De reeks van Taylor en soortgelijke reeksen

60 A

SIMON STEVIN, *Wis- en Natuurkundig Tijdschrift*
33e Jaargang, Aflevering 1. (Maart 1959)

DE REEKS VAN TAYLOR EN SOORTGELIJKE REEKSEN

N.G. de BRUIJN (*)

We beschouwen de formule van Taylor in de volgende vorm. $F(x)$ is N—1 keer differentieerbaar in het interval $0 \leqslant x \leqslant a$, en $F^{(N)}(x)$ bestaat nog in het open interval $0 < x < a$. Dan is er een θ $(0 < \theta < 1)$ met

$$F(a) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a^n}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{a^N}{N!} F^{(N)}(\theta a) . \tag{1}$$

(De restterm is die van Lagrange). Er zijn drie gangbare afleidingen voor deze formule :

1°. Men past één keer de middelwaardestelling der differentiaalrekening toe op een gecompliceerde uitdrukking, waardoor het resultaat op nogal kunstmatige wijze voor de dag komt.

2°. Men past partiële integratie toe :

$$F(a) = \int_0^a F'(x)dx = -\int_0^a F'(x)d(a-x) = -[(a-x)F'(x)]_0^a + \\ + \int_0^a (a-x)\, F''(x)\,dx,$$

$$\int_0^a (a-x)F''(x)dx = -\int_0^a F''(x)d\,\frac{(a-x)^2}{2!} = \\ -\left[\frac{(a-x)^2}{2!} F''(x)\right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-x)^2}{2!} F'''(x)dx,$$

enz. Om (1) te bereiken onderstelt men weliswaar dat ook $F^{(N)}$ nog continu is in $0 \leqslant x \leqslant a$. Als restterm krijgt men

$$\int_0^a \frac{(a-x)^{N-1}}{(N-1)!} F^{(N)}(x)dx,$$

waarop de middelwaardestelling van de integraalrekening kan worden toegepast.

(*) Tekst van een voordracht, die op 11-6-1958 door de schrijver werd gehouden voor het Mathematisch Centrum te Amsterdam.

3°. Men past de middelwaardestelling der differentiaalrekening N keer toe. Bij deze methode trekt men eerst van $F(x)$ een polynoom $P(x)$ met graad $\leqslant N$ af, zodanig dat $F(a) = P(a)$, en $F(0) = P(0)$, $F'(0) = P'(0),\ldots, F^{(N-1)}(0) = P^{(N-1)}(0)$. Van de functie $g(x) = F(x) - P(x)$ weet men nu $g(a) = g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(N-1)}(0) = 0$. Achtereenvolgens vindt men nu getallen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ (alle tussen 0 en 1) die voldoen aan $g'(\theta_1 a) = 0$, $g''(\theta_1\theta_2 a) = 0,\ldots$, $g^{(N)}(\theta_1\theta_2\ldots\theta_N a) = 0$. We hebben, identiek in θ,

$$P(a) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a^n}{n!} P^{(n)}(0) + \frac{a^N}{N!} P^{(N)}(\theta a),$$

en voor $\theta = \theta_1\theta_2\ldots\theta_N$ is

$$g(a) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a^n}{n!} g^{(n)}(0) + \frac{a^N}{N!} g^{(N)}(\theta a) .$$

Door deze twee formules bij elkaar op te tellen, vinden we nu (1).

We zullen van de methoden 2 en 3 enkele bekende generalisaties beschouwen. (Methode 1 bekijken we verder niet; we merken slechts op dat ook methode 2 op een dergelijke manier is weer te geven, nl. door één enkele partiële integratie toe te passen op een ingewikkelde uitdrukking).

De methode der partiële integratie. Het wezenlijke is dat er een rij veeltermen $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = a - x$, $P_2(x) = \dfrac{(a-x)^2}{2!}, \ldots$ wordt ingevoerd. Om de partiële integratie te laten werken, dienen ze te voldoen aan $P'_1 = -P_0$, $P'_2 = -P_1, \ldots$, en om in de « stoktermen » de $F^{(n)}(a)$ te laten verdwijnen, eisen we dat $P_1(a) = P_2(a) = \ldots = 0$. Deze eisen leggen de P_n's eenduidig vast.

Inplaats van $P_1(a) = P_2(a) = \ldots = 0$ kunnen we ook andere eisen aan de P's opleggen. Willen we bijv. $F(1)$ uitdrukken in $F(0)$, $F'(1)$, $F''(0)$, $F'''(1), \ldots$, dan leggen we de P's vast door $P_1(0) = P_2(1) = P_3(0) = \ldots = 0$.

Een bekend voorbeeld is hetgene dat aanleiding geeft tot de somformule van Euler-Maclaurin. Daarbij wil men $\int_0^1 f(x)dx$ uitdrukken in $f(0) + f(1)$, $f'(1) - f'(0)$, $f''(1) - f''(0)$, enz. Als

$P_0(x) = 1$, $P'_n(x) = -P_{n-1}(x)$, dan is

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)P_0(x)dx =$$

$$- \sum_{n=1}^{N} [f^{(n-1)}(x)P_n(x)]_0^1 + \int_0^1 f^{(N)}(x)P_N(x)dx.$$

We verlangen dat $P'_1 = -1$ en $P_1(1) = -P_1(0)$, dus $P_1(x) = \frac{1}{2} - x$, en verder dat $P_n(1) = P_n(0)$ voor $n = 2,3,\ldots$ We beschouwen formeel $V(z,x) = P_0(x) - zP_1(x) + z^2P_2(x) - \ldots$

Formeel geldt $\frac{\partial}{\partial x} V(z,x) = z V(z,x)$, dus $V(z,x) = w(z)e^{xz}$. Daar $V(z,x) - 1 + z(\frac{1}{2} - x)$ voor $x = 0$ dezelfde reeks is als voor $x = 1$, vinden we dat $w - 1 + \frac{1}{2}z = we^z - 1 - \frac{1}{2}z$, dus $V(z,x) = \dfrac{ze^{xz}}{e^z - 1}$

Gemakkelijk is nu te bewijzen dat de ontwikkelingscoefficienten van V (naar machten van z) inderdaad aan de gestelde eisen voldoen. (In standaardnotatie is $P_n(x) = (-1)^n B_n(x)/n!$).

Partiële integratie berust op de stelling $(fg)' = f'g + fg'$. Dit is een bijzonder geval van de regel

$$\frac{d}{dx}\Phi\{f(x),g(x)\} = \left(\frac{\partial\Phi(u,v)}{\partial u} f'(x) + \frac{\partial\Phi(u,v)}{\partial v} g'(x)\right)_{u=f(x),\ v=g(x)}$$

Hieruit leiden we af (we nemen gemakshalve $f(x) = g(x) = x$) dat

$$\int_a^b \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)_{u=v=x} dx = \Big[\Phi(x,x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)_{u=v=x} dx.$$

Wanneer we een enigszins overzichtelijke rij functies $\Phi_n(u,v)$ hebben, zó dat $\frac{\partial}{\partial u}\Phi_n(u,v) = -\frac{\partial}{\partial v}\Phi_{n-1}(u,v)$, dan kunnen we deze gegeneraliseerde partiële integratie herhaald uitvoeren. We nemen (*)

$$\Phi_n(u,v) = \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{n-1} \left(\frac{(p\varphi(v) - u)^n}{n!} f'(v)\right) \quad (n = 1, 2,\ldots)$$

waarin φ en f voldoend vaak differentieerbare functies zijn, en p een constante is.

(*) TCHEBYCHEFF, *Liouville J.* (2) *2* (1857), 166-183).

Integrerende van 0 tot a, vinden we

$$(2) \quad \int_0^a \left(\frac{\partial \Phi_1(u,v)}{\partial u}\right)_{u=v=x} dx =$$

$$\sum_{n=1}^{N} \Big[\Phi_n(x,x)\Big]_0^a - \int_0^a \left(\frac{\partial \Phi_N(u,v)}{\partial v}\right)_{u=v=x} dx.$$

We willen ervoor zorgen dat $\Phi_n(a,a) = 0$ is. Daartoe veronderstellen we dat $p\varphi(a) = a$, zodat

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{n-1} \left(\frac{(p\varphi(v) - u)^n}{n!} f'(v)\right)\right)_{u=v=a} =$$

$$= p^n \left(\left(\frac{d}{dv}\right)^{n-1} \frac{(\varphi(v) - \varphi(a))^n}{n!} f'(v)\right)_{v=a} = 0.$$

Het linkerlid in (2) bedraagt $f(0) - f(a)$, zodat we vinden

$$f(a) - f(0) = \sum_{n=1}^{N} \frac{p^n}{n!} \left\{\left(\frac{d}{dv}\right)^{n-1} ((\varphi(v))^n f'(v))\right\}_{v=0} +$$

$$+ \int_0^a \left\{\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^N \frac{(p\varphi(v) - u)^N}{N!} f'(v)\right\}_{u=v=x} dx.$$

Dit is de formule van Bürmann-Lagrange, die $f(a)$ uitdrukt in machten van p, als a de oplossing is van de vergelijking $p\varphi(a) = a$ Nemen we in het bijzonder $\varphi(x) \equiv 1$, dan komt de reeks van Taylor weer te voorschijn.

De polynomenaftrekmethode. We geven deze methode in iets algemener vorm. Laat $T_0, T_1, \ldots, T_N$ reële lineaire functionalen zijn op de ruimte der op een gegeven interval I reële en N keer differentieerbare functies. Elke T_n voegt dus aan elke dergelijke functie een reëel getal toe, en $T_n(af + bg) = aT_n(f) + bT_n(g)$. We eisen dat $T_0, \ldots, T_N$ in de volgende zin onafhankelijk zijn : Is P een polynoom met graad $\leqslant N$, en is $T_0(P) = \ldots = T_N(P) = 0$, dan is $P = 0$.

Een gevolg van de onafhankelijkheid is dat er getallen $q_0, \ldots, q_N$ zijn met de eigenschap dat

$$\sum_0^N q_n\, T_n(x^j) = 0 \; (j = 0, 1, \ldots, N-1),$$

$$\sum_0^N q_n\, T_n(x^N) = N!$$

(Met x^j wordt de functie bedoeld die aan elke x de waarde x^j toevoegt). Verder is er bij elk stel getallen $c_0,\ldots,c_N$ een polynoom P (graad $\leqslant N$) te vinden met $T_n(P) = c_n (n = 0,\ldots,N)$.

We veronderstellen bovendien dat er een deelverzameling J van I is met de eigenschap :

(A) *Is* f N— 1 *keer continu differentieerbaar op* I, *en bestaat* $\mathrm{f}^{(N)}$ *in het inwendige van* I, *is verder* $\mathrm{T_0 f} = \ldots = \mathrm{T}_N\mathrm{f} = 0$, *dan is er een* $\xi \in \mathrm{J}$ *met* $\mathrm{f}^{(N)}(\xi) = 0$.

Nu geldt

Stelling. Is g N—1 keer continu differentieerbaar op I, en bestaat $g^{(N)}$ in het inwendige van I, dan is er een $\xi \in J$ met

$$\sum_{n=0}^{N} q_n \, T_n(g) = g^{(N)}(\xi).$$

Bewijs. We kunnen een polynoom $P(x)$ bepalen met graad $\leqslant N$, zó dat $T_n(g) = T_n(P)$ $(n = 0,\ldots,N)$. Zij $P(x) = ax^N + \ldots$. Dan is $\sum\limits_{n=0}^{N} q_n \, T_n(P) = aN! = P^{(N)}(\xi)$ voor alle ξ. Noem $g(x) - P(x) = f(x)$, dan is er (wegens (A)) een ξ met $f^{(N)}(\xi) = 0$, dus $g^{(N)}(\xi) = P^{(N)}(\xi) = \sum\limits_{0}^{N} q_n \, T_n(P) = \sum\limits_{0}^{N} q_n \, T_n(g)$.

We nemen een algemeen voorbeeld. Laat $k_0,\ldots,k_N$ gehele getallen zijn, $0 \leqslant k_n \leqslant n$, $k_0 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_N$. Verder zijn $a_0,\ldots, a_N$ reële getallen, zodanig dat alle paren (k_n,a_n) verschillend zijn. Dan is in te zien dat de functionalen $T_0,\ldots,T_N$, gedefinieerd door $T_n(f) = f^{(k_n)}(a_n)$ onafhankelijk zijn op de klasse der polynomen met graad $\leqslant N$. We eisen verder dat $k_n < N$.

Teneinde aan (A) te voldoen, zullen we nog een voorwaarde toevoegen. We eisen

(B) Als $0 \leqslant i < j < n \leqslant N$, dan $(a_n - a_i)\,(a_n - a_j) \geqslant 0$.

Dat wil zeggen dat a_n niet in het inwendige ligt van het minimale interval dat $a_0,\ldots,a_{n-1}$ bevat.

Laat I_n het kleinste interval zijn dat $a_0,\ldots,a_n$ bevat, en $I = I_N$. J zij het inwendige van I (we nemen gemakshalve aan dat I_1 reeds een positieve lengte heeft). Dan is het niet moeilijk te bewijzen dat er aan (A) is voldaan. Laat nl. j_i het aantal n's zijn met $k_n = i$, en laat $T_0 f = \ldots = T_N f = 0$. Dan heeft f minstens j_0 verschillende nulpunten in het inwendige van I_{j_0}, dus f' heeft daar minstens $j_0 - 1$ nulpunten. f' heeft echter nog j_1 voorgeschreven nulpunten in $I_{j_0+j_1}$ buiten het inwendige van I_{j_0}, dus minstens $j_0 + j_1 - 1$ in het inwendige van $I_{j_0+j_1}$. Dan vinden we minstens $j_0 + j_1 + j_2 - 2$ verschillende nulpunten van f'' in het inwendige van $I_{j_0+j_1+j_2}$, dus minstens $j_0 + \ldots + j_N - N = 1$ nulpunt van $f^{(N)}$ in J. (Is ergens $j_0 + \ldots + j_k - k - 1 = 0$, dan wordt er tijdens het bewijs een trivialiteit verkondigd, doch geen fout gemaakt). Derhalve is aan (A) voldaan.

Als een bijzonder geval nemen we alle $k_n = 0$, en dus $a_0, \ldots, a_N$ alle verschillend. Dus $T_n(f) = f(a_n)$. Om de q_n's te vinden schrijven we de interpolatieformule van Lagrange op. Voor elk polynoom P met graad $\leqslant N$ geldt

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} f(a_n) \prod_{k \neq n} \frac{x - a_k}{a_n - a_k} .$$

De hoogste coefficient van $P(x)$ is dus

$$\sum_{n=0}^{N} f(a_n) \prod_{k \neq n} (a_n - a_k)^{-1} ,$$

zodat we $q_n = N! \prod_{k \neq n} (a_n - a_k)^{-1}$ kunnen nemen. Het eindresultaat is dus als volgt. Liggen $a_0, \ldots, a_N$ in een interval I, is $f(x)$ N keer differentieerbaar in het inwendige van I, en is $f^{(N-1)}(x)$ continu in I, dan is er een ξ in het inwendige van I zó dat

$$f^{(N)}(\xi) = N! \sum_{n=0}^{N} f(a_n) \prod_{k \neq n} (a_n - a_k)^{-1} . \tag{3}$$

Nemen we in het bijzonder $a_n = n$, dan komt er

$$f^{(N)}(\xi) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^{N-n} \binom{N}{n} f(n) .$$

Als we in (3) één der a's apart nemen, en die x noemen, vinden we

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} f(a_n) Q_n(x) + \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_N)}{N!} f^{(N)}(\xi) ,$$

waarin $Q_n(x) = \prod_{k \neq 0,\, k \neq n} \dfrac{x - a_k}{a_n - a_k}$

Bij de methode der partiële integratie kwam de restterm als een integraal voor de dag. Om hierbij aan te sluiten beschouwen we nog eens het voorbeeld $T_n(f) = f^{(k_n)}(a_n)$ (met de voorwaarde (B)), en we eisen weer dat alle $k_N < N$. Het is dan niet moeilijk te bewijzen dat er een continue functie $\Psi(x)$ op het interval I bestaat zó dat

$$\sum_0^N q_n T_n(f) = \int_I \Psi(x)\, g^{(N)}(x)\, dx$$

voor alle N keer differentieerbare functies f. Tussen twee in grootte opeenvolgende a's is $\Psi(x)$ steeds een polynoom. Door $f = x^N$ te nemen blijkt dat $\int_I \Psi(x)\,dx = 1$, en uit (A) volgt dat $\Psi(x) \geqslant 0$ op I.