Diepte in de wiskunde

DIEPTE IN DE WISKUNDE

Dr. W. PEREMANS

DIEPTE IN DE WISKUNDE

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING VAN HET AMBT VAN GEWOON HOOGLERAAR IN DE WISKUNDE AAN DE TECHNISCHE HOGESCHOOL TE EINDHOVEN OP DINSDAG 4 NOVEMBER 1958

DOOR

Dr. W. PEREMANS

J. B. WOLTERS / GRONINGEN 1958

Mijne heren curatoren,
Mijne heren leden van de senaat en adviseurs,
Dames en heren leden van de wetenschappelijke staf
en andere medewerkers aan deze hogeschool,
Dames en heren studenten,
en voorts
Gij allen, die deze bijeenkomst met uw aanwezigheid vereert.

Wanneer men aan een niet-wiskundige om een oordeel over de wiskunde vraagt, dan komt, naar mijn ervaring, in het antwoord vrijwel altijd het woord „moeilijk" voor. Vraagt men dan of hij alle wiskunde even moeilijk vindt, dan zal hij misschien een onderscheid maken tussen elementaire en hogere wiskunde. Probeert men hem dan te bewegen uiteen te zetten, waarin het verschil tussen deze twee soorten wiskunde bestaat, dan is de kans groot, dat hij, anders dan men misschien zou verwachten, dit in het geheel geen moeilijke taak vindt. Dit onderscheid past geheel in het beeld van een deductieve wetenschap, dat hij zich van de wiskunde vormt, waarin men, van enkele eenvoudige grondbegrippen uitgaande, steeds verder redeneert in een zich voortdurend vertakkende keten van gevolgtrekkingen. Zo ontstaat het beeld van een boom van kennis, waarvan de stam de grondbegrippen voorstelt en de takken en twijgen de conclusieketens. Welnu, de takken dicht bij de stam vormen het elementaire deel der mathesis van waaruit we steeds hoger kunnen stijgen in de ijlere luchten der hogere wiskunde.

Een expert zou op de resultaten van dit gefingeerde vraaggesprek ongetwijfeld heel wat kunnen afdingen. Dit neemt niet weg, dat hij zich van een soortgelijke beeldspraak bedient, als wij zoëven hebben gebezigd. Of beter gezegd een omgedraaid beeld: de klimmer wordt een graver, de hemelbestormer een schatzoeker, de boom een mijn. De wiskundige spreekt over resultaten, die aan de oppervlakte liggen en over diepliggende resultaten. Vraagt men hem echter, wat hij daarmee bedoelt, dan zal zijn antwoord waarschijnlijk aanzienlijk minder vlot komen. Misschien zal hij vragen daarover eerst nog eens te mogen nadenken. Laten wij hier trachten met hem mee te denken.

De eerste vraag is dan, wat er feitelijk mankeert aan het zoëven gegeven lekenbeeld. En dan treffen ons dadelijk twee in het oog lopende tekortkomingen. De eerste is dat het beeld, zowel van de boom als van de mijn, iets suggereert, wat er in werkelijkheid niet is, namelijk een absoluut hoogteverschil. Als ik in een boom klim en ik ben op een gegeven ogenblik 10 meter boven de grond, terwijl mijn collega die een andere tak heeft gekozen nog maar tot 8 meter boven de grond is gekomen, kan ik met recht zeggen, dat ik het verder heb gebracht dan hij. Maar het is duidelijk, dat deze beeldspraak geen vertaling meer toelaat in het geval van verschillende conclusieketens in de wiskunde. Als men twee verschillende lijnen van onderzoek afzonderlijk vervolgt, dan is het niet te zien met welke maat gemeten zou moeten worden, bij welk van beide men op een gegeven ogenblik in absolute zin het hoogst geklommen is. De tweede tekortkoming is dat het beeld van een boom (met de mijn is het iets beter gesteld) slechts een zeer onvolkomen afspiegeling geeft van de ingewikkeldheid van de bestaande wiskunde. En daarmee bedoel ik nu niet alleen de kwantitatieve omvang van de wiskunde, die door geen enkele ter wereld bestaande boom kan worden uitgebeeld, maar wel een onderscheid van meer principiële aard. Wil men een bepaald punt van de boom klimmende bereiken, dan kan dit slechts op één manier, als men tenminste niet van de ene tak op de andere mag overspringen. Dit nu is in de wiskunde zeer zeker niet het geval, waar het geregeld voorkomt, dat verschillende (en soms zeer verschillende) wegen naar hetzelfde doel leiden, waarbij men erover kan twisten welke weg men als de kortste wil beschouwen. En dit brengt ons op een ander punt van betekenis, namelijk dat we misschien niet alle wegen kennen, die tot een bepaald resultaat leiden. We krijgen zo het beeld van een labyrint, dat we nog slechts gedeeltelijk in kaart hebben gebracht, zodat het zeer wel mogelijk is, dat twee plaatsen, die voor zover wij weten slechts via een lange omweg met elkaar verbonden kunnen worden, in werkelijkheid een ons nog onbekende korte verbindingsweg bezitten.

Beeldspraak is gevaarlijk doordat hij de neiging verwekt de analogieën verder door te trekken dan bij het opstellen van het beeld gerechtvaardigd was. Hieraan heb ik mij zoëven ook schuldig gemaakt toen ik mij door het beeld van de doolhof liet verleiden tot het spreken over de lengte van de hierin voorkomende wegen, zonder te preciseren wat daar in het geval, waar de beeldspraak voor bedoeld was, mee correspondeert. En hiermee raken we een belangrijk punt, want zal men niet, bewust of onbewust, de diepte of de oppervlakkigheid van een resultaat afmeten aan de zwaarte en de omvang van het bewijs? Ja, we weten al, dat we eigenlijk niet van „het" bewijs mogen spreken; maar laten we dan het kortste onder de bekende bewijzen nemen, als we het er tenminste over eens kunnen worden welk dat is. Maar als we dit in praktijk trachten te brengen, door een bepaald in de literatuur voorkomend bewijs van een bepaald resultaat in dit licht te beschouwen, dan merken wij op, dat in de loop van het betoog op verscheidene plaatsen gebruik gemaakt wordt van bekende resultaten. Geen nood; we zoeken de bewijzen van deze resultaten op en substitueren deze in het oorspronkelijke bewijs op de plaatsen waar deze resultaten gebruikt worden. Uiteraard zullen we moeten verwachten, dat we dit proces een aantal malen zullen moeten itereren, want in de gesubstitueerde bewijzen zullen wel weer verwijzingen naar vroegere resultaten voorkomen. Wie dit in werkelijkheid eens zou willen uitvoeren, zou wel spoedig merken dat dit een uiterst moeilijk en langdradig karwei is, maar in beginsel is het mogelijk, dit uit te voeren tot we tot de grondbegrippen teruggegaan zijn. Op deze wijze verkrijgen we dan een volkomen schoon en volledig bewijs van het beschouwde resultaat. Ik wil hier op het ogenblik niet ingaan op het bezwaar, dat men zou kunnen maken, dat men aldus de organische samenhang van bepaalde wiskundige theorieën volkomen kapot rafelt, hetgeen niet wil zeggen, dat ik dit bezwaar als onbelangrijk terzijde zou willen schuiven.

Als we deze taak van losprepareren van een bewijsdraad uit het weefsel der wiskunde tot een goed einde hebben gebracht, zijn we echter nog niets opgeschoten met de vraag hoe dan wel de lengte van deze draad te meten. Het ligt voor de hand, het bewijs op te schrijven en na te gaan, hoeveel bladzijden daarvoor nodig zijn. Het zal echter duidelijk zijn, dat dit weinig bevredigend is, want de uitkomst hiervan zal al te zeer afhangen van de uitvoerigheid, waarmee we dit doen. We kunnen evenwel proberen hiervoor voorschriften op te stellen om te trachten hierin wat eenheid te brengen. Dit betekent dat we het logische redeneren, dat we bij het afleiden gebruiken, zullen moeten formaliseren. Tot ons geluk is het apparaat daarvoor, de formele of mathematische logica, al aanwezig. Alvorens de toepassing daarvan nader te beschouwen, willen wij ons eerst nog bezig houden met een ander aspect, dat belangrijk is voor de beoordeling van de vraag in hoeverre onze hele onderneming nu eigenlijk wel zinvol is.

Als een wiskundige een nieuw resultaat onder ogen krijgt, zal hij het belang daarvan zeker niet alleen afmeten aan de lengte van het bewijs, dat nodig is om dit resultaat af te leiden. Hij zal het belang ervan beschouwen in het licht van algemeenheid en elegantie en van de mogelijkheid van toepassing in andere delen der wiskunde of daarbuiten en van de verbanden, die erdoor gelegd worden tussen bekende resultaten, waartussen vroeger geen verband scheen te bestaan. Bij zijn beoordeling van het bewijs zal hij natuurlijk in de eerste plaats letten op de correctheid, die een conditio sine qua non is. Nadat hij de correctheid heeft erkend, zal hij het beoordelen naar zijn originaliteit. Een bewijs, waarin slechts bekende technieken gebruikt zijn op een wijze, analoog met wat hij al vele malen heeft gezien, zal hij ongetwijfeld lager aanslaan, dan een waarin nieuwe gedachten worden gebruikt of eventueel oude methoden worden toegepast in situaties, die essentieel verschillen van die waarvoor deze methoden oorspronkelijk waren ontworpen. Het spreekt vanzelf, dat dergelijke overwegingen van originaliteit in hoge mate onweegbaar zijn en dat het niet wel doenlijk is hiervoor objectieve maatstaven aan te leggen. Het creatieve element laat zich nu eenmaal niet meten of in regels vastleggen. Bovendien moeten we hierbij de nadruk leggen op het feit, dat het ontstaan van nieuwe wiskunde zich langs geheel andere lijnen afspeelt, dan blijkt uit de vorm waarin het vervaardigde product aan de buitenwereld wordt afgeleverd. Het is een spel met vermoedens, analogieën en ideeën, die in elkaar gepast worden tot een geheel. Pas als alles klaar is en alle lacunes zijn opgevuld wordt het in de deductieve vorm van een bewijs gegoten, waarin het vervolgens wordt gepubliceerd en waarin vaak de gedachten, die bij de ontdekking een rol hebben gespeeld in het geheel niet meer zijn terug te vinden.

Van al deze imponderabilia willen we op het ogenblik echter afzien. We keren terug tot ons bewijs, dat we in termen van geformaliseerde logica hopen te normaliseren. Dit houdt uiteraard in dat we moeten vastleggen, wat we als logisch toelaatbare conclusies in ons systeem zullen opnemen. Dit is ongetwijfeld een zekere beperking. In de momenteel gebruikelijke vorm van mededelen van wiskundige bewijzen wordt voor het weergeven van de logische gedachtegang van de gewone omgangstaal gebruik gemaakt en wordt aan de lezer of hoorder overgelaten om te beoordelen of hij de gevolgde gedachtegang als correct aanvaardt. Gelukkig bestaat er onder de wiskundigen in ruime mate een communis opinio over wat aanvaardbaar is en wat niet, al maakt de leek zich over het algemeen overdreven voorstellingen van het absolute en onveranderlijke karakter van wat men met wiskundige strengheid pleegt aan te duiden. Ook de wiskunde kent in dezen controverses en bovendien zijn in de loop der tijden de normen wel aan wijziging onderhevig geweest. Maar wat hiervan zij, men kan in ieder geval trachten, datgene wat nu in de wiskunde aan logisch apparaat gangbaar is, in de geformaliseerde logica op te nemen en dat is ook ongetwijfeld het doel geweest, dat de ontwerpers dezer mathematische logica voor ogen heeft gestaan. Maar zelfs degene, die meent dat dit gelukt is, houde in gedachten, dat een dergelijke onderneming nooit de menselijke geestelijke activiteit voor de toekomst aan banden kan leggen en dat er bewijsmethoden zullen kunnen ontstaan, die buiten het kader van dit systeem blijken te liggen.

Behalve op de logische weg, die we tijdens het bewijs afleggen, moeten we ons echter ook bezinnen op onze uitgangspunten. In het begin van mijn rede ben ik daar met opzet wat lichtvaardig over heen gestapt en heb ik gesproken over grondbegrippen alsof dat iets was, dat eens en voor al vast staat en waar iedereen het over eens is. Niets is echter minder waar; integendeel, wat men als uitgangspunt wil kiezen is voor een belangrijk deel een kwestie van conventie en dus willekeurig. Bovendien is het een van de belangrijkste resultaten van de mathematische logica, dat ieder geformaliseerd logisch systeem, dat niet al te triviaal is, en tevens vrij van tegenstrijdigheden, onvolledig is in die zin, dat er in dit systeem stellingen kunnen worden geformuleerd, die kennelijk juist zijn en toch niet met de hulpmiddelen van het systeem kunnen worden afgeleid. Deze merkwaardige stelling van GÖDEL stelt ons de grenzen van de mogelijkheden der formalisering wel duidelijk voor ogen.

Toch is het niet mijn opzet geweest om te betogen dat het inschakelen der formele logica waardeloos is voor het probleem, dat ons hier bezighoudt. Het gebruik ervan geeft ons een nieuwe mogelijkheid, namelijk om de omvang van het gebruikte logische apparaat te variëren en te zien in hoeverre dit invloed heeft op hetgeen met behulp daarvan bewezen kan worden en eventueel ook op de lengte der bewijzen, die zich dan inderdaad in een dergelijk systeem op een redelijke wijze laat meten. Hierover bestaan onderzoekingen; ik noem een publikatie wederom van GÖDEL, die de in ons kader wel suggestieve titel draagt: Über die Länge der Beweise.

In dit verband valt te wijzen op een in de wiskunde bestaand bewijs-principe, dat niet geheel en al onomstreden is en dat daarom heel goed als voorbeeld kan dienen voor hetgeen wij hier bedoelen. Ik heb hierbij het oog op het zogenaamde keuze-axioma of keuze-postulaat der verzamelingsleer. Als ik een aantal dozen met knopen heb en U de opgave stel een collectie knopen samen te stellen, die uit elke doos precies één knoop bevat, dan zal U dat waarschijnlijk in het geheel geen moeilijke opgave vinden: U kiest eenvoudig uit elke doos één knoop. Ik kan U in zoverre gerust stellen, dat ook de wiskundige hier geen moeilijkheid in ziet. In de wiskunde echter werkt men gewoonlijk niet met eindige maar met oneindige verzamelingen en de moeilijkheid treedt pas op, als ik U dezelfde opgave stel met een oneindig aantal dozen. Misschien ziet U geen essentieel verschil met het eindige geval, maar als dat zo is, zal U in ieder geval niet alle wiskundigen aan Uw zijde vinden. Wat hier ook van zij, men heeft in de wiskunde deze keuzemogelijkheid als een apart axioma ingevoerd en het staat eenieder vrij het te aanvaarden of te verwerpen. Men moet deze keuzemogelijkheid niet verwarren met het afzonderen van bepaalde objecten op grond van een eigenschap. Als men in de zoëven genoemde dozen knopen van verschillende kleur heeft en elke doos bevat precies één rode knoop, dan kan men de opgave zonder van het keuze-axioma gebruik te maken oplossen door alle rode knopen bij elkaar te zoeken. Dit begripsonderscheid wordt ook wel eens gedemonstreerd aan het volgende reeds lang bekende voorbeeld. Als men een aantal paren schoenen op een hoop gooit en men vraagt om van elk paar één schoen op te zoeken, dan kan men dit bijvoorbeeld doen door eenvoudig alle linker schoenen uit de hoop te halen. Vervangt men de schoenen echter door kousen, dan lukt deze methode niet, omdat men bij het breien van kousen geen verschil tussen links en rechts pleegt te maken, zodat hier werkelijk een keus moet worden gemaakt.

Het is nu zo, dat verscheidene belangrijke resultaten in de wiskunde niet kunnen worden bewezen zonder een beroep te doen op het keuze-axioma. Zelfs zijn vele wiskundigen er wel van overtuigd, dat dit niet alleen bij onze huidige stand van kennis onmogelijk is, maar zelfs principieel uitgesloten. Een dergelijke uitspraak is echter zeer gevaarlijk, zoals bij soortgelijke uitspraken in het verleden wel is gebleken.

In ieder geval is het nu zo, dat er een deel van de wiskunde is, dat opgebouwd kan worden zonder van het keuze-axioma gebruik te maken, en dat we misschien het elementaire deel der wiskunde zouden kunnen noemen en een deel der wiskunde waarbij dat niet het geval is, althans niet voor ons op dit ogenblik.

Het is misschien goed om hier ook nog een andere interpretatie van de rol van het keuze-axioma te vermelden. Sommige wiskundigen kennen aan het keuze-axioma een geringere graad van evidentie toe dan aan andere wiskundige principes, zonder het daarom geheel te willen verwerpen. Zij zullen op het standpunt staan, dat het deel der wiskunde dat vrij is van dit axioma een grotere zekerheid bezit, dan het deel waarvoor we dit minder zekere axioma hebben gebruikt.

Het komt U misschien ietwat willekeurig voor, nu juist dit ene axioma als toetssteen te gebruiken voor hetgeen elementair is. Hoewel de speciale positie die het onder de wiskundige principes inneemt, hiervoor wel een zekere rechtvaardiging geeft, is deze tegenwerping toch wel steekhoudend. Het was echter mijn opzet de bedoeling aan een voorbeeld toe te lichten; in beginsel is het mogelijk om met andere axioma's een soortgelijke onderscheiding te maken.

Het is misschien goed nog een ander meer concreet geval betreffende de elementariteit van de bewijsvoering te bespreken, dat in de eerste helft van deze eeuw de getallentheoretici heeft bezig gehouden. Ik bedoel de priemgetalstelling. De vraag waar het hierbij om gaat is die van de dichtheid der priemgetallen, dat zijn de natuurlijke getallen die niet ontbonden kunnen worden als het product van twee kleinere natuurlijke getallen, dus de getallen van de rij 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, enz. Grof gesteld zou de vraag nu luiden: welk percentage van de natuurlijke getallen is priem? Zo gesteld is de vraag nog zinloos, want er zijn oneindig veel natuurlijke getallen en oneindig veel priemgetallen. Men kan de vraag echter preciseren door eerst de natuurlijke getallen tot een zekere grens, bijvoorbeeld 1000, te nemen, het aantal priemgetallen, die kleiner dan 1000 zijn te tellen, en dit aantal door duizend te delen. Vervolgens kan men deze grens onbepaald vergroten en vragen wat er met de corresponderende verhouding gebeurt. Als U bedenkt, dat de priemgetallen steeds schaarser worden, naarmate men verder in de rij der getallen komt, zal het U niet verbazen, dat deze verhouding naar nul gaat als de grens onbepaald toeneemt. GAUSS heeft echter als eerste bij wijze van vermoeden de wetmatigheid, waarmee deze verhouding tot nul nadert aangegeven. Het heeft daarna nog ongeveer een eeuw geduurd, voordat het in 1896 aan HADAMARD en DE LA VALLÉE POUSSIN gelukte, dit vermoeden, dat nu als priemgetalstelling bekend staat, te bewijzen. De reden dat ik dit hier memoreer is echter, dat, hoewel in de formulering van de stelling slechts begrippen uit de eerste beginselen der reële analyse optreden (er komt een logarithme in voor), bij dit bewijs gebruik gemaakt wordt van hulpmiddelen uit de complexe functietheorie, die men geneigd is als veel dieper liggend te beschouwen. De vraag naar een meer elementair bewijs van deze fundamentele stelling uit de getallentheorie lag dan ook voor de hand. Aanvankelijk werden pogingen in die richting met weinig succes bekroond, zodat men reeds aan de mogelijkheid ervan ging twijfelen, totdat, weer een halve eeuw later, in 1948 door A. SELBERG en P. ERDÖS inderdaad een elementair bewijs werd gevonden. Dat dit als een belangrijke prestatie wordt beschouwd, moge blijken uit het feit, dat aan SELBERG, die de beslissende bijdrage tot het bewijs heeft geleverd, hiervoor in 1950 de Fields medaille is toegekend, hetgeen de hoogste eer is die een mathematicus deelachtig kan worden. Terzijde mag ik misschien opmerken, dat dit bewijs, hoewel het inderdaad alleen van hulpmiddelen uit de beginselen der analyse gebruik maakt en dus in principe voor iedere eerstejaars student begrijpelijk moet zijn, zeer gecompliceerd is en daarom zeker niet eenvoudig genoemd mag worden. Verder kan men de vraag stellen (die ik hier niet wil trachten te beantwoorden), in hoeverre het onderscheid tussen beide bewijzen werkelijk op objectief aanwijsbare criteria berust.

Nu wij vastgesteld hebben, hoe moeilijk het is, om tot een streng objectieve behandeling van het probleem van de diepte in de wiskunde te komen, ligt het voor de hand om ons op het standpunt te stellen, dat dit onvermijdelijk is, omdat deze onderscheiding misschien een essentieel subjectief karakter heeft. Een extreem subjectief standpunt is het om te zeggen: elementair is datgene wat ik al weet, en diep hetgeen ik niet weet en dus nog leren moet. Dit is ongetwijfeld een karikatuur, maar ik vrees dat het standpunt van velen toch angstwekkend dicht bij deze karikatuur staat. Het is nu eenmaal een natuurlijke neiging van de mens om, als hij zich iets, misschien ten koste van zeer veel moeite, tot geestelijk eigendom heeft gemaakt, de moeite, die het hem gekost heeft allengs te vergeten en het resultaat als iets vanzelfsprekends te beschouwen. Blijkbaar gaat men niet alleen materiële maar ook geestelijke verworvenheden op den duur als gewoon beschouwen. Het nieuwe daarentegen is een uitdaging aan onze geestelijke traagheid; hier wordt voor de verovering weer inspanning vereist. Men is geneigd dit moeilijk te vinden en de diepzinnigheid ervan te overschatten. Men vergeet dan maar al te licht, dat voor hem, die alles nog leren moet, voor het onbeschreven blad, deze overwegingen niet gelden en dat voor hem de nieuwe wiskunde zeer wel gemakkelijker kan zijn dan de oude. Persoonlijk zou ik zelfs, mij daarbij misschien enigszins aan overdrijving naar de andere zijde schuldig makend, de stelling willen verdedigen, dat in het algemeen de nieuwe wiskunde eenvoudiger is dan de oude. Het ligt namelijk in de lijn van de ontwikkeling van onze wetenschap, dat men, meestal door gebruik te maken van de axiomatische methode, vele verspreide gebieden in één nieuwe meer omvattende theorie samenvat, die de oude resultaten als bijzondere gevallen oplevert. Deze concentratie leidt tot vereenvoudiging, ook in het bewijsapparaat, dat meestal veel doorzichtiger wordt. Het is een groot geluk voor ons, dat deze verlegging van onze uitgangspunten ons nog enigermate in staat stelt, de stormachtige groei in omvang van de wiskunde althans ten dele bij te houden. Ja maar, zal men tegenwerpen, deze concentratie leidt tot een steeds verder gaande abstractie in de gebruikte begrippen en daar ligt de kern van de moeilijkheden. Deze veel gehoorde tegenwerping heb ik, eerlijk gezegd, nooit goed begrepen, en ik geloof dan ook, dat ook deze uiteindelijk weer op dezelfde misvatting berust, die ik zoëven aan de kaak heb trachten te stellen. Voorop zij gesteld, dat het object der wiskunde nu eenmaal altijd abstract is, onverschillig of het nu oude of nieuwe wiskunde betreft. Waarom heten de nieuwe begrippen dan abstracter te zijn? Bepaald niet, omdat het bijvoegelijk naamwoord abstract een vergrotende trap zou toelaten, hetgeen ik ernstig betwijfel, maar op grond van de concrete associaties, die een bepaald wiskundig begrip in meerdere of mindere mate in ons opwekt. Nu zal ik de laatste zijn om de waarde van deze associaties te kleineren; ze zijn voor ons allen onontbeerlijk voor het begrijpen, het vasthouden en het toepassen van wiskunde en niet in het minst voor het scheppen van nieuwe wiskunde. Maar de opvatting dat deze associaties bij de oude wiskunde sterker zouden zijn dan bij de nieuwe, lijkt mij toch weer eenzijdig gezien uit het oogpunt van wie van het oude uit tegen het nieuwe aankijkt. De associaties van de nieuwe wiskunde zijn misschien anders, maar zeker niet minder reëel dan die van de oude; de onbetwistbare levenskracht van deze wiskunde, ook in de toepassingen, zou anders ook onverklaarbaar zijn.

Men zal misschien de vraag stellen, wat de betekenis is van de zoëven gehouden beschouwingen voor de positie van de wiskunde aan een technische hogeschool. Hierover wilde ik gaarne nog enkele opmerkingen maken. Fundamenteel zijn, naar mijn mening, twee beginselen. Ten eerste, dat wij de ingenieur wiskunde geven, die hij gebruiken kan en ten tweede, dat we het hem niet nodeloos moeilijk maken. Wat het eerste punt betreft, kunnen we ons er niet van afmaken door op te merken, dat alle wiskunde in beginsel toepasbaar is en vroeger of later ook werkelijk toegepast wordt. Hoezeer ik ook overtuigd ben van de juistheid van deze stelling, ik zie hierin geen vrijbrief om wiskundige stokpaardjes binnen te smokkelen. De praktijk stelt hier zijn eisen en hetgeen wij de studenten kunnen geven is beperkt in omvang, zodat het hier en nu toepasbare beslist een grote mate van voorrang moet genieten. Over wat dit is, veranderen de inzichten in de loop der tijden, zodat de bakens in deze geregeld moeten worden verzet. In de inaugurele rede van mijn collega SEIDEL heeft U kunnen beluisteren, hoezeer de appreciatie van bepaalde wiskundige vakken aan de technische hogeschool in de geschiedenis aan verandering onderhevig is geweest. Bovendien heeft hij ook uitvoerig gesproken over de polariteit van vormende waarde enerzijds en dienende taak anderzijds, zodat ik op dat aspect hier niet nader behoef in te gaan. Het tweede punt is veel subtieler van karakter, maar daarom niet minder belangrijk. De eis, om de student, die in staat is een goed ingenieur te worden, niet te vermoorden met onverteerbare wiskunde is gebiedend. Maar dit betekent niet, dat wij naar willekeur op de eisen, die wij aan hem stellen, kunnen beknibbelen, want zonder een behoorlijke mathematische basis wordt hij geen goed ingenieur. Maar wel kunnen wij hem tegemoet komen, door de wiskunde, die hij moet kennen, zo elementair mogelijk te houden, en hiermee komen we op het thema van het eerste deel van mijn rede, want wat is elementair nu eigenlijk? Ik zal de eerste zijn om te beamen, dat ik deze vraag niet heb beantwoord, maar ik hoop U er wel van overtuigd te hebben, dat elementair niet per se identiek behoeft te zijn met hetgeen in het verleden het eerst gedoceerd werd. De moderne wiskunde heeft de grenzen verlegd en heeft door nieuwe uitgangspunten en nieuwe methoden begrippen elementair gemaakt, die dat vroeger niet waren. Maar wil men hiervan het volle profijt trekken, dan dient men consequent te zijn en met de modernisering direct al bij de propaedeuse te beginnen. Dat de student dit moeilijker zou vinden, omdat de ouderen uit onbekendheid er zo over denken, geloof ik niet. Integendeel, hij zal het makkelijker vinden, want het is makkelijker. Een voorbeeld, waarbij de modernisering al enige tijd in praktijk is gebracht, eerst in Delft en nu ook hier in Eindhoven is de lineaire algebra. Het succes is onbetwistbaar en de studenten vinden de nieuwe vectoren zeker niet moeilijker dan de oude determinanten. En ze krijgen een apparaat in handen met veel meer toepassingsmogelijkheden.

Dit brengt mij ten slotte nog op een ander punt, n.l. op de noodzakelijke beperking van de studieduur en de moeilijkheden, die dit bij de snelle groei van wetenschap en techniek bij het opstellen van het studieprogramma geeft. Als remedie wordt wel aangegeven het zich concentreren op de basisvakken, omdat die toch voor iedere ingenieur noodzakelijk zijn en omdat latere aanvulling daarvan vrijwel ondoenlijk is of toch in ieder geval veel moeilijker dan het aanvullen van praktische kennis. Maar ook binnen de basisvakken zelf, in ons geval dus binnen de wiskunde zelf, is beperking nodig. Maar het hoofdmotief van mijn betoog is, dat dit niet alleen beperking met behulp van het snoeimes behoeft te zijn. Modernisering en axiomatisering leiden vanzelf tot concentratie en het merkwaardige en paradoxale is, dat de stof daarmee meer elementair en toch ook dieper wordt! Dat de stof minder extensief wordt is hierbij minder erg; juist de intensivering leidt tot de oplossing van het zo moeilijke probleem, hoe veel in weinig tijd te doen en zo de ingenieur die wapens mee te geven, die hem uitgerust maken voor de problemen die hem wachten.

Aan het einde van mijn rede gekomen moge ik allereerst
Hare Majesteit de Koningin mijn eerbiedige dank betuigen voor mijn benoeming tot hoogleraar aan de technische hogeschool te Eindhoven.

Mijne heren Curatoren,

Ook tot U wil ik een woord van dank richten voor het vertrouwen, dat U in mij heeft gesteld door mij voor deze benoeming voor te dragen, hoewel ik voordien geen ervaring bezat in het gebied van het technisch hoger onderwijs. Ik kan U de verzekering geven, dat ik mij ten volle zal wijden aan de mij opgedragen taak, het mijne bij te dragen tot de vorming van toekomstige ingenieurs en dat ik daarnaast het eigen wetenschappelijk onderzoek niet zal verwaarlozen.

Mijne heren leden van de Senaat en adviseurs,

Toen ik na mijn aankomst alhier kennis maakte met hetgeen door U is tot stand gebracht, was ik van grote bewondering vervuld voor het pionierswerk dat door U is en wordt verricht en ik beschouw het dan ook als een groot voorrecht in Uw kring te zijn opgenomen.

Door de hartelijkheid, waarmee Gij mij zijt tegemoetgetreden, heb ik mij hier onmiddellijk thuis gevoeld. De fascinerende taak, gestalte te geven aan deze nieuwe hogeschool, boeit mij buitengewoon en ik zal naar beste kunnen trachten hieraan het mijne bij te dragen.

Waarde SEIDEL,

Ik vind het moeilijk plechtige woorden van dank en waardering te spreken tot iemand, met wie ik dagelijks vriendschappelijk omga. Toch is het aan de andere kant gelukkig, dat deze gelegenheid er is, want zulke woorden zouden anders steeds onuitgesproken blijven. Wees er van overtuigd, dat ik grote bewondering koester voor de wijze, waarop het plan voor het onderwijs in de wiskunde aan deze hogeschool door jou is opgezet en uitgewerkt. Ik vergeet daarbij niet, dat je door dit werk mijn taak hier aanzienlijk hebt verlicht en door veel praktische hulp mijn aanpassing hier hebt vereenvoudigd.

Ik hoop nog vele jaren met je samen te werken.

Waarde BOUWKAMP,

Voor jou gelden dezelfde overwegingen die ik in het begin van mijn dankwoord tot SEIDEL heb gesproken. Het is een bijzonder gelukkige omstandigheid, dat onze hogeschool een zo eminent toegepast wiskundige, als jij bent, aan zich heeft kunnen verbinden. Dit is natuurlijk in de eerste plaats een voorrecht voor de technische hogeschool, maar ook voor mij persoonlijk. Daar het aspect der toepassingen van de wiskunde hier nu eenmaal zeer belangrijk is, beschouw ik je kennis en ervaring op dit gebied als een onmisbare steun bij mijn werk.

Mijne heren leden van de wetenschappelijke staf van de sectie wiskunde,

De sfeer van collegialiteit en het enthousiasme voor de U opgedragen taak hebben mij met grote waardering vervuld. Ik kan voor U geen betere wens bedenken, dan dat de geest die onder U leeft, ook in de toekomst moge blijven bestaan. Ik hoop ook, dat wij, naast onze gemeenschappelijke inspanning voor het onderwijs ook op het terrein van het wetenschappelijk onderzoek gezamenlijk zullen kunnen werken.

Mijne heren docenten in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam,

Aan U heb ik zeer veel te danken. In de eerste plaats mijn akademische vorming in de wiskunde, die ik van U mocht ontvangen. Maar ook daarna zijn de contacten met U, die in de hand gewerkt werden door het feit dat ik in Amsterdam werkzaam bleef, voor mij van grote waarde geweest. Ook dank ik U voor het vertrouwen, dat U in mij heeft gesteld door mij enige malen voor te dragen voor het vervullen van leeropdrachten aan Uw universiteit. De ervaring, die ik hierdoor in het geven van akademisch onderwijs heb opgedaan, is mij voor mijn huidige taak een aanzienlijke steun. Mijn bijzondere dank gaat uit naar mijn promotor, VAN DER WAERDEN, van wie ik zoveel op het gebied van de abstracte algebra heb geleerd.

Mijne heren leden van de Raad van Beheer en dames en heren leden van het personeel van het Mathematisch Centrum te Amsterdam,

Bijna tien jaren heb ik aan Uw instituut doorgebracht en dit betekent, alleen al in tijdsduur gemeten, een belangrijk gedeelte van de door mij tot nu toe afgelegde levensweg. Het is mij onmogelijk om in het korte bestek, dat mij hier ter beschikking staat, rekenschap te geven van wat deze tijd voor mij heeft betekend. Op de afscheidsbijeenkomst, die U ter gelegenheid van mijn vertrek heeft gehouden heb ik getracht dit wel te doen. Toch wil ik ook op deze plaats nogmaals van mijn warme dankbaarheid getuigen. Wat ik nu ben, ben ik bij U, maar vooral ook door U geworden en het gezamenlijke werk op alle terreinen der wiskunde zal steeds een grote plaats in mijn herinnering innemen.

Dames en heren studenten,

Ik kan mij voorstellen, dat ik U met de woorden, die ik in mijn rede over concentratie heb gesproken, vrees heb aangejaagd. De vrees namelijk, dat ik U bouillonblokjes in plaats van soep zou willen laten eten. Ik kan U echter verzekeren, dat ik er mij van bewust ben, dat het opnemen van abstracte stof door de menselijke geest moeite en ook een zekere rijpingstijd kost en dat dit opnemen vergemakkelijkt wordt door wat ik in het voorafgaande concrete associaties heb genoemd. Het is duidelijk, dat U het verwerken van de wiskunde, die U nodig heeft, makkelijker gemaakt wordt, als U zelf kan vaststellen waar de toepassingen liggen. Hoewel er bij de samenstelling van het studieprogramma naar wordt gestreefd de toepassingen zo spoedig mogelijk op de theoretische beschouwingen te doen volgen, kunnen de wiskundigen het in deze toch niet zonder een zekere mate van krediet van Uw zijde stellen. Het is nu eenmaal niet altijd mogelijk de toepassingen direct aan de theorie te koppelen, in de eerste plaats omdat daarvoor soms voorbereidingen nodig zijn die buiten het gebied van de wiskunde liggen en in de tweede plaats, omdat de behandelde wiskunde vaak ook alleen voorbereiding is tot latere, meer direct toepasbare wiskunde. Als ik U daarbij niet verder kan brengen dan tot het besef, dat de wiskunde voor de ingenieur een noodzakelijk kwaad is, zal ik mijn taak niet als geslaagd beschouwen. De noodzakelijkheid zal U namelijk ook zonder mijn toedoen op den duur wel blijken en als U slechts met tegenzin de verplicht gestelde portie wiskunde doorworstelt, zal U van de verkregen kennis nooit het volle profijt trekken, omdat U het gebruik ervan dan met alle geweld zal trachten te vermijden. Dat dit ongewenst is, behoeft geen betoog. Het is trouwens bekend, dat vrouwe mathematica haar gunsten slechts schenkt aan hen, die haar beminnen. En al weet ik, dat ik van de meerderheid Uwer niet mag verwachten, dat zij de wiskunde als enige geliefde aan hun hart zullen drukken, toch hoop ik U allen wel op zijn minst zo ver te brengen, dat U de wiskunde als een gewaardeerd hulpmiddel met vreugde in Uw werk toepast. Ten volle tevreden zal ik echter eerst dan zijn, als U bovendien iets meevoelt van die blijde verwondering, die ons kan vervullen, als wij zien hoe dit abstracte spel van de menselijke geest, dat wiskunde heet, zo wonderwel als sleutel blijkt te kunnen dienen voor de ontraadseling van de realiteit van het gebeuren om ons heen.

Ik heb gezegd.