Onderwijs in beweging

ONDERWIJS IN BEWEGING

dr. G.R. VELDKAMP

ONDERWIJS IN BEWEGING

Afscheidscollege van prof. dr. G.R. Veldkamp, hoogleraar in de wiskunde aan de Technische Hogeschool Eindhoven op 4 november 1977.

De wiskunde, hooggeachte toehoorders, is de wetenschap die zich bezighoudt met eigenschappen van getallen en meetkundige figuren. Dat haar beoefenaren zich ook wel eens bezondigen aan niet-wetenschappelijke speculaties met getallen, is, dunkt mij, vergeeflijk.

Wanneer men, zoals deze spreker, het levenslicht aanschouwde op de zevende dag van de – naar de Romeinse kalender – zevende maand van het zevende jaar van deze eeuw, wordt – nog steeds volgens dezelfde kalender – de dag waarop het afscheid van het hoogleraarsambt in zicht komt, gekenmerkt door vier zevens. Getaltheoretisch gezien een mooie afsluiting mompelen de wiskundigen onder U; want die vier zevens leveren te zamen achtentwintig op en dat is een volmaakt getal, het tweede in een rij die met zes aanvangt en waarvan tot op heden niet bekend is of zij eindig dan wel oneindig is en evenmin of er ook oneven getallen zijn die een plaats in de rij mogen opeisen. Vandaag laten wij deze vragen voor wat ze zijn: onopgelost. Het is immers wel duidelijk dat het anders met dit afscheidscollege een totaal ongewenste kant op zou gaan: het zou reeds bij de geboorte bezwijken aan een overdosis wiskunde. Dit moet in elk geval worden vermeden.

De spreker keert dan ook, lichtelijk geschrokken door de snelheid waarmee argeloos spel in wetenschap kan verkeren, op zijn schreden terug en zet het kinderlijke spel met het getal zeven nog even voort. Als volgende stap vertrouwt hij U toe dat hij tweemaal zeven jaren aan deze hogeschool was verbonden, woont in een service-flat met zeven woonlagen en zevenenzeventig wooneenheden en, wat voor het vervolg van meer relevantie is, dat hij op de leeftijd van tweemaal zeven jaar zijn eerste benoeming in overheidsdienst ontving.

Bottema stelde al eens in een speelse bui vast dat er iets is met het getal zeven [1]. Toegegeven zij dat hij zijn uitspraak staafde met heel wat verhevener voorbeelden dan de zeer persoonlijke relaties met dit getal die U hier worden onthuld. Persoonlijk, inderdaad, maar toch.... Er zijn er die het leven zien als een kansspel, liefst met gelijke kansen voor iedereen. Welnu, settebello, gelukkige zeven, is een Italiaans kaartspel met ruitenzeven als winnende kaart. Anderen daarentegen verkiezen het leven op te vatten als een reis. Ook zij komen door tussenkomst van het getal zeven aan hun trekken. Immers, de Settebello, de fraaie Zeven, is ook de naam van een luxueuze, vanouds zevendelige trein die U in luttele uren van Milaan naar Rome voert en die tegenwoordig als trein nr. 69 geïntegreerd is in het net van de TEE. [2]

Waarde toehoorders, de snelle cijferaars onder U zullen zich intussen niet hebben laten misleiden door dit onwetenschappelijk gekeuvel.

Zij hebben al lang gemerkt dat, mocht er dan misschien iets zijn met het getal zeven, er toch ongetwijfeld ook iets aan de hand is met de spreker. Want het klinkt, zacht gezegd, ongeloofwaardig wanneer een zeventigjarige beweert dat hij zesenvijftig jaar in overheidsdienst heeft doorgebracht. Ik haast mij dan ook, deze bewering, naar goed wiskundig gebruik, van een bewijs te voorzien door uit de eerste benoeming te citeren:

„De ondergetekende, directeur der Rijkskweekschool voor onderwijzers te Groningen, heeft het genoegen, u mee te deelen, dat gij, bij beschikking van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken, op de u bekende voorwaarden benoemd zijt tot kweekeling aan genoemde school.

De opening van den cursus is bepaald op Maandag den 2 Mei e.k., waarom hij u op dien datum te 11 uur verwacht in het gebouw der kweekschool, waar u de noodige mededeelingen zullen worden gedaan".

Een ministeriële beslissing – ge weet het allen – wordt niet lichtvaardig genomen, tegenwoordig niet vanwege de vele inspraakprocedures, toentertijd niet wegens het ontbreken daarvan. Het is derhalve duidelijk dat aan de benoeming een en ander vooraf was gegaan. Een sollicitatie misschien? Inderdaad; en wel in de vorm van een admissie-examen.

Wat bewoog veertienjarige kereltjes uit dorpjes op de Drentse hei, de Friese greiden of de Groninger klei tot het afleggen van zulk een examen? Een veel gemakkelijker weg was immers aanmelding als leerling van een HBS. Hadden zij soms geen inspraak? Laten we er iets nader op ingaan. Aan enkele voorwaarden moest zijn voldaan. Allereerst was nodig dat ze op de lagere school getoond hadden te beschikken over een iets meer dan middelmatige aanleg en lust tot leren. Een leerling die hieraan voldeed en wiens vader arts, dominee, notaris of een andere dorpsnotabele was, schiep geen enkel probleem. Het hoofd van de school nam stilzwijgend aan dat zulke ouders voor hun kind een universitaire studie of op zijn minst een middelbare opleiding op het oog hadden. Hij kon dan ook volstaan met het uitbrengen van een advies terzake. Doch soms was er dan nog een pientere leerling uit een veel eenvoudiger milieu die hij graag verder zou zien studeren, maar waarvan hij slechts al te goed wist dat het gezinsbudget te krap was om een HBS-opleiding te bekostigen. Want, ook al ontbraken in de tijd waarover ik nu spreek oudercommissies en had men van ouderavonden geen weet, een goed schoolhoofd kende de omstandigheden in de gezinnen waaruit zijn leerlingen voortkwamen op zijn duimpje. Een verdere hinderpaal was soms ook de geringe bereidheid van zulke ouders om hun zoon verder te laten leren. De jongen kon immers meewerken in vaders zaak of bedrijf en zo tot een hogere sport op de maatschappelijke ladder geraken dan zijn ouders. Zo'n gang van zaken was tenminste te overzien en controleerbaar, terwijl verder leren meer geleek op het reiken naar een wereld die hun vreemd was en waarvan de onbestemde dreiging uitging dat ze het contact met hun kind zouden verliezen. Het was dan ook vaak niet eenvoudig voor het hoofd van de school of de klasse-onderwijzer vader en moeder zover te krijgen dat ze zich erbij neerlegden dat hun zoon verder zou gaan studeren. Als de jongen het dan zelf graag wilde – en dat was altijd wel het geval – ja, dan moest meester maar zeggen, hoe hij zich een en ander voorstelde. Maar meester moest er wel om denken dat er voor een dure zaak als studeren geen geld was.

En dan komt meester met zijn voorstel. In de stad is een school die Jan in vier jaar kan opleiden tot onderwijzer. Die heet de Rijkskweekschool en meester is daar zelf ook op geweest. Wanneer je daar eenmaal als leerling bent aangenomen, heb je alles voor niets: schoolgeld behoeft niet te worden betaald, alle studieboeken worden gratis verstrekt en Jan wordt in een vertrouwd kosthuis geplaatst dat door het Rijk wordt betaald. Alleen kleding en wat zakgeld komen ten laste van de ouders.

Eén barrière moest worden overwonnen: om dit alles deelachtig te worden, moest Jan slagen voor het toelatingsexamen. Dat was niet gemakkelijk, maar meester dacht dat Jan het met zijn hulp wel aan zou kunnen. En die hulp werd graag verleend, soms tegen een kleine vergoeding, vaker nog: belangeloos. Het resultaat is, dat Jan, onder leiding van de meester, hard aan het leren gaat. Tussendoor helpt hij soms wat in zaak of bedrijf. Vader vertoont bij vlagen nog wel eens wat ongerustheid: zou het allemaal goed gaan, zou al dat geleer geen verloren moeite blijken te zijn, zou Jan wel goed terechtkomen? Maar wanneer zijn zoon er voor de zoveelste maal weer eens niet in slaagt de enige koe die het bedrijf rijk is schoon uit te melken, zegt hij toch: „Meester har geliek, gao ie mor leern mien jong". De spreker trof deze Jan later aan als rector van een lyceum in Den Haag. En zo kwam dan voor onze Jan de dag waarop hij in jongenskiel en korte broek naar de stad toog (tien tegen een was het zijn eerste treinreis) om te trachten zich een plaatsje op de kweekschool te veroveren.

Geachte aanwezigen, over enige ogenblikken zult U het waarschijnlijk wel met mij eens zijn dat er morgen in de Kamer vragen zouden worden gesteld wanneer Uw veertienjarigen vandaag werd aangedaan wat Jan op het punt stond te verduren. Ik verzoek U evenwel niet toe te geven aan zachtere gevoelens die bij U op mochten komen. Bedenk, dat Jan goed voorbereid was en dat de meester hem terdege had ingescherpt zijn huid zo duur mogelijk te verkopen. Want van de 120 tot 180 gegadigden konden er slechts ten hoogste 24 worden geplaatst.

De eerste examendag is wel te dragen: alle adspiranten ondergaan een nauwgezette medische keuring door de arts-leraar van de school. Het rooster voor de tweede dag vermeldt: om acht uur dictee, een schetsje, naamvallen, alles achtereen en voor elk onderdeel een half uur; dan een kwartier pauze en vervolgens een half uur parafrase en achterhalf uur sommen. Hiervan een uur uitblazen en daarna een uur om een opstel te componeren over een opgegeven onderwerp. Jan mag nu een half uurtje bijkomen; moet dan weer aantreden voor schoonschrijven en kaartschetsen, beide een half uur. Het is nu drie uur en ons ventje mag naar huis. Hij heeft niet veel meer te koop en geen wonder. Hij heeft een korte schets moeten produceren naar aanleiding van de spreekwijze: God heeft de wereldlijke zaken met gal en honigsap doorkneed, een flink opstel overgelegd over het onderwerp: Een winter zonder ijs, en passant de woorden: lenigen, weifelen, onbezorgd (bijv. naamw.), zorgeloos (bijv. naamw.), inbreuk en opspraak in ferme (sic) zinnen moeten gebruiken en een vijftal breinbrekers van de volgende soort beredeneerd (dat is: zonder algebra) moeten oplossen.

„Een breuk heeft de waarde $\frac{13}{18}$. Was de noemer 3 meer, dan zou de waarde $\frac{2}{3}$ zijn. Beredeneer, welke breuk dat moet zijn.

Een voetganger gaat om 7 uur met een snelheid van 5 K.M. per uur van P naar Q. Om 10 uur gaat een fietsrijder met een snelheid van 15 K.M. per uur van Q naar P. Als ze elkaar juist op het midden van den weg ontmoeten, hoe laat is de voetganger dan in Q?".

En voordat hij de trein mocht opzoeken, heeft hij uit het hoofd nog even een kaartje moeten tekenen van het stroomgebied van de Maas met zijrivieren.

Om misverstand te voorkomen even het volgende. Het is niet moeilijk, een zwaar examen samen te stellen om daarna met de beoordeling van het geleverde werk de hand te lichten teneinde tot een aanvaardbare uitslag te komen. Dit kaartje van de drie noordelijke provinciën met alle grenzen, waterwegen en de voornaamste plaatsen is het resultaat van het onderdeel kaartschetsen van een veertienjarige knaap. Het geeft onder meer blijk van een angstaanjagend visueel geheugen. Dat dit werkstukje niet het predicaat „uitmuntend" kreeg, bewijst wel dat de beoordeling niet mild was.

Alle betrokkenen gingen nu enige dagen van spanning tegemoet. Zou Jan bij de ongeveer veertig uitverkorenen behoren met wie het examen, zoals dat heette, werd voortgezet? Het lukte: er kwam een dienstbrief met een oproep voor het mondeling examen. Dat duurde nog eens twee-en-een-halve dag. De halve dag was gewijd aan kunst en creativiteit: zang en tekenen. De overige twee dagen waren voor beide partijen, examinatoren en examinandi, zwaar. Voor de leraar-examinator toch begon nu het meest subtiele deel van zijn werk, het deel dat grote tact, veel geduld en scherpe waarneming eiste. Zijn opdracht was het, de laatste selectie uit te voeren. Uit het hout dat bij een eerste onderzoek worm- en oestvrij was bevonden, moest nu het kleine partijtje krimpvrij meubelhout worden afgezonderd dat het Rijk ter bewerking kon worden aangeboden. En dat alles zonder steun van psychotechnische gegevens en hulpmiddelen. Degenen onder U die beroepshalve als examinatoren optreden, weten welk een moeilijke opgave dat moet zijn geweest. Raadpleging van het school-archief en naam- en adreslijsten van oud-leerlingen toont, dat desondanks deze onderwijsmannen van ruim een halve eeuw geleden met hun, in onze ogen primitieve, methoden zelden de plank missloegen. De examinandi hadden het niet minder zwaar. Deze kereltjes moesten zichzelf voortdurend bij de kraag grijpen om in een hun vreemde en imponerende omgeving overeind te blijven onder een kruisvuur van vragen dat door twee deftige, ongeëvenaard geleerde heren op hen werd afgegeven. Gelukkig beschikten deze heren over een vrijwel volmaakte examentechniek. Zij namen telkens twee knaapjes tegelijk onder het mes en, met vragen die ons thans nogal bizar voorkomen, haalden zij uit hun slachtoffers vaak meer dan erin was gestampt. In een curieus boekje, in de wandeling bekend onder de naam De Examenidioot, zijn veel van deze vragen bijeengebracht. Dank zij enig speurwerk van dr. J.J.M. Bakker, lector voor toegepaste taalkunde aan deze hogeschool, heb ik de volledige titel te Uwen gerieve in de lijst van literatuur kunnen opnemen [3]. Mocht ge het ooit in handen krijgen, bedenk dan dat Theo Thijssen hiermee niet zijn vroegere leermeesters een hak heeft willen zetten, doch het integendeel bedoelde als een aanval op datgene wat navolgers van juist iets te klein formaat in hun onbegrip van het systeem van de „meesters" hadden gemaakt Het zou nu goedkoop zijn, hilariteit te verwekken door U een aantal van zulke vragen voor te leggen en dit wil ik U dan ook niet aandoen Wel wil ik U nog deelgenoot maken van het feit dat ik vele jaren later ervoer dat het examensysteem van 2 tegen 2 ook werd toegepast door een U allen bekend oud-hoogleraar voor Theoretische Mechanica aan de T H. te Delft. Ik gevoelde me daar dan ook onmiddellijk thuis.

Geachte aanwezigen, ik zal Uw geduld niet te zeer op de proef stellen. Jan slaagde en kreeg de benoeming waaruit ik reeds citeerde. Eenmaal op de school, kwam hij onder een streng, doch strikt rechtvaardig regiem te staan. Van maandag tot en met vrijdag acht lesuren per dag, soms zelfs negen; op zaterdag afwisselend vijf en zeven; geen baaldagen. Even een citaat uit het reglement:
„Als de jongelui geen lessen hebben, moeten ze zich in den regel op hun kamer bevinden. Na 7 uur des avonds moeten ze te huis zijn. . . . . Het vierde studiejaar mag het gehele jaar door 's avonds tussen 8 en 9 een korten tijd gaan wandelen; wordt van deze vrijheid misbruik gemaakt, dan wordt het verlof onmiddellijk ingetrokken".
Jan sloeg zich er zonder klagen doorheen. Trouwens, al zou hij geklaagd hebben, geen inderhaast door Bezorgde Ouders opgericht comité, noch enige vakbond zou in het geweer zijn gekomen. Hij haalde dan ook pas het nieuws – één regel in de regionale pers – toen hij na 4 jaar voor het onderwijzersexamen slaagde. Met de verworven onderwijsbevoegdheid kon hij zijn brood verdienen, voorlopig nog met niet al te ruim beleg, want van een bruto aanvangssalaris van f 104 per maand kon men ook in die tijd al geen dolle sprongen maken. Doch verdere studie kon hem vooruit brengen. Er waren kansen genoeg. Alleen voor de toegang tot de universiteit lag een barrière in de vorm van een staatsexamen. Wij zullen Jan niet verder volgen; hij moet het nu zelf maar zien te rooien.
Uit de zojuist vermelde strakheid van het regiem mag niet worden afgeleid dat het onderwijs achterlijk of star was. Overigens liep dit voor de verschillende vakken nogal uiteen. In de voor de onderwijzer bij uitstek belangrijke vakken als paedagogiek, didactiek en methodiek was het bepaald vooruitstrevend. De toen moderne temperamentenleer van Heymans, verzinnebeeld door de bekende kubus, werd geestdriftig besproken en naarstig bestudeerd. Het eerste psychologisch laboratorium in Nederland was, kort voor Jan zijn leertijd aanving, geopend en te zamen met zijn klasgenoten onderwierp hij zich

enthousiast aan de destijds gangbare psychotechnische tests zoals die van Binet en Ebbinghaus. Nut en doel hiervan werden tevoren op voortreffelijke wijze uiteengezet door leerlingen van Heymans. U ziet het, men wist ook toen al van motivatie en zelfs wanneer en in welke dosis dit middel moest worden toegediend. Een geheel ander aspect was, dat een halve eeuw geleden aan de Rijkskweekscholen – aanvankelijk niet zonder aarzeling – de eerste schreden werden gezet op het pad der coëducatie: er zouden voortaan onderwijzers en onderwijzeressen worden opgeleid. De huidige rijks-paedagogische academies zijn er uit voortgekomen en zo is de onderwijzersopleiding van de sector Lager Onderwijs in die van het Hoger Onderwijs overgegaan.

Deze summiere aanduidingen hebben slechts tot doel, U te doen beseffen, dat er ook reeds zo'n halve eeuw geleden beweging zat in het onderwijs. Zo behoort het immers: in goed onderwijs moet beweging zitten; indien mogelijk: *beheerste beweging.* Want het is niet zo dat onderwijs vol van beweging noodzakelijkerwijs goed is. Ge kunt dit laatste veilig van deze spreker aannemen, want hij heeft jaren achtereen een flinke portie beweging in zijn onderwijs verwerkt, zulks om de prozaïsche reden dat hij onderwijs in beweging gaf. Immers hij doceerde kinematica, bewegingsleer. Dit is het onderdeel van de mechanica dat gewijd is aan de studie van bewegingen zonder te letten op de oorzaken waardoor die bewegingen ontstaan. De kinematica is zodoende één van de bouwstenen voor de leer van de mechanismen, een gebied dat, ruim afgebakend, vrijwel de gehele werktuigkunde omvat. Zij kan dienst verlenen aan wie inzicht wenst in de beweging van bestaande mechanismen, doch evenzeer te hulp komen bij het ontwerpen van mechanismen die een voorgeschreven taak moeten vervullen. Naast handreiking bij deze analyse en synthese, is zij ook geschikt om de werktuigbouwkundige ervan te weerhouden aan zijn ontwerpen onmogelijk te vervullen eisen te stellen. Hiermee is, zeer globaal, de traditionele rol van de kinematica in de technische wetenschappen weergegeven. Per definitie heeft echter elk voorwerp dat bewegen kan kinematische aspecten en er is ook buiten de techniek geen gebrek aan beweging. Dit impliceert dat er voor de kinematica stellig nog vele niet of nauwelijks geëxploreerde terreinen zijn aan te wijzen. Ruim een jaar geleden werd aan de Stanford University in Californië een tweedaagse bijeenkomst gehouden met als doel: het belichten van de noodzaak tot kinematisch onderzoek en handreiking in gebieden van wetenschap waar zulks tevoren nog slechts sporadisch had plaatsgevonden. Hoewel in het thans verschenen verslag van deze bijeenkomst uitdrukkelijk wordt vermeld dat niet getracht is een volledige opsomming van al deze gebieden te geven, krijgt men bij het doorbladeren toch een goede indruk van de grote omvang van het terrein dat nog op bewerking ligt te wachten [4]. Er kan natuurlijk geen sprake van zijn, hier in dit college diep op in te gaan. Ik doe daarom een keuze en beperk mij tot een paar oppervlakkige opmerkingen over één enkel aspect waarvan ik hoop dat het U allen aanspreekt. Het betreft de beweging van het menselijk lichaam, op zichzelf weer een onderdeel van wat biomechanica wordt genoemd.

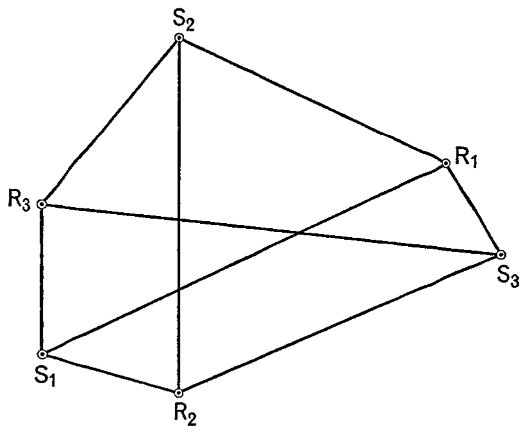
Ons skelet is geen star geheel, de delen kunnen ten opzichte van elkaar bewegen: de voet ten opzichte van het onderbeen, dit weer ten opzichte van het bovenbeen en het laatste ten opzichte van de romp. Voor de bovenste ledematen geldt iets soortgelijks. Deze relatieve bewegingen worden mogelijk gemaakt door gewrichten waarvan wij er een groot aantal bezitten. De medische wetenschap is geïnteresseerd in de vraag, hoe in een gewricht de beide aldaar samenkomende skeletdelen precies ten opzichte van elkaar bewegen. Theoretisch is nauwkeurig bekend hoe beweging van twee starre lichamen A en B ten opzichte van elkaar plaatsvindt. Beschouwen we de beweging van B ten opzichte van A – hetgeen neerkomt op de veronderstelling dat A in rust is – dan is de beweging van B op elk tijdstip een schroeving. Dit betekent dat op een fotografische momentopname, waarop ook de snelheden staan geregistreerd, het volgende te zien is. Elk punt van B heeft een snelheid die opgebouwd is uit twee componenten die loodrecht op elkaar staan. De ene is evenwijdig met een zekere rechte lijn s en is voor alle punten dezelfde, terwijl de andere recht evenredig is met de afstand van het punt tot s en loodrecht op die afstand staat. Het eerste bestanddeel heet de translatiesnelheid van de beweging, terwijl het tweede de rotatiesnelheid van het beschouwde punt wordt genoemd. De lijn s heet de momentele schroefas. Zij wisselt met de tijd en brengt zodoende in B zowel als in A een oppervlak voort. Dat in B heet de bewegende en dat in A de rustende axode. Weet men, hoe die beide axoden er precies uitzien, dan beheerst men, ietwat populair gezegd, de beweging. Bij de beweging die door het kniegewricht mogelijk wordt gemaakt, behoort de ene axode tot het boven-, de andere tot het onderbeen. Zou men nu de exacte vorm van beide oppervlakken kennen, dan ligt daarmee de mogelijkheid open voor het vervaardigen van knieprothesen die – althans wat betreft de relatieve beweging van boven- en onderbeen – de natuur zeer nabij komen. Om de gedaante van beide oppervlakken te bepalen, zou men gaarne beschikken over de ligging van de momentele schroefas op elk tijdstip van de beweging. De theorie leert dat men deze as kan vinden uit de snelheden van drie niet op één rechte lijn gelegen punten. Men moet dus in elk geval aan levende individuen metingen uitvoeren ter verkrijging van de nodige gegevens. Het kan allemaal, maar vereist toch het uitdenken van een meestal ingewikkelde apparatuur. Het geval van het kniegewricht is overigens nog niet eens zo erg gecompliceerd, want er bestaat, om het eens modern te zeggen, een soort modale knie. Dit is voor een groot deel te danken aan het feit dat de relatieve beweging van boven- en onderbeen bij goede benadering plaatsvindt in één vlak [5]. Zo eenvoudig is het niet altijd. Om dit te demonstreren, introduceer ik even een figuur uit de medische wereld waarmee onze bevolking tegenwoordig van jongsaf kennismaakt: de tandarts. Hij heeft te maken met boven- en onderkaak die door tussenkomst van het kaakgewricht beweeglijk zijn verbonden. Ieder van U weet dat bij het kauwen de kaken niet alleen op en neer gaan, maar ook heen en weer. Ook deze ingewikkelde beweging die in haar details veel sterker aan het individu gebonden is dan die van het eerste voorbeeld, is onderwerp van uitvoerige studie. Ook hier probeert men met alle middelen die de moderne fotografie, de optica en de elektronica kunnen verschaffen, gegevens over de axoden te verzamelen.

Waarde toehoorders, ik hoop door deze twee voorbeelden voldoende te hebben toegelicht dat de hand- en spandiensten van de kinematica op het gebied van de biomechanica erop gericht zijn, van analyse te geraken tot synthese. En zo is het eigenlijk steeds, wanneer haar hulp wordt ingeroepen.

Er doen zich echter soms gevallen voor die ogenschijnlijk met beweging niets van doen hebben, maar waarbij toch, zeer onverwacht, de kinematica om de hoek komt gluren. Een recent voorbeeld hiervan wil ik U niet onthouden, maar ik moet daarbij wel enige inspanningvan U vragen.

Stel U voor een star lichaam in de vorm van een vlakke plaat die zich vrij in zijn vlak kan bewegen. Wanneer we eens voor al in dit vlak een rechthoekig assenstelsel kiezen, kunnen we de positie van het lichaam door drie onderling onafhankelijke getallen vastleggen. Namelijk: de beide coördinaten van een punt van het lichaam en de hoek die een lijn in het lichaam maakt met een coördinaat-as. Men zegt daarom dat het lichaam drie graden van vrijheid heeft en het bezit van juist drie graden van vrijheid garandeert kennelijk ook de starheid.

Veronderstel nu dat er in het vlak n zulke lichamen liggen die zich alle vrij kunnen verplaatsen. Dan heeft dit stelsel $3n$ graden van vrijheid. We gaan nu twee van deze lichamen verbinden door een scharnier waarvan de as loodrecht op het vlak staat. De beide punten die door het scharnier bijeengehouden worden, hebben nu, wat er ook gebeurt, steeds gelijke coördinaten. Anders gezegd: als men de beide coördinaten van het ene punt weet, liggen die van het andere vast. Er zijn dus twee graden van vrijheid verloren gegaan: elk scharnier absorbeert twee graden van vrijheid. Zijn er s scharnieren dan blijven dus nog $3n - 2s$ graden van vrijheid over. Ik pas dit bij wijze van controle even toe op een vlakke vierhoek gevormd door vier staven die in de hoekpunten scharnierend zijn verbonden. Het aantal graden van vrijheid is $3 \times 4 - 2 \times 4 = 4$; het ding is dus niet star, de delen kunnen ten opzichte van elkaar bewegen. Maar neem nu in plaats van deze vierhoek eens de vlakke stangenzeshoek $S_1R_2S_3R_1S_2R_3S_1$ waarin ook nog de diagonaalstaven S_1R_1, S_2R_2 en S_3R_3 zijn aangebracht. Elk hoekpunt is scharnier



voor drie staven en moet dan ook voor twee gewone scharnieren worden geteld. Voor s moeten we dus 12 invullen en voor n het getal 9. Het aantal graden van vrijheid is derhalve $27-24=3$. De constructie is dus star: relatieve beweging is uitgesloten. Maar nu blijkt er in dit geval iets wonderlijks aan de hand te zijn. Wanneer de scharnierpunten op één kegelsnede liggen, kunnen de onderdelen een ietsje ten opzichte van elkaar bewegen. Er is een mooie vakterm voor doch die bespaar ik U. Ge moet U maar voorstellen dat de zaak wel stevig in elkaar zit, doch dat er rillingen overheen kunnen gaan. Wat ik U hier vertel, is in de kinematica en de statica al bijna een eeuw bekend. Wie de ontdekking voor het eerst deed, is niet achterhaald. Er is echter meer. Wanneer de scharnierpunten op een speciale manier over een bijzonder soort kegelsneden zijn verdeeld, zijn er zelfs vloeiende relatieve bewegingen mogelijk. Hoe de scharnierpunten dan moeten zijn gerangschikt zou te ver voeren. Wel kan U zeggen dat de bedoelde kegelsnede dan òf een cirkel moet zijn òf moet bestaan uit twee onderling loodrechte lijnen. De ontdekker is ditmaal wèl bekend: A.C. Dixon vond het in 1899 [6].

Na deze inleiding kom ik tot het beloofde voorbeeld. Wanneer van een groot terrein, bijvoorbeeld een gemeente, een kadasterkaart moet worden gemaakt, overdekt men dit terrein, dat U eenvoudigheidshalve vlak mag veronderstellen, met een netwerk van driehoeken. Een driehoek is volkomen bepaald door één zijde en twee aanliggende hoeken. Door één afstand en alle in het net voorkomende hoeken te meten, is het dus geheel bepaald. Aan de hoekmeting kleven echter fouten. Daartegenover staat dat men tegenwoordig door gebruik van elektronische hulpmiddelen afstanden ontstellend nauwkeurig kan meten, vele malen nauwkeuriger dan hoeken. Moderne methoden van landmeetkunde vermijden dan ook hoekmetingen en bepalen alleen afstanden. Een fundamenteel probleem is nu het volgende. In het platte vlak liggen twee puntverzamelingen. De eerste bestaat uit p punten $S_1, \ldots, S_p$ die we *standpunten* zullen noemen. De tweede bevat q punten $R_1, \ldots, R_q$; we zullen ze *richtpunten* noemen. Ze zijn zo gekozen dat alle pq afstanden van telkens een standpunt tot een richtpunt kunnen worden gemeten. De vraag is nu, of men uit deze pq gegevens de onderlinge ligging van de $p+q$ punten kan vinden. De kwestie is in het bijzonder van belang, wanneer het niet mogelijk is, de afstanden van de standpunten onderling rechtstreeks te meten. Wanneer we in het vlak een rechthoekig assenstelsel kiezen, wordt dus eigenlijk gevraagd de coördinaten van de standpunten en van de richtpunten te bepalen uit pq betrekkingen tussen die coördinaten. Er zijn dan $2p + 2q$ onbekenden. Dit aantal wordt met drie verminderd als we de oorsprong van ons stelsel in S_1 leggen en één van de coördinaatassen door S_2 laten gaan. We mogen verwachten dat het vraagstuk kan worden opgelost wanneer het aantal vergelijkingen even groot is als het aantal onbekenden, dus als $pq = 2p + 2q - 3$. Dit komt neer op: $(p-2)(q-2) = 1$. Dan zijn p en q beide gelijk aan 3. Verdere uitwerking toont, dat de 9 onbekende coördinaten inderdaad zijn te vinden, zij het niet eenduidig. Met behulp van de topografische kaart is de meerduidigheid vaak wel te elimineren. Het resultaat is dus dat de onderlinge ligging van de zes punten bepaald is door de 9 gemeten afstanden. Maar nu komt er een kleine verrassing. Wanneer we de negen gemeten afstanden materialiseren door staven die in de stand- en richtpunten scharnierend zijn verbonden, hebben we de figuur op blz. 12 voor ons. Wat we over de beweeglijkheid van deze stangenfiguur hebben gezegd, leidt voor het landmeetkundig probleem tot de volgende conclusies. Wanneer S_1 ligt op de kegelsnede door de overige 5 punten, treedt een gevaarlijk geval op. Dan leiden kleine numerieke fouten tot een oncontroleerbare onzekerheid in de oplossing. Bevinden zich de punten in één van de Dixonliggingen dan is het vraagstuk zelfs onbepaald [7]. Het aardige is, dat de beschouwingen tot punten op een boloppervlak of in de ruimte kunnen worden uitgebreid. Leerden wij eertijds bij behandeling van het klassieke probleem van Snellius uit de landmeetkunde van het bestaan van een gevaarlijke cirkel, bij de thans beschreven moderne methode treedt ons een gevaarlijke kegelsnede tegemoet. In deze zin is er dus geen nieuws onder de zon.

Waarde toehoorders, het verslag van de werkbijeenkomst te Stanford bevat niet alleen aansporingen voor de kinematica tot dienstverlening. Het wijst er ook op dat het belangrijk is, de kinematica als zelfstandige discipline verder te ontwikkelen. Dit geschiedt mijns inziens geheel terecht. Alsof ik er voor deze gelegenheid speciaal om verzocht had, is mijn inzicht eergisteren op fraaie wijze gesteund, toen aan de T.H. te Delft een voortreffelijk proefschrift over kinematische en dynamische analyse van mechanismen werd verdedigd [8]. Ik beschouw het maar als een afscheidsgeschenk en zal het ijverig bestuderen. Intussen is mij al duidelijk geworden dat de schrijver de gepresenteerde theorie in hoofdzaak op vlakke bewegingen toepast. Ik wil echter gaarne nog even met U in de ruimte vertoeven en ik hoop dat de jonge doctor het mij niet euvel zal duiden wanneer ik zijn werk voor het ogenblik terzijde leg. Want speciaal in de ruimtelijke kinematica zijn nog heel wat vragen die op een antwoord wachten. Ook daarvan wil ik U een voorbeeld geven. Een star lichaam dat zich vrij in de ruimte kan bewegen, heeft zes graden van vrijheid. Dit kan op een soortgelijke manier worden bewezen als het feit dat een star lichaam waarvan de beweging tot een vlak beperkt is, drie graden van vrijheid bezit. Wanneer nu twee starre lichamen door een lijnscharnier – en daarmee bedoel ik een scharnier zoals aan een deur of een raam zit – worden verbonden, kunnen zij ten opzichte van elkaar alleen draaien om de scharnieras in een vlak loodrecht op deze as. Er zijn dus 5 graden van vrijheid verloren gegaan. Stel U thans voor dat we uit *n* starre staven een scheve *n*-hoek vormen, dat is een *n*-hoek waarvan niet alle hoekpunten in één vlak liggen. In de hoekpunten brengen we lijnscharnieren aan; de as van elk scharnier nemen we loodrecht op de beide staven die erdoor worden verbonden. Van de 6*n* graden van vrijheid absorberen de scharnieren er 5*n*. Er blijven er dus *n* over en dat is precies zoveel als er hoekpunten zijn. Een scheve vierhoek heeft dus 4 graden van vrijheid. Aangezien 6 graden van vrijheid karakteristiek is voor starheid, is de scheve vierhoek overdreven star, halsstarrig zou men kunnen zeggen. En nu laat ik U raden welke scheve veelhoek de eerste is die relatieve beweging toelaat. Ja zeker, U raadt het al: het is de *scheve zevenhoek*. Wanneer van zo'n zevenhoek A B C D E F G A de staaf AB onwrikbaar wordt vastgezet en BC over een zekere hoek *x* wordt gedraaid, zal AG over een door de constructie bepaalde hoek *y* draaien. De theoretische kinematica stelt nu de vraag: wat is het functionele verband tussen *x* en *y*? Tot en met vandaag heeft dit probleem aan elke poging tot oplossing weerstand geboden.

Zeer geachte toehoorders, ge zult dunkt mij al wel voor Uzelf hebben vastgesteld dat dit college thans zijn einde nadert. Immers, de kring is in meer dan één zin gesloten. Het getal zeven is weer opgedoken en we worden, evenals in de aanvang, geconfronteerd met een onopgelost probleem. Een trits van zevens is hiermee voltooid: naast een gelukkige Zeven en een fraaie Zeven manifesteert zich een weerbarstige Zeven.

Dames en heren, ik dank U voor Uw aanwezigheid op dit uur en voor de aandacht waarmee ge mij hebt aangehoord.

LITERATUUR

1. BOTTEMA, O., Afscheid van een stand van zaken.
(Afscheidscollege gehouden op 4 juni 1971, T.H. Delft).
2. Nederlandse Spoorwegen, Spoorboekje buitenland (25 sept.' 77-27 mei' 78) blz. 186.
3. De Examenidioot, of De Kinderexamens van 1928.
(Overdruk uit: De Bode, Orgaan van den Bond van Nederlandsche Onderwijzers). Amsterdam(1929), Bondsdrukkerij De Volharding, Warmoesstraat 35.
4. Workshop on New Directions for Kinematics Research, held at Stanford University, Aug. 2 and 3, 1976. Proceedings of the National Science Foundation.
5. FREUDENSTEIN, F. and WOO, L.S., Kinematics of the human knee joint. Bull. Math.Biophy., Vol. 31, pp. 215 - 232, 1969.
6. DIXON, A.C., On certain deformable frameworks.
Mess.Math., **29** (1899/1900) pp. 1 -21.
7. WUNDERLICH, W., On deformable nine-bar linkages with six triple joints,Indag. Math., **38**, No. 3, pp. 257 - 262 (1976).
8. WERFF, K. v.d., Kinematic and dynamic analysis of mechanisms, a finite element approach, Delft University Press, 1977.