machten van z) inderdaad aan de gestelde eisen voldoen. (In standaardnotatie is $P_n(x) = (-1)^n B_n(x)/n!$).

Partiële integratie berust op de stelling $(fg)' = f'g + fg'$. Dit is een bijzonder geval van de regel

$$\frac{d}{dx} \Phi\{f(x), g(x)\} = \left(\frac{\partial \Phi(u, v)}{\partial u} f'(x) + \frac{\partial \Phi(u, v)}{\partial v} g'(x) \right)_{u=f(x), v=g(x)}$$

Hieruit leiden we af (we nemen gemakshalve $f(x) = g(x) = x$) dat

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)_{u=v=x} dx = \left[\Phi(x, x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)_{u=v=x} dx.$$

Wanneer we een enigszins overzichtelijke rij functies $\Phi_n(u, v)$ hebben,

zó dat $\frac{\partial}{\partial u} \Phi_n(u, v) = -\frac{\partial}{\partial v} \Phi_{n-1}(u, v)$, dan kunnen we deze gegeneraliseerde partiële integratie herhaald uitvoeren. We nemen (*)

$$\Phi_n(u, v) = \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^{n-1} \left(\frac{(p\varphi(v) - u)^n}{n!} f'(v) \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

waarin φ en f voldoende vaak differentieerbare functies zijn, en p een constante is.

(*) TCHEBYCHEFF, *Liouville J.* (2) 2 (1857), 166-183).

Integrerende van 0 tot a , vinden we

$$(2) \quad \int_0^a \left(\frac{\partial \Phi_1(u, v)}{\partial u} \right)_{u=v=x} dx = \sum_{n=1}^N \left[\Phi_n(x, x) \right]_0^a - \int_0^a \left(\frac{\partial \Phi_N(u, v)}{\partial v} \right)_{u=v=x} dx.$$

We willen ervoor zorgen dat $\Phi_n(a, a) = 0$ is. Daartoe veronderstellen we dat $p\varphi(a) = a$, zodat

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^{n-1} \left(\frac{(p\varphi(v) - u)^n}{n!} f'(v) \right) \right)_{u=v=a} &= \\ &= p^n \left(\left(\frac{d}{dv} \right)^{n-1} \frac{(\varphi(v) - \varphi(a))^n}{n!} f'(v) \right)_{v=a} = 0. \end{aligned}$$

Het linkerlid in (2) bedraagt $f(0) - f(a)$, zodat we vinden

$$\begin{aligned} f(a) - f(0) &= \sum_{n=1}^N \frac{p^n}{n!} \left\{ \left(\frac{d}{dv} \right)^{n-1} ((\varphi(v))^n f'(v)) \right\}_{v=0} + \\ &+ \int_0^a \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^N \frac{(p\varphi(v) - u)^N}{N!} f'(v) \right\}_{u=v=x} dx. \end{aligned}$$

Dit is de formule van Bürmann-Lagrange, die $f(a)$ uitdrukt in machten van p , als a de oplossing is van de vergelijking $p\varphi(a) = a$. Nemen we in het bijzonder $\varphi(x) \equiv 1$, dan komt de reeks van Taylor weer te voorschijn.

De polynomenaftrekmethode. We geven deze methode in iets algemener vorm. Laat T_0, T_1, \dots, T_N reële lineaire functionalen zijn op de ruimte der op een gegeven interval I reële en N keer differentieerbare functies. Elke T_n voegt dus aan elke dergelijke functie een reëel getal toe, en $T_n(af + bg) = aT_n(f) + bT_n(g)$. We eisen dat T_0, \dots, T_N in de volgende zin onafhankelijk zijn: Is P een polynoom met graad $\leq N$, en is $T_0(P) = \dots = T_N(P) = 0$, dan is $P = 0$.

Een gevolg van de onafhankelijkheid is dat er getallen q_0, \dots, q_N zijn met de eigenschap dat

$$\begin{aligned} \sum_0^N q_n T_n(x^j) &= 0 \quad (j = 0, 1, \dots, N-1), \\ \sum_0^N q_n T_n(x^N) &= N! \end{aligned}$$

(Met x^j wordt de functie bedoeld die aan elke x de waarde x^j toevoegt). Verder is er bij elk stel getallen c_0, \dots, c_N een polynoom P (graad $\leq N$) te vinden met $T_n(P) = c_n$ ($n = 0, \dots, N$).

We veronderstellen bovendien dat er een deelverzameling J van I is met de eigenschap :

(A) Is f $N-1$ keer continu differentieerbaar op I , en bestaat $f^{(N)}$ in het inwendige van I , is verder $T_0 f = \dots = T_N f = 0$, dan is er een $\xi \in J$ met $f^{(N)}(\xi) = 0$.

Nu geldt

Stelling. Is g $N-1$ keer continu differentieerbaar op I , en bestaat $g^{(N)}$ in het inwendige van I , dan is er een $\xi \in J$ met

$$\sum_{n=0}^N q_n T_n(g) = g^{(N)}(\xi).$$

Bewijs. We kunnen een polynoom $P(x)$ bepalen met graad $\leq N$, zó dat $T_n(g) = T_n(P)$ ($n = 0, \dots, N$). Zij $P(x) = ax^N + \dots$. Dan is

$$\sum_{n=0}^N q_n T_n(P) = aN! = P^{(N)}(\xi) \text{ voor alle } \xi. \text{ Noem } g(x) - P(x) = f(x), \text{ dan is er (wegens (A)) een } \xi \text{ met } f^{(N)}(\xi) = 0, \text{ dus } g^{(N)}(\xi) = P^{(N)}(\xi) = \sum_0^N q_n T_n(P) = \sum_0^N q_n T_n(g).$$

We nemen een algemeen voorbeeld. Laat k_0, \dots, k_N gehele getallen zijn, $0 \leq k_n \leq n$, $k_0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_N$. Verder zijn a_0, \dots, a_N reële getallen, zodanig dat alle paren (k_n, a_n) verschillend zijn. Dan is in te zien dat de functionalen T_0, \dots, T_N , gedefinieerd door $T_n(f) = f^{(k_n)}(a_n)$ onafhankelijk zijn op de klasse der polynomen met graad $\leq N$. We eisen verder dat $k_n < N$.

Teneinde aan (A) te voldoen, zullen we nog een voorwaarde toevoegen. We eisen

(B) Als $0 \leq i < j < n \leq N$, dan $(a_n - a_i)(a_n - a_j) \geq 0$.

Dat wil zeggen dat a_n niet in het inwendige ligt van het minimale interval dat a_0, \dots, a_{n-1} bevat.

Laat I_n het kleinste interval zijn dat a_0, \dots, a_n bevat, en $I = I_N$. J zij het inwendige van I (we nemen gemakshalve aan dat I_1 reeds een positieve lengte heeft). Dan is het niet moeilijk te bewijzen dat er aan (A) is voldaan. Laat nl. j_i het aantal n 's zijn met $k_n = i$, en laat $T_0 f = \dots = T_N f = 0$. Dan heeft f minstens j_0 verschillende

nulpunten in het inwendige van I_{j_0} , dus f' heeft daar minstens $j_0 - 1$ nulpunten. f' heeft echter nog j_1 voorgeschreven nulpunten in $I_{j_0 + j_1}$ buiten het inwendige van I_{j_0} , dus minstens $j_0 + j_1 - 1$ in het inwendige van $I_{j_0 + j_1}$. Dan vinden we minstens $j_0 + j_1 + j_2 - 2$ verschillende nulpunten van f'' in het inwendige van $I_{j_0 + j_1 + j_2}$, dus minstens $j_0 + \dots + j_N - N = 1$ nulpunt van $f^{(N)}$ in J . (Is ergens $j_0 + \dots + j_k - k - 1 = 0$, dan wordt er tijdens het bewijs een trivialiteit verkondigd, doch geen fout gemaakt). Derhalve is aan (A) voldaan.

Als een bijzonder geval nemen we alle $k_n = 0$, en dus a_0, \dots, a_N alle verschillend. Dus $T_n(f) = f(a_n)$. Om de q_n 's te vinden schrijven we de interpolatieformule van Lagrange op. Voor elk polynoom P met graad $\leq N$ geldt

$$P(x) = \sum_{n=0}^N f(a_n) \prod_{k \neq n} \frac{x - a_k}{a_n - a_k}.$$

De hoogste coëfficiënt van $P(x)$ is dus

$$\sum_{n=0}^N f(a_n) \prod_{k \neq n} (a_n - a_k)^{-1},$$

zodat we $q_n = N! \prod_{k \neq n} (a_n - a_k)^{-1}$ kunnen nemen. Het eindresultaat is dus als volgt. Liggen a_0, \dots, a_N in een interval I , is $f(x)$ N keer differentieerbaar in het inwendige van I , en is $f^{(N-1)}(x)$ continu in I , dan is er een ξ in het inwendige van I zó dat

$$(3) \quad f^{(N)}(\xi) = N! \sum_{n=0}^N f(a_n) \prod_{k \neq n} (a_n - a_k)^{-1}.$$

Nemen we in het bijzonder $a_n = n$, dan komt er

$$f^{(N)}(\xi) = \sum_{n=0}^N (-1)^{N-n} \binom{N}{n} f(n).$$

Als we in (3) één der a 's apart nemen, en die x noemen, vinden we

$$f(x) = \sum_{n=1}^N f(a_n) Q_n(x) + \frac{(x - a_1) \dots (x - a_N)}{N!} f^{(N)}(\xi),$$

$$\text{waarin } Q_n(x) = \prod_{k \neq 0, k \neq n} \frac{x - a_k}{a_n - a_k}$$

Bij de methode der partiële integratie kwam de restterm als een integraal voor de dag. Om hierbij aan te sluiten beschouwen we nog eens het voorbeeld $T_n(f) = f^{(k_n)}(a_n)$ (met de voorwaarde (B)), en we eisen weer dat alle $k_N < N$. Het is dan niet moeilijk te bewijzen dat er een continue functie $\Psi(x)$ op het interval I bestaat zó dat

$$\sum_0^N q_n T_n(f) = \int_I \Psi(x) g^{(N)}(x) dx$$

voor alle N keer differentieerbare functies f . Tussen twee in grootte opeenvolgende a 's is $\Psi(x)$ steeds een polynoom. Door $f = x^N$ te nemen blijkt dat $\int_I \Psi(x) dx = 1$, en uit (A) volgt dat $\Psi(x) \geq 0$ op I .