

Akoustische straling van een cylinder

Citation for published version (APA):

van Ginneken, C. J. J. M. (1970). *Akoustische straling van een cylinder*. (EUT report. WSK, Dept. of Mathematics and Computing Science; Vol. 70-WSK-07). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1970

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

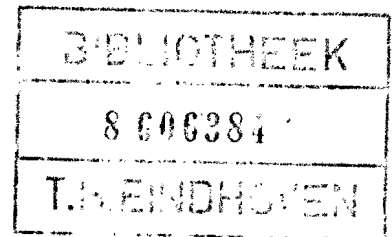
If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
NEDERLAND
ONDERAFDELING DER WISKUNDE

TECHNOLOGICAL UNIVERSITY EINDHOVEN
THE NETHERLANDS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS



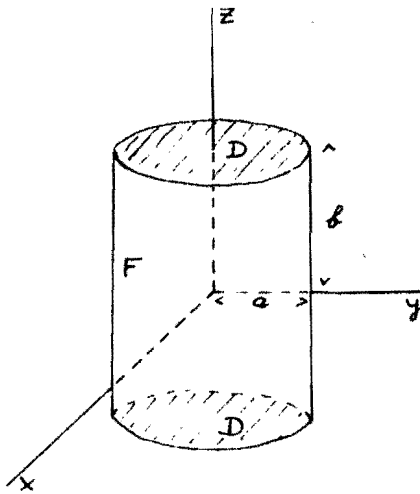
Akoustische straling van een cylinder

C. van Ginneken

T.H.-Report 70-WSK-07

July 1970

0. Probleemstelling



Een, harmonisch met hoekfrequentie ω oscillerend, cilindervormig luidsprekermembraan is ingespannen tussen twee starre deksels. Het membraan F wordt geparametriseerd door:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ -b \leq z \leq b \end{cases}$$

De deksels D worden geparametriseerd door:

$$\begin{cases} 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2 \\ z = \pm b \end{cases}$$

We geven de amplitude van de normale snelheid van de luchtdeeltjes op F de constante waarde v . Gevraagd wordt de akoestische impedantie van deze straler te berekenen.

1. Basisvergelijkingen

De Eulervergelijkingen voor driedimensionale instationaire stroming zonder wrijving en warmtegeleiding luiden:

$$\rho_t = - \operatorname{div}(\rho \underline{u}) \quad (1.1)$$

$$\underline{u}_t + (\underline{u}, \nabla) \underline{u} = - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.2)$$

We beschouwen isentrope stromingen zodat het verband tussen p en ρ wordt gegeven door de toestandsvergelijking:

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (1.3)$$

We beschouwen nu kleine verstoringen van de rusttoestand. Uit (1.1) volgt dan:

$$\rho_t = - \rho_0 \operatorname{div}(\underline{u}) \quad (1.4)$$

Uit (1.2) volgt met behulp van (1.3):

$$\underline{u}_t = - \frac{c_0^2}{\rho_0} \text{grad}(\rho) , \quad (1.5)$$

waarin

$$c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} . \quad (1.6)$$

Onderstel dat het veld \underline{u} op $t = 0$ rotatievrij is, dan volgt uit (1.5) dat het veld \underline{u} een snelheidspotentialiaal ϕ heeft:

$$\underline{u} = - \text{grad}(\phi) . \quad (1.7)$$

Uit (1.3) t/m (1.7) volgen nu de relaties:

$$\phi_{tt} = c_0^2 \Delta \phi , \quad (1.8)$$

$$p = p_0 + \rho_0 \phi_t , \quad (1.9)$$

$$\rho = \rho_0 + \frac{\rho_0}{c_0^2} \phi_t . \quad (1.10)$$

Bij harmonische tijdsafhankelijkheid is de functie ϕ uit (1.8) te schrijven als:

$$\phi(x,y,z,t) = \varphi(x,y,z) e^{-i\omega t} . \quad (1.11)$$

We kunnen nu het probleem als volgt formuleren. Gezocht wordt een functie $\varphi(x,y,z)$, die voldoet aan:

(a) $\Delta \varphi + \kappa^2 \varphi = 0$ buiten de cylinder,
met $\kappa = \omega/c_0$.

(b) $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ op de deksels D,

$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v$ op het membraan F,

waarin n de in de cylinder wijzende normaal is.

(c) De uitstralingsvoorwaarden van Sommerfeld

$\varphi = O\left(\frac{1}{R}\right) , \quad R \rightarrow \infty ,$

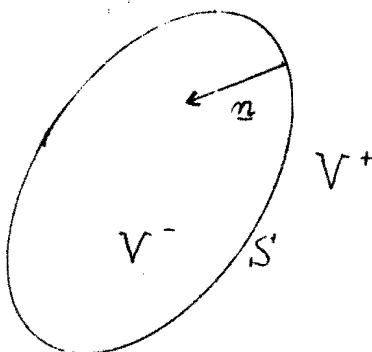
$\frac{\partial \varphi}{\partial R} - i\kappa \varphi = o\left(\frac{1}{R}\right) , \quad R \rightarrow \infty .$

(1.12)

Een maat voor de gemiddeld per periode uitgestraalde energie door het membraan F wordt gegeven door de akoustische impedantie Z , die gedefinieerd is door:

$$Z := - \frac{i\kappa c_0 \rho_0}{v} \int_F \varphi df . \quad (1.13)$$

2. Formulering met een integraalvergelijking



Zij S een "glad", geheel in het eindige gelegen, gesloten oppervlak. S verdeelt de ruimte in twee gebieden, een begrensd gebied V^- en een onbegrensd gebied V^+ . Zij \underline{n} de in V^- gerichte eenheidsnormaal. Zij $\varphi(x)$ een functie in $V^+ + S$, die voldoet aan:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \Delta\varphi + \kappa^2\varphi &= 0 \quad \text{voor } x \in V^+ \\ (b) \quad \frac{\partial\varphi^+}{\partial n} &= f \quad \text{op } S \\ (c) \quad \text{de uitstralingsvoorwaarden van Sommerfeld} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$\varphi = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right), \quad R \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial R} - i\kappa\varphi = o\left(\frac{1}{R}\right), \quad R \rightarrow \infty.$$

De waarde van φ op S noemen we φ^+ .

We leiden nu een integraalvergelijking af voor φ^+ . Als $x \in V^+$ dan volgt uit de formule van Green de volgende representatie:

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{e^{i\kappa r}}{r} \frac{\partial\varphi^+(y)}{\partial n_y} - \varphi^+(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{i\kappa r}}{r} \right) \right) d\sigma_y,$$

of

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{i\kappa r}}{r} f(y) d\sigma_y - \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi^+(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{i\kappa r}}{r} \right) d\sigma_y, \quad (2.2)$$

waarin $r = |y - x|$. Uit (2.2) volgt dat φ te schrijven is als som van de potentiaal van een enkellaag met sterkte f en de potentiaal van een dubbellaag

met sterkte φ^+ . Laten we in (2.2) x vanuit V^+ naar x_0 op S naderen, dan vinden we, gebruik makend van de eigenschappen van de enkellaag en de dubbellaaag (zie appendix):

$$\varphi^+(x_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \varphi^+(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{i\kappa r}}{r} \right) d\sigma_y + \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{e^{i\kappa r}}{r} f(y) d\sigma_y. \quad (2.3)$$

Dit is een Fredholm integraalvergelijking voor φ^+ .

Wat betreft de oplosbaarheid van (2.3) het volgende (lit. 1).

De vergelijking (2.3) bezit altijd een oplossing, die eenduidig is dan en slechts dan als het inwendige homogene Dirichlet probleem alleen de nuloplossing heeft.

Dit betekent dat in ons geval (2.3) eenduidig oplosbaar is mits

$$\frac{j_i^2}{\kappa^2 a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{4\kappa^2 b^2} \neq 1, \quad (2.4)$$

waarin $n = 1, 2, 3, \dots$ en j_i het i -de nulpunt van de Besselfunctie J_0 is. In het volgende nemen we aan dat aan (2.4) is voldaan. Bij de numerieke behandeling van (2.3) zullen we evenwel moeilijkheden signaleren als het linkerlid van (2.4) gelijk of bijna gelijk is aan 1. Hoe in het geval dat (2.3) niet eenduidig oplosbaar is, hieruit toch de eenduidige oplossing van (2.1) geconstrueerd kan worden vindt men in (lit. 1). We hebben er van afgezien deze algoritme te implementeren, omdat ook dan moeilijkheden zouden optreden als bijna aan (2.4) is voldaan.

3. Numerieke methode

We specialiseren (2.3) voor het probleem (1.12).

We kiezen de eenheden zodanig dat $\kappa = 1$ en $v = 1$. Dit kunnen we bereiken door de volgende transformaties:

$$a' = \kappa a, \quad b' = \kappa b, \quad x' = \kappa x, \quad y' = \kappa y, \quad z' = \kappa z, \quad \varphi' = \frac{\kappa \varphi}{v}.$$

Dan geldt:

$$Z = AZ', \quad (3.1)$$

waarin

$$A = \frac{c_0^0}{\kappa^2} \quad \text{en} \quad Z' = -i \int_{F'} \varphi' df'.$$

We berekenen de grootheid Z' en laten in het volgende de accenten weg.

Een punt x_0 op het oppervlak van de luidspreker geven we aan in cylindercoördinaten:

$$x_0 = (R \cos \theta, R \sin \theta, z) . \quad (3.2)$$

Vanwege de symmetrie is φ even in z en onafhankelijk van θ . De waarde van φ op boven- en onderdeksel geven we aan door:

$$\varphi(R \cos \theta, R \sin \theta, \pm b) := \varphi_1(R) , \quad 0 \leq R \leq a . \quad (3.3)$$

De waarde van φ op de mantel geven we aan door:

$$\varphi(a \cos \theta, a \sin \theta, z) := \varphi_2(z) , \quad 0 \leq z \leq b . \quad (3.4)$$

Het is voldoende de integraalvergelijking op te schrijven voor punten x_0 waarvoor

$$\delta f \quad x_0 = (R, 0, b) \quad (\text{bovendeksel})$$

$$\delta f \quad x_0 = (a, 0, z) \quad (\text{mantel}).$$

We parametriseren een punt y op de mantel door

$$y = (a \cos \alpha, a \sin \alpha, \zeta) , \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad -b \leq \zeta \leq b \quad (3.5)$$

en een punt y op boven- resp. onderdeksel door:

$$y = (\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha, \pm b) , \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq a . \quad (3.6)$$

Voor x_0 op het bovendeksel, $x_0 = (R, 0, b)$, geldt

als y op het bovendeksel:

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{ir}}{r} \right) = 0 , \quad (3.7)$$

als y op het benedendeksel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{ir}}{r} \right) &= -2b \frac{e^{ir}}{r^2} \left(i - \frac{1}{r} \right) , \\ \text{met} \quad r &= (R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \alpha + 4b^2)^{\frac{1}{2}} , \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

als y op de mantel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{ir}}{r} \right) &= - (a - R \cos \alpha) \frac{e^{ir}}{r^2} \left(i - \frac{1}{r} \right), \\ \text{met} \\ r &= (R^2 + a^2 - 2aR \cos \alpha + (b - \zeta)^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Voor x_0 op de mantel, $x_0 = (a, 0, z)$, geldt

als y op het bovendeksel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{ir}}{r} \right) &= (z - b) \frac{e^{ir}}{r^2} \left(i - \frac{1}{r} \right), \\ \text{met} \\ r &= (\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \alpha + (z - b)^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

als y op het benedendeksel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{ir}}{r} \right) &= - (z + b) \frac{e^{ir}}{r^2} \left(i - \frac{1}{r} \right), \\ \text{met} \\ r &= (\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \alpha + (z + b)^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

als y op de mantel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{ir}}{r} \right) &= - 2a \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \frac{e^{ir}}{r^2} \left(i - \frac{1}{r} \right) \\ \text{met} \\ r &= (4a^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) + (z - \zeta)^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Met behulp van (3.3) t/m (3.12) volgen uit (2.3) de twee relaties:

$$\begin{aligned} \varphi_1(R) &= \frac{2b}{\pi} \int_0^a \rho K_1(\rho, R) \varphi_1(\rho) d\rho + \frac{a}{\pi} \int_0^b (K_2(\zeta, R) + K_2(-\zeta, R)) \varphi_2(\zeta) d\zeta + \\ &+ \psi_1(R), \quad 0 \leq R \leq a, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^a \rho K_3(\rho, z) \varphi_1(\rho) d\rho + \frac{a^2}{\pi} \int_0^b (K_4(\zeta, z) + K_4(-\zeta, z)) \varphi_2(\zeta) d\zeta + \\ &+ \psi_2(z), \quad 0 \leq z \leq b, \end{aligned} \quad (3.14)$$

met

$$\left. \begin{aligned} K_1(\rho, R) &= \int_0^\pi \frac{e^{ir}}{r^2} \left(i - \frac{1}{r}\right) d\alpha \\ r &= (R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \alpha + 4b^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

$$\left. \begin{aligned} K_2(\zeta, R) &= \int_0^\pi \frac{e^{ir}}{r^2} \left(i - \frac{1}{r}\right) (a - R \cos \alpha) d\alpha \\ r &= (R^2 + a^2 - 2aR \cos \alpha + (b - \zeta)^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(R) &= \frac{a}{\pi} \int_{-b}^b \int_0^\pi \frac{e^{ir}}{r} d\alpha d\zeta \\ r &= (R^2 + a^2 - 2aR \cos \alpha + (b - \zeta)^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

$$\left. \begin{aligned} K_3(\rho, z) &= \int_0^\pi \left[\frac{e^{ir_+}}{r_+^2} \left(i - \frac{1}{r_+}\right) (b + z) + \frac{e^{ir_-}}{r_-^2} \left(i - \frac{1}{r_-}\right) (b - z) \right] d\alpha \\ r_\pm &= (\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \alpha + (z \pm b)^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} K_4(\zeta, z) &= 2 \int_0^\pi \frac{e^{ir}}{r^2} \left(i - \frac{1}{r}\right) \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) d\alpha \\ r &= (4a^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) + (z - \zeta)^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_2(z) &= \frac{a}{\pi} \int_{-b}^b \int_0^\pi \frac{e^{ir}}{r} d\alpha d\zeta \\ r &= (4a^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) + (z - \zeta)^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Wat betreft het gedrag en de numerieke berekening van de functies K_1 , K_2 , K_3 , K_4 , ψ_1 en ψ_2 het volgende.

$K_1(\rho, R)$ is regulier en de numerieke berekening verloopt zonder moeilijkheden.

$K_2(\zeta, R)$ is singulier voor $\zeta = b$, $R = a$. Zij $\zeta = b - \epsilon$ en $R = a - \delta$ dan geldt:

$$K_2(\zeta, R) = - \frac{\delta}{a(\delta^2 + \epsilon^2)} + O(\log(\delta^2 + \epsilon^2)) , \quad \epsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0 . \quad (3.21)$$

Voor het bewijs van deze formule zij verwezen naar de appendix.

$K_3(\rho, z)$ is singulier voor $\rho = a$, $z = b$. Zij $\rho = a - \delta$ en $z = b - \epsilon$ dan geldt:

$$K_3(\rho, z) = - \frac{\epsilon}{a(\delta^2 + \epsilon^2)} + O(\log(\delta^2 + \epsilon^2)) , \quad \epsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0 . \quad (3.22)$$

$K_4(\zeta, z)$ is een functie van $(z - \zeta)$, die singulier is in $z = \zeta$ en er geldt:

$$K_4(\zeta, z) = O(\log|z - \zeta|) , \quad |z - \zeta| \rightarrow 0 . \quad (3.23)$$

$\psi_1(R)$ is regulier. De numerieke berekening moet met zorg geschieden als $R = a$, omdat de integraal in (3.17) dan oneigenlijk is.

$\psi_2(z)$ is regulier. De numerieke berekening moet met zorg geschieden, omdat de integraal in (3.20) oneigenlijk is.

Op grond van het bovenstaande discretiseren we (3.13) en (3.14) zo, dat de punten $R = a$, $z = 0$ en $z = b$ niet optreden. Het voordeel daarvan is, dat bij discretisatie alleen nog de kern $K_4(\zeta, z)$ in (3.14) singulier is. We schrijven daarom (3.14) als:

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) \left[1 - \frac{a^2}{\pi} \int_0^b K_4(\zeta, z) d\zeta \right] &= \frac{1}{\pi} \int_0^a \rho K_3(\rho, z) \varphi_1(\rho) d\rho + \\ &+ \frac{a^2}{\pi} \int_0^b K_4(\zeta, z) (\varphi_2(\zeta) - \varphi_2(z)) d\zeta + \frac{a^2}{\pi} \int_0^b K_4(-\zeta, z) \varphi_2(\zeta) d\zeta + \psi_2(z) . \end{aligned} \quad (3.24)$$

De integrand in de tweede term van het rechterlid van (3.24) nemen we gelijk aan 0 als $z = \zeta$.

We schrijven nu (3.14) op voor de punten:

$$R_j = (2j + 1)h , \quad \text{waarin } h = \frac{a}{2N} , \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.25)$$

en (3.24) voor de punten

$$z_j = (2j + 1)k , \quad \text{waarin } k = \frac{b}{2M} , \quad j = 0, 1, \dots, M-1 . \quad (3.26)$$

De numerieke berekening van de functies K_1 , K_2 , K_3 , K_4 en ψ_1 verloopt nu

zonder moeilijkheden. De numerieke berekening van ψ_2 en $\int_0^b K_4(\zeta, z) d\zeta$ moet met zorg geschieden. (Zie bijlage 1.)

We discretiseren de integralen in de rechterleden van (3.14) en (3.24) met behulp van de midpoint rule. Dit levert een stelsel van $N + M$ lineaire vergelijkingen voor de $N + M$ onbekenden:

$$\varphi_1(R_j) , j = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{en} \quad \varphi_2(z_j) , j = 0, 1, \dots, M-1 .$$

De grootheid

$$Z' = -4\pi ia \int_0^b \varphi_2(z) dz \quad \text{uit (3.1)}$$

benaderen we met behulp van de midpoint rule op de punten z_j uit (3.26).

4. Numerieke resultaten

Ter illustratie geven we in tabel 1 de resultaten voor het punt $a = 2$, $b = 1$. Het lijkt gerechtvaardigd h-extrapolatie toe te passen. Dit levert de waarden in de laatste 2 kolommen.

In tabel 2 zijn de resultaten opgegeven voor het punt $a = 2.9$, $b = 2.8$. In dit geval is het linkerlid van (2.4) gelijk aan 1.0024. We zien duidelijk de slechte convergentie.

In tabel 3 zijn de waarden van Z' getabelleerd voor $0 < b \leq a \leq 3$ met intervallen van 0.3.

De opgegeven getallen zijn verkregen door toepassen van h-extrapolatie. Voor een volledig overzicht hiervan zij verwezen naar bijlage 2.

Tabel 1. $a = 2, b = 1$

N	M	Re(Z')	- Im(Z')	Geëxtrapoleerde waarden	
				Re(Z')	- Im(Z')
2	2	14.4967	17.7629		
3	3	13.8090	17.3107	12.434	16.407
4	4	13.4910	17.0792	12.537	16.384
5	5	13.3067	16.9416	12.570	16.391
6	6	13.1857	16.8510	12.581	16.398
8	8	13.0359	16.7400	12.586	16.407

Tabel 2. $a = 2.9, b = 2.8$

N	M	Re(Z')	- Im(Z')
2	2	86.55	26.67
3	3	83.22	33.27
4	4	85.40	37.40
6	6	92.93	37.37
8	8	96.32	33.60
12	12	97.46	28.99

Tabel 3.

b	a	Re(Z')	- Im(Z')	b	a	Re(Z')	- Im(Z')
0.3	0.3	0.0911	0.305	1.2	1.2	9.88	10.1
0.3	0.6	0.308	0.706	1.2	1.5	12.9	13.3
0.3	0.9	0.558	1.06	1.2	1.8	16.3	17.3
0.3	1.2	0.765	1.36	1.2	2.1	20.8	21.5
0.3	1.5	0.889	1.66	1.2	2.4	26.4	24.9
0.3	1.8	0.926	1.99	1.2	2.7	31.9	27.1
0.3	2.1	0.935	2.47	1.2	3.0	36.7	28.7
0.3	2.4	1.008	3.07	1.5	1.5	19.9	16.3
0.3	2.7	1.23	3.7	1.5	1.8	25.8	20.5
0.3	3.0	1.60	4.3	1.5	2.1	32.9	24.2
0.6	0.6	1.12	1.96	1.5	2.4	40.3	26.9
0.6	0.9	1.98	2.99	1.5	2.7	47.2	28.6
0.6	1.2	2.72	3.96	1.5	3.0	53.3	30.1
0.6	1.5	3.23	5.02	1.8	1.8	35.1	21.1
0.6	1.8	3.59	6.36	1.8	2.1	43.8	23.9
0.6	2.1	4.03	8.09	1.8	2.4	52.3	25.9
0.6	2.4	4.93	10.2	1.8	2.7	60.3	27.3
0.6	2.7	6.35	12.1	1.8	3.0	67.8	28.7
0.6	3.0	8.03	13.5	2.1	2.1	52.4	22.5
0.9	0.9	4.12	5.19	2.1	2.4	61.9	24.0
0.9	1.2	5.76	7.05	2.1	2.7	71.0	25.2
0.9	1.5	7.16	9.22	2.1	3.0	79.7	26.4
0.9	1.8	8.57	12.0	2.4	2.4	69.5	22.6
0.9	2.1	10.6	15.4	2.4	2.7	79.6	23.6
0.9	2.4	13.5	18.7	2.4	3.0	89.4	24.5
0.9	2.7	17.0	21.2	2.7	2.7	86.9	23.2
0.9	3.0	20.4	22.9	2.7	3.0	98	25.1
				3.0	3.0	106	26.0

5. Appendix

We vermelden in het kort de belangrijkste eigenschappen van een enkellaag en een dubbellaag. We gebruiken de notatie van § 2.

Zij f een voldoende gladde functie op S .

De potentiaal van een enkellaag met sterkte f , $E(x;f)$, is als volgt gedefinieerd:

$$E(x;f) := \int_S f(y) \frac{e^{i\kappa r}}{r} d\sigma_y .$$

De potentiaal van een dubbellaag met sterkte f , $D(x;f)$, is als volgt gedefinieerd:

$$D(x;f) := \int_S f(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{i\kappa r}}{r} \right) d\sigma_y .$$

Er geldt nu het volgende:

- (i) E en D voldoen aan de Helmholtz vergelijking $\Delta\varphi + \kappa^2\varphi = 0$ als $x \notin S$;
 E en D voldoen aan de uitstralingsvoorwaarden;
- (ii) E is continu in de hele ruimte;
in een punt x_0 op S vertoont $\frac{\partial E}{\partial n}$ een sprong, die voldoet aan

$$\frac{\partial E^+}{\partial n} - \frac{\partial E^-}{\partial n} = 4\pi f(x_0) ,$$

$$\frac{\partial E^+}{\partial n} + \frac{\partial E^-}{\partial n} = 2 \int_S f(y) \frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \left(\frac{e^{i\kappa r}}{r} \right) d\sigma_y ;$$

- (iii) in een punt $x_0 \in S$ vertoont D een sprong, die voldoet aan

$$D^+ - D^- = -4\pi f(x_0) ,$$

$$D^+ + D^- = 2 \int_S f(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{i\kappa r}}{r} \right) d\sigma_y ;$$

$\frac{\partial D}{\partial n_{x_0}}$ is continu in de hele ruimte.

Bewijs van formule (3.21).

We gaan uit van (3.16). Stel $R = a - \delta$, $\zeta = b - \epsilon$. Voor $\alpha \rightarrow 0$ geldt, uniform in δ en ϵ :

$$r = (\delta^2 + \epsilon^2 + a(a - \delta)\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^4))^{\frac{1}{2}}. \quad (5.1)$$

Zij $\tau^2 = \delta^2 + \epsilon^2$ en $\gamma = (a(a - \delta))^{\frac{1}{2}}$, dan gaat (5.1) over in

$$r = (\tau^2 + \gamma^2\alpha^2)(1 + \mathcal{O}(\alpha^2)). \quad (5.2)$$

Er geldt verder:

$$\frac{e^{ir}}{r^2} \left(i - \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} - \frac{1}{2r} + \mathcal{O}(1), \quad (5.3)$$

en

$$(a - R \cos \alpha) = \delta + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (5.4)$$

Substitutie van (5.2), (5.3) en (5.4) in (3.16) levert dat voor $\tau \rightarrow 0$ geldt:

$$K_2(\zeta, R) = \int_0^\pi \left[-\frac{1}{(\tau^2 + \gamma^2\alpha^2)^{3/2}} - \frac{1}{2(\tau^2 + \gamma^2\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \right] (1 + \mathcal{O}(\alpha^2)) d\alpha + \mathcal{O}(1). \quad (5.5)$$

Hieruit volgt, omdat

$$\int_0^\pi \frac{\alpha^2 d\alpha}{(\tau^2 + \gamma^2\alpha^2)^{3/2}} = \mathcal{O}(\log \tau)$$

en

$$\int_0^\pi \frac{d\alpha}{(\tau^2 + \gamma^2\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} = \mathcal{O}(\log \tau),$$

dat

$$K_2(\zeta, R) = -\delta \int_0^\pi \frac{d\alpha}{(\tau^2 + \gamma^2\alpha^2)^{3/2}} + \mathcal{O}(\log \tau). \quad (5.6)$$

Nu geldt

$$\int_0^\pi \frac{d\alpha}{(\tau^2 + \gamma^2\alpha^2)^{3/2}} = \frac{1}{\gamma\tau^2} \int_0^\infty \frac{d\beta}{(1 + \beta^2)^{3/2}} + \mathcal{O}(1) = \frac{1}{\gamma\tau^2} + \mathcal{O}(1)$$

en dus

$$K_2(\zeta, R) = - \frac{\delta}{a(\delta^2 + \epsilon^2)} + \mathcal{O}(\log \tau) .$$

Bijlage 1

Bij de onderstaande algoritmen wordt gebruik gemaakt van de volgende constanten:

imag := i; pi := π ; pi2 := $\pi/2$; pi2i := $\pi i/2$; piln2 := $\pi \log 2$; ak := a^2 ;
vak := $4a^2$; bk := b^2 ; pibi := πbi ; ap := a/π ;

Verder wordt verondersteld dat gedeclareerd zijn:

- (i) de real procedure INTEGRAL;
deze wordt beschreven in RC-Informatie nr. 4 van het rekencentrum van de T.H. Eindhoven,
- (ii) de complex procedure integral;
dit is een variant van de bovengenoemde procedure INTEGRAL, om een complexwaardige functie te integreren over een reëel interval,
- (iii) de complex procedure CEXP(z);
deze heeft als waarde e^z .

De numerieke berekening van de functies $K_1(\rho, R)$, $K_2(\zeta, R)$, $K_3(\rho, z)$, $K_4(\zeta, z)$ en $\psi_1(R)$ verloopt met behulp van de volgende algoritmen.


```
complex procedure K1(rho, R); value rho, R; real rho, R;  
begin real alfa, r, Rrb, Rb;  
  complex procedure integrand(alfa); value alfa; real alfa;  
  begin r := sqrt(Rrb + Rb × cos(alfa));  
    integrand := CEXP(imag × r) × (imag × r - 1) / r ↑ 3  
  end;  
  Rrb := 4 × bk + R ↑ 2 + rho ↑ 2; Rb := -2 × rho × R; cd1[2] := 0.1;  
  K1 := integral(alfa, integrand(alfa), 0, pi, cd1, e, false, true)  
end K1;
```

```
complex procedure K2(zetha, R); value zetha, R; real zetha, R;  
begin real alfa, r, Rzab;  
  complex procedure integrand(alfa); value alfa; real alfa;  
  begin real Rca; Rca := R × cos(alfa); r := sqrt(Rzab - 2 × a × Rca);  
    integrand := CEXP(imag × r) × (imag × r - 1) × (a - Rca) / r ↑ 3  
  end;  
  Rzab := (b - zetha) ↑ 2 + R ↑ 2 + ak; cd1[2] := 0.1;  
  K2 := integral(alfa, integrand(alfa), 0, pi, cd1, e, false, true)  
end K2;
```

```
complex procedure K3(rho, z); value rho, z; real rho, z;  
begin real alfa, rplus, rmin, ra2, rabzplus, rabzmin, bzplus, bzmin;  
  complex procedure integrand(alfa); value alfa; real alfa;  
  begin real ra2ca; ra2ca := ra2 × cos(alfa);  
    rplus := sqrt(rabzplus + ra2ca); rmin := sqrt(rabzmin + ra2ca);  
    integrand :=  
    CEXP(imag × rplus) × (imag × rplus - 1) × bzplus / rplus ↑ 3 +  
    CEXP(imag × rmin) × (imag × rmin - 1) × bzmin / rmin ↑ 3  
  end;  
  bzplus := b + z; bzmin := b - z;  
  rabzplus := rho ↑ 2 + ak + bzplus ↑ 2;  
  rabzmin := rho ↑ 2 + ak + bzmin ↑ 2;  
  ra2 := -2 × a × rho; cd1[2] := 0.1;  
  K3 := integral(alfa, integrand(alfa), 0, pi, cd1, e, false, true)  
end K3;
```

```
complex procedure K4(zetha, z); value zetha, z; real zetha, z;  
begin real alfa, r, zz;  
    complex procedure integrand(alfa); value alfa; real alfa;  
    begin real sa; sa := sin(alfa / 2)  $\uparrow$  2; r := sqrt(zz + vak  $\times$  sa);  
        integrand := CEXP(imag  $\times$  r)  $\times$  (imag  $\times$  r - 1)  $\times$  sa / r  $\uparrow$  3  
    end;  
    zz := (z - zetha)  $\uparrow$  2; cd1[2] := 0.1;  
    K4 := 2  $\times$  integral(alfa, integrand(alfa), 0, pi, cd1, e, false, true)  
end K4;
```

```
complex procedure PSI1(R); value R; real R;  
begin real alfa, Ra, Ra2;  
    complex procedure f(alfa); value alfa; real alfa;  
    begin real zetha; cd1[2] := b / 10;  
        f := integral(zetha, integrand(Ra + Ra2  $\times$  cos(alfa), zetha),  
            -b, b, cd1, e, false, true)  
    end;  
    complex procedure integrand(Racos, zetha);  
    value Racos, zetha; real Racos, zetha;  
    begin real r; r := sqrt(Racos + (b - zetha)  $\uparrow$  2);  
        integrand := CEXP(imag  $\times$  r) / r  
    end;  
    Ra := R  $\uparrow$  2 + ak; Ra2 := -2  $\times$  a  $\times$  R; cd2[2] := 0.1;  
    PSI1 := ap  $\times$  integral(alfa, f(alfa), 0, pi, cd2, e, false, true)  
end PSI1;
```

Om de functie $\psi_2(z)$ numeriek te berekenen gaan we als volgt te werk.
Uit (3.20) volgt:

$$I(z) := \frac{\pi}{a} \psi_2(z) = \int_{-b}^b \int_0^\pi \frac{e^{ir}}{r} d\alpha d\zeta ,$$

waarin

$$r = (4a^2 \sin^2(\frac{1}{2}\alpha) + (z - \zeta)^2)^{\frac{1}{2}} .$$

We schrijven $I(z)$ als

$$I(z) = I_1(z) + 2\pi bi + I_2(z) ,$$

waarin

$$I_1(z) = \int_0^\pi \int_{-b}^b \frac{1}{r} d\zeta d\alpha \quad \text{en} \quad I_2(z) = \int_0^\pi \int_{-b}^b \frac{e^{ir} - 1 - ir}{r} d\zeta d\alpha .$$

$I_2(z)$ wordt berekend met behulp van de procedure integral. Hierbij berekenen we de integrand als volgt:

$$r := (4a^2 \sin^2(\frac{1}{2}\alpha) + (z - \zeta)^2)^{\frac{1}{2}} ;$$
$$\text{integrand} := \text{if } r < \text{eps} \text{ then } \left(-\frac{r}{2} - i \frac{r^2}{6} + \frac{r^3}{24} + \frac{ir^4}{120} \right)$$
$$\text{else } \left(\frac{e^{ir} - 1 - ir}{r} \right) ;$$

We kiezen in onze berekeningen $\text{eps} = 0.01$.

Om $I_1(z)$ te berekenen stellen we

$$\zeta = z + 2at \sin(\frac{1}{2}\alpha) ,$$

dan volgt

$$I_1(z) = \int_0^\pi \log(p + (\sin^2(\frac{1}{2}\alpha) + p^2)^{\frac{1}{2}}) d\alpha -$$
$$- \int_0^\pi \log(-q + (\sin^2(\frac{1}{2}\alpha) + q^2)^{\frac{1}{2}}) d\alpha , \tag{1}$$

waarin

$$p = \frac{b - z}{2a} \quad \text{en} \quad q = \frac{b + z}{2a} .$$

De eerste integraal in het rechterlid van (1) heeft een "nette" integrand, omdat $p > 0$. De tweede integraal uit (1) schrijven we als volgt:

$$\begin{aligned} - \int_0^{\pi} \log(-q + (\sin^2(\frac{1}{2}\alpha) + q^2)^{\frac{1}{2}}) d\alpha &= -2 \int_0^{\pi} \log(\sin(\frac{1}{2}\alpha)) d\alpha + \\ &+ \int_0^{\pi} \log(q + (\sin^2(\frac{1}{2}\alpha) + q^2)^{\frac{1}{2}}) d\alpha . \end{aligned} \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$I_1(z) = 2\pi \log 2 + \int_0^{\pi} \log((p + (\sin^2(\frac{1}{2}\alpha) + p^2)^{\frac{1}{2}})(q + (\sin^2(\frac{1}{2}\alpha) + q^2)^{\frac{1}{2}})) d\alpha . \quad (3)$$

De integraal in (3) heeft een nette integrand en wordt nu berekend met de procedure INTEGRAL. De implementatie van dit alles wordt gegeven in de volgende procedure.

```
complex procedure PSI2(z, eps); value z, eps; real z, eps;
begin real alfa, p, q, I1;
  real procedure intdI1(alfa); value alfa; real alfa;
  begin real skha; skha := sin(alfa / 2)  $\uparrow$  2;
    intdI1 := ln((p + sqrt(skha + p  $\uparrow$  2))  $\times$  (q + sqrt(skha + q  $\uparrow$  2)))
  end intdI1;
  complex procedure intdI2(skha, zetha);
  value skha, zetha; real skha, zetha;
  begin real r; r := sqrt(vak  $\times$  skha + (z - zetha)  $\uparrow$  2);
    intdI2 := if r < eps
      then r  $\times$  (-0.5 + r  $\times$  (-imag / 6 + r  $\times$  (1 / 24 + r  $\times$  imag / 120)))
      else (CEXP(imag  $\times$  r) - 1 - imag  $\times$  r) / r
    end intdI2;
  complex procedure f(alfa); value alfa; real alfa;
  begin real zetha, skha;
    skha := sin(alfa / 2)  $\uparrow$  2; cd1[2] := b / 10;
    f :=
      integral(zetha, intdI2(skha, zetha), -b, b, cd1, e, false, true)
  end f;
  complex I2;
  p := (b - z) / (2  $\times$  a); q := (b + z) / (2  $\times$  a);
  d[2] := 0.1;
  I1 := INTEGRAL(alfa, intdI1(alfa), 0, pi, d, e, false, true) +
    2  $\times$  p ln 2;
  cd2[2] := 0.1;
  I2 := integral(alfa, f(alfa), 0, pi, cd2, e, false, true);
  PSI2 := ap  $\times$  (I1 + I2 + 2  $\times$  p ib1)
end PSI2;
```

De numerieke berekening van de functie

$$\text{int } K_4(z) := \int_0^b K_4(\zeta, z) d\zeta$$

verloopt in grote trekken analoog aan de berekening van $\psi_2(z)$. We schrijven $\text{int } K_4(z)$ als

$$\text{int } K_4(z) = I_1(z) - I_2(z)$$

waarin

$$I_1(z) = 2 \int_0^\pi \int_0^b \left(e^{ir} \left(i - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\alpha)}{r^2} d\zeta d\alpha$$

en

$$I_2(z) = 2 \int_0^\pi \int_0^b \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\alpha)}{r^3} d\zeta d\alpha .$$

$I_1(z)$ wordt berekend met behulp van de procedure integral. Hierbij berekenen we de integrand als volgt:

$$r := (4a^2 \sin^2(\frac{1}{2}\alpha) + (z - \zeta)^2)^{\frac{1}{2}} ;$$

$$\text{integrand} := \text{if } r = 0 \text{ then } 0 \text{ else}$$

$$\begin{aligned} & \text{if } r < \text{eps} \text{ then } \left[-\frac{1}{2} - \frac{ir}{3} + \frac{r^2}{8} + \frac{ir^3}{30} \right] \times \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\alpha)}{r} \\ & \text{else } \left(e^{ir} \left(i - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \times \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\alpha)}{r^2} ; \end{aligned}$$

We kiezen in onze berekeningen $\text{eps} = 0.01$.

Om $I_2(z)$ te berekenen stellen we

$$\zeta = z + 2at \sin(\frac{1}{2}\alpha) ,$$

dan volgt:

$$I_2(z) = \frac{1}{2a^2} \int_0^\pi \left[\frac{p}{(\sin^2(\frac{1}{2}\alpha) + p^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{q}{(\sin^2(\frac{1}{2}\alpha) + q^2)^{\frac{1}{2}}} \right] d\alpha .$$

Dit is te herleiden tot

$$I_2(z) = \frac{1}{a^2} \left(\text{cel } 1 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{p^2}} \right) + \text{cel } 1 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{q^2}} \right) \right), \quad \text{als } q \neq 0.$$

Hierin is cel 1 de volledige elliptische integraal van de eerste soort:

$$\text{cel } 1(x) := \int_0^{\infty} \frac{d\beta}{\sqrt{(1 + \beta^2)(1 + \beta^2 x^2)}}.$$

De berekening van de functie cel 1 verloopt met behulp van een procedure beschreven in (lit. 3).

Het bovenstaande is geïmplementeerd in de volgende procedure.

complex procedure intK⁴(z, eps); value z, eps; real z, eps;

begin real alfa, p, q;

real procedure cell(kc, fail); value kc; real kc; label fail;

if kc ≠ 0 then begin real h, m; kc := abs(kc); m := 1;

L1: h := m; m := kc + m;

if abs(h - kc) > $\epsilon^{-11} \times h$ then

begin kc := sqrt(h × kc); m := m / 2; goto L1 end;

cell := pi / m

end

else goto fail;

complex procedure f(alfa); value alfa; real alfa;

begin real sinkha, zetha;

 sinkha := sin(alfa / 2) ²; cd1[2] := b / 10;

 f := sinkha × integral(zetha, h(sinkha, zetha), 0, b, cd1, e,

false, true)

end f;

complex procedure h(sinkha, zetha);

value sinkha, zetha; real sinkha, zetha;

begin real r; r := sqrt((z - zetha) ² + vak × sinkha);

 h := if r = 0 then 0 else

if r < eps

then (-0.5 + r × (-imag / 3 + r × (0.125 + imag × r / 30))) / r

else (CEXP(imag × r) × (imag × r - 1) + 1) / r ³

end h;

cd2[2] := 0.1; p := (b - z) / (2 × a); q := z / (2 × a);

intK⁴ := 2 × integral(alfa, f(alfa), 0, pi, cd2, e, false, true) -

 (cell(sqrt(1 + 1 / p ²), fail) +

 (if z = 0 then 0 else cell(sqrt(1 + 1 / q ²), fail))) / ak;

goto end;

fail : NLCR; PRINTTEXT(~~{cell singulier}~~); NLCR;

end: end intK⁴;

Bijlage 2

b	a	M	N	Re(Z')	- Im(Z')	Geëxtrapoleerde waarden	
						Re(Z')	- Im(Z')
0.3	0.3	3	3	0.091750	0.31122		
		4	4	0.091589	0.30970	0.09111	0.3051
		5	5	0.091496	0.30883	0.09112	0.3054
0.3	0.6	3	3	0.32428	0.74081		
		4	4	0.32043	0.73246	0.3089	0.7074
		5	5	0.31800	0.72727	0.3083	0.7065
0.3	0.9	3	3	0.60622	1.1305		
		4	4	0.59437	1.1131	0.5588	1.061
		5	5	0.58701	1.1020	0.5576	1.058
0.3	1.2	3	3	0.85895	1.4729		
		4	4	0.83577	1.4459	0.7662	1.365
		5	5	0.82166	1.4284	0.7653	1.359
0.3	1.5	3	3	1.0333	1.8133		
		4	4	0.99687	1.7766	0.8876	1.667
		5	5	0.97519	1.7522	0.8885	1.655
0.3	1.8	3	3	1.1220	2.2259		
		4	4	1.0722	2.1792	0.9228	2.039
		5	5	1.0430	2.1465	0.9262	2.015
		6	6	1.0237	2.1226	0.9272	2.003
		8	8	0.99922	2.0903	0.9258	1.993
0.3	2.1	3	3	1.1808	2.7864		
		4	4	1.1181	2.7267	0.9302	2.548
		5	5	1.0811	2.6821	0.9330	2.504
		6	6	1.0567	2.6489	0.9347	2.483
		8	8	1.0262	2.6033	0.9347	2.467
0.3	2.4	3	3	1.3277	3.5135		
		4	4	1.2493	3.4348	1.014	3.199
		5	5	1.2011	3.3736	1.008	3.128
		6	6	1.1689	3.3271	1.008	3.095
		8	8	1.1287	3.2638	1.008	3.074

b	a	M	N	Re(Z')	- Im(Z')	Geëxtrapoleerde waarden	
						Re(Z')	- Im(Z')
0.3	2.7	3	3	1.6756	4.3176		
		4	4	1.5721	4.2167	1.261	3.914
		5	5	1.5047	4.1365	1.235	3.816
		6	6	1.4588	4.0748	1.229	3.766
		8	8	1.4011	3.9902	1.228	3.736
0.3	3.0	3	3	2.2335	5.0423		
		4	4	2.0933	4.9245	1.673	4.571
		5	5	1.9985	4.8294	1.619	4.449
		6	6	1.9327	4.7571	1.604	4.396
		8	8	1.8489	4.6519	1.598	4.336
0.6	0.6	3	3	1.1224	2.004		
		4	4	1.1207	1.992	1.1157	1.956
		5	5	1.1198	1.985	1.1159	1.958
0.6	0.9	3	3	2.0378	3.1159		
		4	4	2.0238	3.0854	1.982	2.994
		5	5	2.0148	3.0672	1.979	2.994
0.6	1.2	3	3	2.8579	4.1746		
		4	4	2.8236	4.1221	2.721	3.965
		5	5	2.8020	4.0901	2.715	3.962
0.6	1.5	3	3	3.4834	5.3378		
		4	4	3.4221	5.2587	3.238	5.021
		5	5	3.3841	5.2099	3.232	5.015
0.6	1.8	3	3	3.9820	6.8265		
		4	4	3.8848	6.7133	3.593	6.374
		5	5	3.8258	6.6424	3.590	6.359
0.6	2.1	3	3	4.6435	8.7783		
		4	4	4.4931	8.6225	4.042	8.155
		5	5	4.4033	8.5226	4.044	8.123
		6	6	4.3430	8.4532	4.042	8.106
		8	8	4.2661	8.3628	4.035	8.092

b	a	M	N	Re(Z')	- Im(Z')	Geëxtrapoleerde waarden	
						Re(Z')	- Im(Z')
0.6	2.4	3	3	5.8526	11.005		
		4	4	5.6212	10.809	4.927	10.22
		5	5	5.4835	10.679	4.932	10.16
0.6	2.7	3	3	7.6897	13.011		
		4	4	7.3543	12.797	6.348	12.16
		5	5	7.1532	12.650	6.349	12.06
0.6	3.0	3	3	9.7972	14.443		
		4	4	9.3566	14.242	8.035	13.64
		5	5	9.0906	14.094	8.027	13.50
0.9	0.9	3	3	4.153	5.361		
		4	4	4.145	5.316	4.123	5.181
		5	5	4.141	5.291	4.124	5.189
0.9	1.2	3	3	5.9122	7.3849		
		4	4	5.8752	7.2985	5.764	7.039
		5	5	5.8522	7.2489	5.761	7.051
0.9	1.5	3	3	7.5205	9.7499		
		4	4	7.4308	9.6126	7.162	9.201
		5	5	7.3763	9.5332	7.158	9.216
0.9	1.8	3	3	9.2690	12.743		
		4	4	9.0918	12.552	8.560	11.98
		5	5	8.9867	12.439	8.566	11.99
0.9	2.1	3	3	11.766	16.256		
		4	4	11.457	16.032	10.53	15.36
		5	5	11.276	15.895	10.55	15.35
0.9	2.4	3	3	15.323	19.529		
		4	4	14.860	19.324	13.47	18.71
		5	5	14.587	19.189	13.50	18.65

b	a	M	N	Re(Z')	- Im(Z')	Geëxtrapoleerde waarden	
						Re(Z')	- Im(Z')
0.9	2.7	3	3	19.393	21.849		
		4	4	18.798	21.709	17.01	21.29
		5	5	18.443	21.602	17.02	21.18
0.9	3.0	3	3	23.180	23.275		
		4	4	22.489	23.207	20.42	23.00
		5	5	22.071	23.135	20.40	22.85
1.2	1.2	3	3	10.041	10.540		
		4	4	10.000	10.412	9.873	10.03
		5	5	9.976	10.342	9.884	10.06
1.2	1.5	3	3	13.375	14.091		
		4	4	13.238	13.890	12.83	13.29
		5	5	13.161	13.778	12.85	13.33
1.2	1.8	3	3	17.446	18.238		
		4	4	17.145	17.994	16.24	17.26
		5	5	16.975	17.855	16.29	17.30
1.2	2.1	3	3	22.768	22.276		
		4	4	22.268	22.080	20.77	21.49
		5	5	21.983	21.960	20.84	21.48
1.2	2.4	3	3	28.884	25.220		
		4	4	28.236	25.153	26.29	24.95
		5	5	27.858	25.097	26.35	24.87
1.2	2.7	3	3	34.737	26.983		
		4	4	34.015	27.048	31.85	27.24
		5	5	33.582	27.061	31.85	27.11
1.2	3.0	3	3	39.783	28.204		
		4	4	39.016	28.361	36.71	28.83
		5	5	38.547	28.422	36.67	28.67

b	a	M	N	Re(Z')	- Im(Z')	Geëxtrapoleerde waarden	
						Re(Z')	- Im(Z')
1.5	1.5	3	3	20.63	17.16		
		4	4	20.43	16.93	19.83	16.23
		5	5	20.32	16.80	19.89	16.28
1.5	1.8	3	3	27.372	21.331		
		4	4	26.961	21.111	25.73	20.45
		5	5	26.736	20.984	25.84	20.47
1.5	2.1	3	3	35.124	24.604		
		4	4	34.528	24.522	32.74	24.28
		5	5	34.194	24.462	32.86	24.23
1.5	2.4	3	3	42.881	26.591		
		4	4	42.205	26.687	40.18	26.97
		5	5	41.815	26.721	40.25	26.86
1.5	2.7	3	3	49.887	27.848		
		4	4	49.199	28.076	47.14	28.76
		5	5	48.789	28.182	47.15	28.61
1.5	3.0	3	3	56.087	29.054		
		4	4	55.390	29.359	53.30	30.28
		5	5	54.963	29.510	53.25	30.11
1.8	1.8	3	3	36.75	21.77		
		4	4	36.31	21.60	35.00	21.11
		5	5	36.07	21.50	35.13	21.10
1.8	2.1	3	3	45.899	24.034		
		4	4	45.335	24.028	43.64	24.01
		5	5	45.021	24.008	43.76	23.93
1.8	2.4	3	3	54.643	25.381		
		4	4	54.046	25.532	52.25	25.98
		5	5	53.702	25.596	52.33	25.85

b	a	M	N	Re(Z')	- Im(Z')	Geëxtrapoleerde waarden	
						Re(Z')	- Im(Z')
1.8	2.7	3	3	62.679	26.426		
		4	4	62.090	26.681	60.32	27.45
		5	5	61.740	26.803	60.34	27.29
1.8	3.0	3	3	70.151	27.632		
		4	4	69.565	27.947	67.81	28.89
		5	5	69.205	28.103	67.77	28.73
2.1	2.1	3	3	54.29	22.66		
		4	4	53.80	22.64	52.33	22.56
		5	5	53.53	22.61	52.44	22.49
2.1	2.4	3	3	63.887	23.755		
		4	4	63.372	23.842	61.82	24.10
		5	5	63.077	23.871	61.90	23.99
2.1	2.7	3	3	72.987	24.711		
		4	4	72.473	24.869	70.93	25.34
		5	5	72.169	24.936	70.96	25.21
2.1	3.0	3	3	81.723	25.845		
		4	4	81.211	26.033	79.67	26.60
		5	5	80.899	26.115	79.65	26.44
2.4	2.4	3	3	71.36	22.88		
		4	4	70.88	22.84	69.44	22.70
		5	5	70.61	22.80	69.53	22.62
2.4	2.7	3	3	81.494	23.866		
		4	4	81.996	23.833	79.50	23.73
		5	5	80.706	23.794	79.55	23.64
2.4	3.0	3	3	91.361	25.377		
		4	4	90.874	25.180	89.41	24.59
		5	5	90.569	25.038	89.35	24.47

b	a	M	N	Re(Z')	- Im(Z')	Geëxtrapoleerde waarden	
						Re(Z')	- Im(Z')
2.7	2.7	3	3	89.01	24.53		
		4	4	88.45	24.20	86.79	23.19
		5	5	88.13	23.99	86.85	23.18
2.7	3.0	3	3	96.698	20.668		
		4	4	97.499	21.535	99.90	24.14
		5	5	97.863	22.256	99.31	25.14
		6	6	98.093	22.759	99.24	25.27
		8	8	98.187	23.350	98.47	25.12
3.0	3.0	3	3	106.78	24.84		
		4	4	106.50	25.19	105.64	26.21
		5	5	106.33	25.35	105.69	26.03

Literatuur

1. Vekua, I.N.:
New methods for solving elliptic equations. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1967 (291-349).
2. Koshlyakov, N.S., Smirnov, M.M., Gliner, E.B.:
Differential equations of mathematical physics. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1964.
3. Burlisch, R.:
Handbook Series Special Functions, Numerical Calculation of Elliptic Integrals and Elliptic Functions. Num. Math. 7 (1965), 78-90.