Meetkunde spelen met speelkaarten (II)

Citation for published version (APA):
Bruijn, de, N. G. (1963). Meetkunde spelen met speelkaarten (II). *Pythagoras : Wiskundetijdschrift voor Jongeren*, *2*, 116-119.

Document status and date:
Published: 01/01/1963

Document Version:
Publisher's PDF, also known as Version of Record (includes final page, issue and volume numbers)

°°MEETKUNDE SPELEN MET SPEELKAARTEN II

Ingezonden door N. G. de Bruijn te Nuenen (N. Br.).

Gevraagd werd een normaal pak van 52 speelkaarten zó in een rechthoekig schema van 4 rijen en 13 kolommen uit te leggen, dat elk waardenpaar (zoals bijv. 8b) precies in één kolom voorkomt, dat geen enkele waarde twee keer in eenzelfde kolom voorkomt, en zo dat er bij elk kolommenpaar precies één waarde is die in beide kolommen staat. Hier is dan een oplossing:

a	a	a	a	h	h	h	v	v	v	b	b	b
h	10	7	4	10	9	8	10	9	8	10	9	8
v	9	6	3	7	6	5	6	5	7	5	7	6
b	8	5	2	4	3	2	2	4	3	3	2	4
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII

Deze werd als volgt verkregen: De eerste kolom ahvb werd neergeschreven in de gedachte dat er in elk geval vier waarden in moeten staan, en dat het er op dat ogenblik niet toe doet welke dat zijn. Vervolgens moeten er nòg 3 kolommen zijn waar de aas in voorkomt; die drie azen leggen we alvast neer; eenzelfde waarde mag niet twee keer onder de aas liggen, zodat de negen waarden 2 t.e.m. 10 elk één keer aan de beurt komen. Aangezien deze nog niet door ons gebruikt zijn, is het onverschillig hoe ze precies in de kolommen II, III, en IV worden gelegd; we hebben een willekeurige keuze gedaan.
Van de resterende 9 kolommen kunnen we zeggen dat hvb elk drie keer moeten voorkomen, en nooit twee van deze in één kolom (omdat in kolom I al hvb staan). We schrijven dus hhhvvvbbb aan de kop van de 5e t.e.m. 13e kolom.
We gaan vervolgens de negen resterende kaarten 10 9 8 plaatsen. De 10 9 8 komen samen voor in kolom II, dus in elk der kolommen V t.e.m. XIII mag er van deze negen kaarten maar één komen. Dat is dus precies één per kolom. Daar combinaties als h 10 maar één keer mogen optreden kunnen we nu op de 5e t.e.m. 13e plaats in de tweede rij leggen 10 9 8 10 9 8 10 9 8.
Het is nu niet moeilijk meer de hoek rechts onderaan met de resterende achttien kaarten op te vullen zo dat geen waardenpaar in twee kolommen voorkomt. Nu is aan alle eisen voldaan: In de vorige aflevering is uiteengezet dat we niet meer alles behoeven te controleren: we behoeven niet meer na te gaan dat nu ook elk waardenpaar ergens in een kolom voorkomt, en dat er bij elk kolommenpaar precies één waarde is die in beide kolommen ligt. Bijvoorbeeld: gaan we uit van 7b, dan is dat alleen kolom XII; noemen we kolommen III en IX, dan is het alleen de 5 die in beide staat.

Nu de meetkunde: het hele systeem gaat op meetkunde lijken als we maar een meetkundige terminologie invoeren. Laten we afspreken, dat we „punt” zeggen in plaats van „waarde”, en „lijn” in plaats van „kolom”. Als een zekere waarde in een zekere kolom voorkomt zeggen we „het punt ligt op de lijn" of ook wel „de lijn gaat door het punt". Zo ligt punt b op lijn XI en zo gaat lijn V door punt 7. We kunnen nu ook verder gaan: als twee lijnen beide door eenzelfde punt gaan, dan zeggen we dat ze elkaar in dat punt snijden, en dat het punt een snijpunt is van de beide lijnen. En als twee punten op eenzelfde lijn liggen, kunnen we die lijn verbindingslijn van de beide punten noemen. Dank zij de speciale eigenschappen van ons schema kunnen we vaststellen:

(A) *Twee lijnen hebben steeds precies één snijpunt.*

(B) *Twee punten hebben steeds precies één verbindingslijn.*

In de gewone vlakke meetkunde geldt (A) niet, want daar zijn evenwijdige lijnenparen, die dus geen snijpunt hebben. Maar in de projectieve meetkunde, waarover in Pythagoras verschillende malen is gesproken, gelden (A) en (B) wèl.
Onze tafel-vol-speelkaarten heeft belangrijke eigenschappen met die projectieve meetkunde gemeen. Zo gelden bijvoorbeeld de stellingen van *Desargues* en *Pappus*. (Deze stellingen kan men ook in de gewone vlakke meetkunde uitspreken wanneer men zich beperkt tot gevallen waarbij in de figuur geen evenwijdigheden optreden).
De stelling van Desargues luidt: hebben twee driehoeken $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ de eigenschap dat de lijnen A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, door één punt S gaan (ondersteld is dat deze drie lijnen twee aan twee verschillend zijn), dan zullen de punten P, Q, R (resp. snijpunt van de „overeenkomstige zijden" B_1C_1 en B_2C_2, C_1A_1 en C_2A_2, A_1B_1 en A_2B_2) op één lijn l liggen. (Zie bldz. 46 van deze jaargang).

Laten we hiervan maar een geval controleren (dit wordt dus geen echt bewijs, maar een verificatie van één speciaal geval). Neem voor S het punt 9; door S trekken we de lijnen II, VI, XII. Op II nemen we $A_1 = 8$, $A_2 = a$; op VI nemen we $B_1 = 6$, $B_2 = h$; op XII nemen we $C_1 = 7$, $C_2 = 2$. Nu gaan we de zijden van de driehoeken bepalen: B_1C_1 is de verbindingslijn van 6 en 7, dus lijn III, en verder $B_2C_2 =$ VII, $C_1A_1 =$ X, $C_2A_2 =$ IV, $A_1B_1 =$ XIII, $A_2B_2 =$ I. Nu is P het snijpunt van III en VII, dus $P = 5$; Q is het snijpunt van X en IV, dus $Q = 3$; R is het snijpunt van XIII en I, dus $R = b$. De stelling van Desargues spreekt nu uit dat 5, 3 en b op één lijn liggen, en inderdaad, ze liggen op XI.
De lezers zullen er misschien plezier in hebben ook andere toepassingen van dezelfde stelling te controleren.

Nu de stelling van Pappus: We hebben twee lijnen l en m, en zes verschillende punten P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, afwisselend gelegen op l en m.

dus P_1, P_3, P_5 op l en P_2, P_4, P_6 op m. Neem nu het snijpunt Q_1 van P_1P_2 en P_4P_5, het snijpunt Q_2 van P_2P_3 en P_5P_6, en het snijpunt Q_3 van P_3P_4 en P_6P_1. De stelling van Pappus spreekt nu uit dat $Q_1Q_2Q_3$ op één lijn liggen.

Deze stelling van Pappus geldt ook voor ons kaartentafeltje. Neem maar iets in het wilde weg: l = III, m = IX, en daarop P_1 = a, P_3 = 6, P_5 = 7, resp. P_2 = 4, P_4 = v, P_6 = 9 (het is niet verboden om voor één dezer zes punten het snijpunt S van III en IX te kiezen, maar in dat geval wordt de stelling een beetje flauw, omdat dan Q_1, Q_2 en Q_3 niet meer alle verschillend zijn, en dan de mededeling dat ze op één lijn liggen wat kinderachtig is).
Bij de gemaakte keuze is P_1P_2 = IV, P_2P_3 = XIII, P_3P_4 = VIII, P_4P_5 = X, P_5P_6 = = XII, P_6P_1 = II. Dus Q_1 = 3, Q_2 = b, Q_3 = 10, en inderdaad liggen deze op één lijn, nl. XI.

Op grond van (A), (B), Desargues en Pappus zeggen, we dat ons kaartentafeltje een *projectieve meetkunde* is, maar een preciese definitie daarvan zullen we niet geven. Het begrip evenwijdigheid komt hierin niet voor. Maar door een kleine wijziging aan te brengen kunnen we er een z.g. affiene meetkunde uit maken, waarin wél evenwijdige lijnen optreden. Het is alsof de speelkaartenproductie hiermee vanouds rekening heeft gehouden, door vier der 13 waarden een bijzonder karakter te geven, n.l. de „plaatjes" a, h, v, b. We zullen deze niet meer als eigenlijke punten beschouwen; de eigenlijke punten zijn 2, 3, ..., 10. Ook de lijn I danken we af, omdat daar geen enkel eigenlijk punt op ligt. We houden over een systeem met negen punten en twaalf lijnen:

10	7	4	10	9	8	10	9	8	10	9	8
9	6	3	7	6	5	6	5	7	5	7	6
8	5	2	4	3	2	2	4	3	3	2	4
II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII

De lijnen II, III, IV (die vroeger de aas bevatten) zullen we nu evenwijdig noemen (II en III hebben geen snijpunt. omdat we dat juist hebben afgedankt; daarom noemen we ze maar evenwijdig, evenzo met III en IV, en met II en IV). Ook de lijnen V, VI, VII noemen we onderling evenwijdig, en evenzo het stel VIII, IX, X en het stel XI, XII, XIII. Er zijn dus vier „richtingen", die we weer resp. met de letters a, h, v, b. zouden kunnen aanduiden.

Het zal onmiddellijk duidelijk zijn dat ons afdankproces de uitspraken (A) en (B) vervangt door (A′) en (B′):

(A′) Twee lijnen zijn òf evenwijdig òf ze hebben precies één snijpunt; twee lijnen, die elk evenwijdig zijn met een derde, zijn ook onderling evenwijdig.
(B′) Twee punten hebben precies één verbindingslijn; door een punt P buiten de lijn l gaat precies één lijn die evenwijdig is met l.
Maar ook geldt het omgekeerde: als we een schema van drie rijen en negen kolommen hebben dat aan (A′) en (B′) voldoet, dan kunnen we weer „plaatjes" toevoegen zo, dat een systeem ontstaat, dat aan (A) en (B) voldoet.

Op precies dezelfde manier kan men de gewone vlakke meetkunde (die aan (A′) en (B′) voldoet) uitbreiden tot een projectieve meetkunde. De „plaatjes" die we toevoegen zijn de „richtingen", die we nu „oneigenlijke punten" zullen noemen. En we voegen één zg. „oneigenlijke lijn" toe, waar alle plaatjes op liggen. Op die manier ontstaat een systeem dat aan (A) en (B) voldoet. (Zie bldz. 41 van deze jaargang).

°°°*Getallen, die „GROEIEN" of „AFNEMEN"* III

door J. C. van Rhijn te Vollenhove

In de beide voorgaande artikelen (Pyth. jaargang 2 bldz. 21 e.v. en bldz. 43 e.v.) bestudeerden we de getallenrijen met de formules

$$g_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ en } G_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \qquad (n \geqslant 2)$$

We stelden vast, dat de rij g_n monotoon stijgend en de rij G_n monotoon dalend is. Bovendien zagen we dat voor elke $n \geqslant 2$ geldt:

$$2 \leqslant g_n < G_n \leqslant 4.$$

We verwachten nu, dat de beide rijen tot eenzelfde limiet zullen naderen, als we n onbeperkt laten toenemen. Dit is inderdaad het geval. Deze gemeenschappelijke limiet wordt voorgesteld door de letter e. Dat deze gemeenschappelijke limiet bestaat volgt uit:

1. het monotoon stijgen van g_n; (zie bldz. 44 van deze jaargang).
2. het monotoon dalen van G_n; (zie bldz. 45).
3. het naderen tot nul van $G_{n+1} - g_n$.