Pas op voor defectieve matrices

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

COSOR-Memorandum 84-13

Pas op voor defectieve matrices

door

A.J. Bosch

Eindhoven, the Netherlands

november 1984

PAS OP VOOR DEFECTIEVE MATRICES

A.J. Bosch

0. Inleiding

Defectieve matrices zijn vierkante matrices die niet diagonaliseerbaar zijn, d.w.z. niet te schrijven als $B\Lambda B^{-1}$ met Λ een diagonaalmatrix.
Op mondelinge examens is mij gebleken dat veel studenten er nooit van gehoord hadden of geen voorbeeld konden geven van een defectieve matrix.
Dit is vreemd, daar het een essentieel begrip is in de matrixtheorie.
Ook in de literatuur wordt er niet veel aandacht aan besteed.
Deze defectieve matrices geven vaak moeilijkheden. Ik citeer Bellman:
" The fact that diagonalization may not be always available, greatly complicates the study of general matrices - and, in return, adds equally to their interest ".

Zoals we nog in §5 zullen zien, zijn er vele stellingen die wèl gelden voor diagonaliseerbare matrices, maar niet voor defectieve. Men moet steeds op z'n hoede zijn, getuige het volgende:
Kortgeleden moest ik een artikel refereren (niet van een student, maar van een wiskundige). Daar kwam ik het volgende tegen:
" ... Zij A positief semi-definiet en B symmetrisch. Stel de rang van AB is r, dus er zijn r eigenwaarden (.i.c. multipliciteit) ongelijk nul ... ".
Helaas, dat is onjuist als AB defectief is, hetgeen best mogelijk is (zie 5.6).
Vandaar dit artikel.

1.1. Notaties

$A = (a_{ij})$ is een matrix met elementen $a_{ij} = (A)_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

$a_{ij} = (A)_{ij}$ is het element op de i^e rij en j^e kolom .

A^T is de getransponeerde van A d.w.z. $(A^T)_{ij} = a_{ji}$.

x is een kolomvector, x^T de bijbehorende rijvector. Analoog a, b^T ed .

$\bar{A}$ is de complex geconjugeerde van A d.w.z. $(\bar{A})_{ij} = \bar{a}_{ij}$.

$A^* = (\bar{A})^T$ is de hermitisch geconjugeerde van A d.w.z. $(A^*)_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

I is een eenheidsmatrix d.w.z. $(I)_{ij} = 0$ voor $i \neq j$ en $(I)_{ii} = 1$.

0 is een nulmatrix d.w.z. $(0)_{ij} = 0$ voor alle i,j .

Λ is een diagonaalmatrix met op de diagonaal de eigenwaarden $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

sp A is het spoor van A = $\sum a_{ii}$.

$\|A\| = \sqrt{sp(A^*A)}$, is de Euclidische norm van A .

r(A) is de rang van A = aantal onafhankelijke kolommen van A .

N(A) is de nulruimte van A = $\{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = 0\}$.

R(A) is de beeldruimte van A .

$E_\lambda = N(A - \lambda I)$ is de eigenruimte van eigenvectoren (i.c. de 0) van A bij de eigenwaarde λ .

$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$ is de direkte som van E_{λ_1} en E_{λ_2} d.w.z. E_{λ_1}, E_{λ_2} zijn deelruimten van $\mathbb{C}^n$, $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$ en

$$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} = \{u \in C^n \mid \exists u_1 \in E_{\lambda_1}\ \exists u_2 \in E_{\lambda_2} : u = u_1 + u_2\} .$$

$A \simeq F$, A is <u>gelijkvormig</u> met F, d.w.z. er is een <u>reguliere</u> matrix B zodat

$A = B F B^{-1}$.

<u>Opmerking</u>. dit niet verwarren met 2 nauwverwante begrippen:

1) $A \sim F$, A is <u>equivalent</u> met F als er <u>reguliere</u> matrices B_1, B_2 bestaan zodat $A = B_1 F B_2$.

ii) $A \cong F$, A is <u>congruent</u> met F als er een <u>reguliere</u> B bestaat zodat $A = B F B^*$.

De 3 relaties zijn equivalentierelaties.

1.2. Definities

In het vervolg beschouwen we alleen $n \times n$-matrices met elementen uit $\mathbb{C}$ of $\mathbb{R}$.

Een matrix A heet

<u>normaal</u> als $A^*A = AA^*$.

<u>unitair</u> als $A^*A = AA^* = I$. In het vervolg met U aangeduid; $U^* = U^{-1}$.

<u>orthogonaal</u> als A reëel unitair is, dus als $A^TA = AA^T = I$; $A^T = A^{-1}$.

<u>hermitisch</u> als $A^* = A$ (met H aangeduid); <u>antihermitisch</u> als $A^* = -A$.

<u>symmetrisch</u> als A reëel hermitisch is, dus $A^T = A$; <u>scheefsymmetrisch</u> als $A^T = -A$.

<u>idempotent</u> als $A^2 = A$.

<u>nilpotent</u> als $A^k = 0$ voor een $k \in \mathbb{N}$.

<u>diagonaal</u> als $a_{ij} = 0$ voor $i \neq j$.

<u>rechterdriehoeksmatrix</u> als $a_{ij} = 0$ voor $i > j$ en A niet diagonaal, voortaan met D aangeduid .

<u>positief definiet</u> als A hermitisch is èn voor alle $x \neq 0 \in C^n$: $\bar{x}^TAx > 0$.

<u>positief semi-definiet</u> als A hermitisch is èn voor alle $x \in C^n$: $\bar{x}^TAx \geq 0$.

<u>diagonaliseerbaar</u> als $A \simeq \Lambda$, d.w.z. A is gelijkvormig met een diagonaalmatrix Λ. Er bestaat een <u>reguliere</u> B zodat $A = B \Lambda B^{-1}$.

<u>defectief</u> als A <u>niet</u> diagonaliseerbaar is.

Tevens spelen de volgende 2 begrippen in deze theorie een belangrijke rol:

de <u>meetkundige multipliciteit</u> van een eigenwaarde $\lambda_i = \dim E_{\lambda_i} =: n_i$,

de <u>algebraïsche multplicìteit</u> van een eigenwaarde $\lambda_i = m_i$ waarbij m_i gedefinieerd is door:

$$\det(A-\lambda I) = (\lambda_i-\lambda)^{m_i}\, g(\lambda) \text{ met } g(\lambda_i) \neq 0$$

m.a.w. λ_i is een m_i-voudige wortel van de n^e-graads karakteristieke vergelijking in λ : $\det(A - \lambda I) = 0$.

1.3. <u>Enkele hulpstellingen</u>

De eerste vijf bewijzen zijn niet gegeven, daar deze of reeds bekend zijn of zeer eenvoudig zijn.

1.3.1. $sp(AB) = sp(BA)$; $sp(A+B) = sp\,A + sp\,B$; $sp\,A = \Sigma\lambda_i$ (som eigenw.) .

1.3.2. $(AB)^* = B^*A^*$; $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

1.3.3. Als $A \simeq F$ dan is $r(A) = r(F)$; A en F hebben dezelfde eigenwaarden.

1.3.4. Als U_1, U_2 unitair, dan ook U_1U_2.

1.3.5. Is A reëel, d.w.z. $a_{ij} \in \mathbb{R}$, en λ eigenw. van A, dan ook $\bar{\lambda}$ eigenw. van A.

1.3.6. De eigenwaarden van een positief definiete matrix H zijn positief.

<u>Bewijs</u>: Voor $x \neq 0$ geldt dus $\bar{x}^T Hx > 0$. Zij x eigenvector van H bij eigenw. λ. Dan is $\bar{x}^T Hx = \lambda \bar{x}^T x > 0$. Daar $\bar{x}^T x > 0$ is ook $\lambda > 0$.

1.3.7. Is A regulier, dan is A^*A (eveneens AA^*) positief definiet.

Bewijs: $\bar{x}^T A^* Ax = (\overline{Ax})^T(Ax) > 0$ voor $x \neq 0$ (dus $Ax \neq 0$).

1.3.8. Zij H positief definiet. Dan bestaat er een positief definiete B (ook als $H^{\frac{1}{2}}$ aangeduid) zodat $H = B^2$.

Bewijs: $H = U \Lambda U^*$ (zie 4.3) met $\lambda_i > 0$ (volgens 1.3.6)

$H = U \Lambda^{\frac{1}{2}} U^* U \Lambda^{\frac{1}{2}} U^* =: B^2$ met $B := U \Lambda^{\frac{1}{2}} U^*$ weer positief definiet.

1.3.9. $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$ (A,B beide $n \times n$-matrices).

Bewijs: $\|AB\|^2 = \sum_{ij} |(AB)_{ij}|^2 = \sum_{ij} |a_i^T b_j|^2 \leqslant \sum_{ij} |a_i|^2 |b_j|^2$ (Cauchy-Schwarz)

$= \sum_i |a_i|^2 \sum_j |b_j|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2$. Hierin is a_i de i^e rij van A, b_j de j^e kolom van B; $|a_i|^2 = a_i^* a_i$, analoog $|b_j|^2 = b_j^* b_j$.

1.3.10. (Lemma van Schur): Elke $n \times n$-matrix A is te schrijven als $A = UDU^*$ met D rechterdriehoeksmatrix en U unitair.

Bewijs: (met volledige inductie naar n).

i) $n = 2$. Zij $Ax_1 = \lambda x_1$, met $x_1^* x_1 = 1$. Kies $x_2 \perp x_1$ (d.w.z. $x_2^* x_1 = 0$) en $x_2^* x_2 = 1$. Dan is $U := (x_1 x_2)$ inderdaad unitair.

$$U^* A U = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \\ x_2^* \end{pmatrix} A(x_1 x_2) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ \\ 0 & * \end{pmatrix} =: D \text{ een rechterdriehoeksmatrix.}$$

ii) Zij nu A een $(n+1) \times (n+1)$-matrix. Neem $Ax_1 = \lambda x_1$ met $x_1^* x_1 = 1$. Construeer $U_0 := (x_1 \ldots x_n)$ met $x_i^* x_i = 1$ en $x_i^* x_j = 0$ voor $i \neq j$ d.w.z. U_0 is unitair.

$$\text{Dan is } U_0^* A U_0 = \begin{pmatrix} \lambda & * \ldots * \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix} \text{ daar } x_i^* A x_1 = \lambda_1 x_i^* x_1 = 0 .$$

Nu de inductiestap voor B (die van de orde $n \times n$ is): Er is een U_1 en een D_1 zodat $U_1^* B U_1 = D_1$.

Definieer $U_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & U_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$, weer unitair.

Dan wordt $U_0^* A U_0 = U_2 \begin{pmatrix} \lambda & * \dots * \\ 0 & \\ \vdots & D_1 \\ 0 & \end{pmatrix} U_2^* =: U_2 D U_2^*$.

(D is weer rechterdriehoeksmatrix), oftewel

$A = U_0 U_2 D U_2^* U_0^* =: U D U^*$ met $U := U_0 U_2$ (weer unitair volgens 1.3.4).

∎

<u>Opmerking</u>: Daar $A \simeq D$ heeft A dezelfde eigenw. als D (zie 1.3.3) dus $d_{ii} = \lambda_i$ voor alle i.

1.3.11. (Jordan normaalvorm): Elke $n \times n$-matrix A is te schrijven als $A = B D B^{-1}$ waarbij D een bijzondere rechterdriehoeksmatrix is:

$$D := \begin{pmatrix} D_{k_1}(\lambda_1) & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & D_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix} ; \; D_k(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \bigcirc \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda & 1 \\ \bigcirc & & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ een } k \times k\text{-matrix}$$

$$D_1(\lambda) = \lambda; \quad \sum_1^r k_i = n .$$

Evenals in 1.3.10 is $d_{ii} = \lambda_i$.

Voor het bewijs, zie literatuur o.a.: Zurmühl: Matrizen und ihre Anwendungen, deel I. Springerverlag, Berlijn 1984.

2. Hoe kan men nagaan of een matrix defectief is?

Dit kan via de stelling:

A is defectief d.e.s.d. als A een eigenwaarde λ bezit waarvoor geldt:

$n_i < m_i$ oftewel: meetk. multipliciteit < alg. multipliciteit.

Bewijs: Stel A is diagonaliseerbaar: $A = B \Lambda B^{-1}$ oftewel $AB = B\Lambda$;

$A b_i = \lambda_i b_i$. De kolommen van B zijn dus n onafhankelijke eigenvectoren, Λ is de matrix van eigenwaarden. Stel A heeft k verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ met alg. multipl. $m_1, \ldots, m_k$ (dus $\Sigma m_i = n$) en meetk. multipl. resp. $n_1, \ldots, n_k$. Evident is dat $E_{\lambda_i} \cap E_{\lambda_j} = \{0\}$ voor $i \neq j$ (een vector kan niet 2 verschillende eigenw. hebben).

Dus moet $E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k} = \mathbb{C}^n$ oftewel $\sum_1^k n_i = n$, dus $m_i = n_i$ voor alle i.

Om na te gaan of een matrix A defectief is, berekent men de eigenwaarden. Zijn er eigenwaarden met alg. multipliciteit > 1, dan bepaalt men daarbij de eigenruimte èn zijn dimensie. Is voor minstens één eigenwaarde λ_i : $n_i < m_i$ dan is A defectief.

3. Welke matrices zijn defectief en hoe kan men een defectieve matrix construeren?

Het construeren van een diagonaliseerbare matrix A is uiteraard triviaal:

$A = B \Lambda B^{-1}$ met B willekeurig regulier en Λ willekeurig diagonaal.

Maar hoe construeren we een defectieve matrix?

We geven 2 manieren:

3.1. Zij D een rechter (of linker) driehoeksmatrix met $d_{ii} = \lambda$ voor alle i en D niet diagonaal. Deze is defectief.

<u>Bewijs</u>: Nu is $\Lambda = \lambda I$. Stel D is niet defectief d.w.z. $D = B \Lambda B^{-1} = \lambda I$ dus diagonaal. Strijdig oftewel D is defectief. ∎

Omdat wellicht zo'n driehoeksmatrix gemakkelijk te herkennen is (bijv. bij examens) als defectief, kunnen we ook $F D F^{-1}$ beschouwen, die ook defectief is (zie 3.4).

De eenvoudigste defectieve matrix, waaraan men alles kan demonstreren is $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; dim $E_0 = 1$; alg. mult. van $\lambda = 0$ is 2.

3.2. Stel a,b vectoren $\neq 0$ en $b^T a = 0$. Dan is $A = ab^T$ defectief.

<u>Bewijs</u>: $Ax = \lambda x$ geeft $ab^T x = \lambda x$. Is $b^T x = 0$ dan is $\lambda = 0$.

dim $E_0 = n - 1$ nl. E_0 = verzameling vectoren $\perp$ b.

Echter $\mathrm{sp}\,A = \mathrm{sp}(ab^T) = \mathrm{sp}(b^T a) = 0$ (zie 1.3.1) en daar $\mathrm{sp}\,A = \Sigma\,\lambda_i = 0$ zijn er dus n eigenw. 0, dus $n_i < m_i$ oftewel A defectief.

<u>Voorbeeld</u>: Neem $a^T = (1,1)$; $b^T = (1,-1)$ dan is $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ defectief.

$E_0 = \alpha(1,1)$; dim $E_0 = 1$, doch 2 eigenw. 0.

3.3. Er geldt: $A \neq 0$ nilpotent $\Leftrightarrow$ A is defectief en alle eigenwaarden zijn 0.

<u>Bewijs</u>:

i) Stel $A \neq 0$ nilpotent. Dus $A^k = 0$; stel $Ax = \lambda x$; $A^k x = \lambda^k x = 0$; $\lambda = 0$.

Stel A niet defectief: $A = B \Lambda B^{-1} = B\,O\,B^{-1} = 0$ strijdig, dus A defectief.

ii) Stel A is defectief en $\Lambda = 0$. Volgens 1.3.11 is $A = B\,D\,B^{-1}$ met $d_{ii} = \lambda_i = 0$. Daar en een $k \in N$ is zodat $D^k = 0$ (eenvoudig na te gaan), is $A^k = B\,D^k\,B^{-1} = 0$ oftewel A is nilpotent.

3.4. Is $A \simeq F$ en A is defectief, dan ook F, A^T, A^{-1} (mits deze bestaat), $\alpha A + \beta I$ $(\alpha \neq 0)$ defectief.

4. Welke matrices zijn zeker niet defectief?

4.1. Uiteraard zijn matrices met alle eigenwaarden verschillend niet defectief. Dan is nl. $n_i = m_i = 1$ voor alle i.

4.2. Idempotente matrices

$A^2 = A$; Stel $Ax = \lambda x$; $A^2x = \lambda^2 x = \lambda x$ dus $\lambda(\lambda-1)x = 0$; $\lambda = 0$ of 1.

Nu is E_0, de eigenruimte bij $\lambda = 0$, juist $= N(A)$ en E_1, de eigenruimte bij $\lambda = 1$, juist $R(A)$. Dus $E_0 \oplus E_1 = \mathbb{C}^n$. Dus er is een reguliere matrix B bestaande uit eigenvectoren van A zodat $A = B\,\Lambda\,B^{-1}$.

4.3. Normale matrices (i.h.b. unitaire, orthogonale, (anti)-hermitische, (scheef)symmetrische).

Bewijs:

Volgens het Lemma van Schur (1.3.10) is $A = U\,D\,U^*$.

$AA^* = U\,D\,U^*\,U\,D^*\,U = U\,D\,D^*\,U^* \qquad = A^*A = U\,D^*\,D\,U^*$ dus $DD^* = D^*D$.

Dus $\Sigma_k\, d_{1k}\,\bar{d}_{1k} = \bar{d}_{11} d_{11}$ oftewel $d_{1k} = 0$ voor $k > 1$. Eveneens.

$\Sigma\, d_{2k}\,\bar{d}_{2k} = \bar{d}_{22} d_{22}$ geeft $d_{2k} = 0$ voor $k > 2$. Etc., zodat $d_{ik} = 0$ voor $k > i$. Er gold reeds $d_{ik} = 0$ voor $k < i$ dus $D = \Lambda$ (diagonaal) en $A = U\,\Lambda\,U^*$. ∎

<u>Opmerking</u>: Normale matrices zijn dus zelfs <u>unitair</u> diagonaliseerbaar ($A \simeq \Lambda$ èn $A \cong \Lambda$). Het zijn ook de enige.

<u>Gevolg</u>: Is A <u>hermitisch</u> (dus ook normaal), dan geldt:
$A = U\Lambda U^* = A^* = U\Lambda^* U^*$ dus $\Lambda = \Lambda^* = \bar{\Lambda}$ oftewel Λ is <u>reëel</u>.
Is A <u>symmetrisch</u> (reëel hermitisch) dan is $A = B\Lambda B^T$ met Λ reëel diagonaal en B orthogonaal.

4.4. Is $A \simeq F$ en F is diagonaliseerbaar, dan is ook F, A^T, A^{-1} (mits bestaand) , $\alpha A + \beta I$ diagonaliseerbaar.

5. <u>Enkele stellingen die gelden voor diagonaliseerbare matrices, doch niet voor defectieve</u>.

We onderstellen in deze paragraaf steeds dat A diagonaliseerbaar is;
$D := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ is defectief.

5.1. $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$.
<u>Bewijs</u>: $A = B\Lambda B^{-1}$; $A^2 = B\Lambda^2 B^{-1} = 0$ dus $\Lambda^2 = 0$; $\Lambda = 0$ dus $A = 0$.
Tegenvoorbeeld: $D^2 = 0$ doch $D \neq 0$.

5.2. $r(A^k) = r(A) = r(\Lambda) =$ aantal eigenw. (i.c. multipl.) $\neq 0$ voor $k \in \mathbb{N}$.
<u>Bewijs</u>: $A^k = B\Lambda^k B^{-1}$ dus $r(A^k) = r(\Lambda^k)$ (zie 1.3.3) $= r(\Lambda) = r(A)$.
Tegenvoorbeeld: $r(D^2) = 0$ doch $r(D) = 1$.

5.3. A heeft alle eigenw. 0 of 1 $\rightarrow$ A is idempotent.

Bewijs: dus $\Lambda^2 = \Lambda$; $A^2 = B\Lambda^2 B^{-1} = B\Lambda B^{-1} = A$.

Tegenvoorbeeld: D heeft alle eigenw. 0, toch is $D^2 \neq D$, dus D is niet idempotent.

5.4. A heeft $\Lambda = 0 \Rightarrow A = 0$.

Bewijs: $\Lambda = 0$; $A = B\Lambda B^{-1} = 0$.

Tegenvoorbeeld: Voor D geldt ook $\Lambda = 0$, doch $D \neq 0$.

5.5. Als er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat met $A^k = A^{k+1}$, dan is A idempotent.

Bewijs: $A^k = B\Lambda^k B^{-1} = A^{k+1} = B\Lambda^{k+1} B^{-1}$ dus $\Lambda^k = \Lambda^{k+1}$ oftewel $\Lambda = \Lambda^2$.

$A^2 = B\Lambda^2 B^{-1} = B\Lambda B^{-1} = A$.

Tegenvoorbeeld: $D^2 = D^3 = 0$ echter $D^2 \neq D$, dus D is niet idempotent.

5.6. $A \simeq \Lambda$ en Λ reëel $\Leftrightarrow A = H_1H_2$ waarbij H_1 of H_2 positief definiet is.

Bewijs:

i) Stel $A = B\Lambda B^{-1} = BB^* (B^*)^{-1} \Lambda B^{-1} =: H_1H_2$ met $H_1 := BB^*$ positief definiet en $H_2 := (B^*)^{-1} \Lambda B^{-1}$ hermitisch, daar $\Lambda^* = \Lambda$.

ii) Stel H_1 positief definiet, dus $H_1 = BB$ (zie 1.3.8).

$H_1H_2 = BBH_2BB^{-1} = B(BH_2B)B^{-1}$. Nu is BH_2B hermitisch dus met (4.3) = $U\Lambda U^*$, Λ reëel.

Oftewel $H_1H_2 = BU\Lambda U^* B^{-1} := F\Lambda F^{-1}$ oftewel $A \simeq \Lambda$ (Λ reëel)

Opmerking: Stel $A = H_1H_2$ waarbij H_1 slechts positief semi-definiet is, dan kan A defectief zijn.

Voorbeeld: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ is defectief.

5.7. $\exists c \in R, \forall k \in N : \|A^k\| \leqslant c \Leftrightarrow \forall_i |\lambda_i| \leqslant 1.$

<u>Bewijs</u>:

i) Stel $A = B\Lambda B^{-1}$ dus $A^k = B\Lambda^k B^{-1}$; 1.3.9 geeft

$\|\Lambda^k\| = \|B^{-1} A^k B\| \leqslant \|B^{-1}\| c \|B\| = \tilde{c}$ voor alle k

dus $\sum_i |\lambda_i^k|^2 \leqslant \tilde{c}^2$ oftewel $|\lambda_i| \leqslant 1$ voor alle i.

ii) Dus $|\lambda_i| \leqslant 1$ voor alle i oftewel $\|\Lambda^k\| \leqslant \sqrt{n}$ als $A_{n\times n}$.

$\|A^k\| = \|B\Lambda^k B^{-1}\| \leqslant \|B\|\|\Lambda^k\|\|B^{-1}\| \leqslant \sqrt{n}\ \|B\|\|B^{-1}\| = c.$

Tegenvoorbeeld: Neem $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan is $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Toch is $\|D^k\|$ onbegrensd nl. $D^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $\|D^k\|^2 = 2 + k^2$.