Benadering van de kroonwielflank met behulp van regeloppervlakken in kroonwieloverbrengingen met grote overbrengverhouding

EINDHOVEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Department of Mathematics and Computing Science

Memorandum COSOR 90-24

Benadering van de kroonwielflank met behulp van regeloppervlakken in kroonwieloverbrengingen met grote overbrengverhouding

D.A. Overdijk

Eindhoven University of Technology
Department of Mathematics and Computing Science
P.O. Box 513
5600 MB Eindhoven
The Netherlands

Eindhoven, July 1990
The Netherlands

Benadering van de kroonwielflank met behulp van regeloppervlakken in kroonwieloverbrengingen met grote overbrengverhouding

D.A. Overdijk
Eindhoven University of Technology
P.O. Box 513
5600 MB Eindhoven
The Netherlands

Benadering van de kroonwielflank met behulp van regeloppervlakken in kroonwieloverbrengingen met grote overbrengverhouding

0. Inleiding

In [2] zijn voor gegeven waarde van de overbrengverhouding U drie regeloppervlakken geconstrueerd, welke de tandflank op de tanden van het kroonwiel in de daar beschouwde kroonwieloverbrenging benaderen. De nauwkeurigheid waarmee een regeloppervlak de kroonwielflank benadert, wordt als volgt gemeten. Laat Q een punt op de tandflank van het kroonwiel zijn. De rechte door Q evenwijdig aan de kroonwielas snijdt het regeloppervlak in het punt Q'. Definieer nu

$$(0.1) \qquad \varepsilon(Q) = QQ'/r_b \quad ,$$

waarin r_b de straal is van de basiscirkel van de cirkelevolvente corresponderend met de tandflanken op de tanden van het rondsel. De functie ε op de kroonwielflank is een maat voor de nauwkeurigheid waarmee het regeloppervlak de kroonwielflank benadert.

Zoals uiteengezet in (3.1) in [2] wordt de kroonwielflank geparametriseerd met behulp van twee dimensieloze parameters α en α_1. De coördinaten van een punt Q op de kroonwielflank ten opzichte van het coördinatenstelsel in figuur 1.1 in [2], zijn overeenkomstig (3.1) in [2] functies van α, α_1 en U. De functie ε in (0.1) is derhalve te schrijven als een functie van de grootheden α, α_1 en U, zeg $\varepsilon = \varepsilon(\alpha,\ \alpha_1;\ U)$. We zeggen dat een regeloppervlak de kroonwielflank voor grote waarden van de overbrengverhouding U goed benadert, indien

$$(0.2) \qquad \lim_{U\to\infty} \varepsilon(\alpha,\ \alpha_1;\ U) = 0 \quad ,$$

voor alle waarden van de parameters α en α_1.

De drie regeloppervlakken welke in [2] zijn geconstrueerd, worden daar aangeduid met respectievelijk R_a, R_b en R_c. In dit rapport wordt aangetoond dat het regeloppervlak R_a de kroonwielflank voor grote waarden van de overbrengverhouding goed benadert, en dat de regeloppervlakken R_b en R_c de kroonwielflank voor grote waarden van de overbrengverhouding niet goed benaderen. De theorie wordt door middel van tabellen geïllustreerd.

1. Het regeloppervlak R_a

In paragraaf 3 in [2] is een parametervoorstelling gegeven van de kroonwielflank welke samenwerkt met de rondselflank AB in figuur 2.1 in [2]. Deze parametervoorstelling is betrokken op het ruimtevaste xyz-coördinatenstelsel zoals getekend in figuur 1.1 in [2]. Overeenkomstig (3.1) in [2] zijn de coördinaten $(x,\ y,\ z)$ van het punt $Q(\alpha,\ \alpha_1)$ op de kroonwielflank te schrijven als

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} x &= U r_b \cos(\psi - k\phi)/(\cos(\alpha)\cos(\psi)) \ , \\ y &= U r_b \sin(\psi - k\phi)/(\cos(\alpha)\cos(\psi)) \ , \\ z &= -r_b \cos(\alpha_1 - \alpha)/\cos(\alpha_1) \ , \end{aligned}$$

waarin

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(\alpha,\ \alpha_1) = \tan(\alpha_1) - \alpha \ , \\ \psi &= \psi(\alpha,\ \alpha_1) = \arctan(k \cos^2(\alpha)(\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha))) \ , \\ k &= 1/U \ . \end{aligned}$$

In paragraaf 6 in [2] is een regeloppervlak R_a beschreven, dat de kroonwielflank benadert. Het oppervlak R_a gaat door de rolkromme op de kroonwielflank. In (6.3) in [2] is de volgende parametervoorstelling, met parameters ξ en γ, van het regeloppervlak R_a te vinden:

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} x &= U r_b \cos(\xi - k\ \mathrm{inv}(\gamma))/(\cos(\gamma)\cos(\xi)) \ , \\ y &= U r_b \sin(\xi - k\ \mathrm{inv}(\gamma))/(\cos(\gamma)\cos(\xi)) \ , \\ z &= -r_b/\cos(\gamma) + U r_b \tan(\xi)/\sin(\gamma) \ . \end{aligned}$$

We onderzoeken nu de nauwkeurigheid waarmee het regeloppervlak R_a de kroonwielflank benadert. Laat $Q(\alpha,\ \alpha_1)$ een punt op de kroonwielflank zijn met coördinaten (1.1). De rechte door Q evenwijdig aan de kroonwielas snijdt het regeloppervlak R_a in het punt Q'. Aangezien de z-as en de kroonwielas samenvallen, geldt

$$(1.3)\qquad x(Q) = x(Q'),\ y(Q) = y(Q') \ .$$

Uit (1.1) en (1.2) concluderen we, dat de parameterwaarden ξ en γ corresponderend met Q' op R_a voldoen aan

$$(1.4)\qquad \begin{aligned} \xi - k\ \mathrm{inv}(\gamma) &= \psi - k\phi \ , \\ \cos(\gamma)\cos(\xi) &= \cos(\alpha)\cos(\psi) \ . \end{aligned}$$

De vergelijkingen (1.4) bepalen ξ en γ corresponderend met Q' als functies van α, α_1 en k, zeg

$$\text{(1.5)} \qquad \begin{aligned} \xi &= \xi(\alpha,\ \alpha_1;\ k) \ , \\ \gamma &= \gamma(\alpha,\ \alpha_1;\ k) \ . \end{aligned}$$

We fixeren het punt Q op de kroonwielflank, dat wil zeggen de parameters α en α_1 zijn vast. Uit (1.4) volgt

$$\text{(1.6)} \qquad \gamma = \alpha(1 + \mathcal{O}(k^2)), \quad k \downarrow 0 \ .$$

Voor een definitie van het Bachmann-Landau $\mathcal{O}$-symbool wordt verwezen naar [1]. Substitutie van (1.6) in de eerste vergelijking in (1.4) levert

$$\text{(1.7)} \qquad \xi = -k \sin^2(\alpha)(\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha))(1 + \mathcal{O}(k^2)), \quad k \downarrow 0 \ .$$

Na substitutie van (1.6) en (1.7) in de derde vergelijking in (1.2) wordt voor de z-coördinaat $z(Q')$ van Q' gevonden

$$\text{(1.8)} \qquad z(Q') = -r_b \cos(\alpha_1 - \alpha)/\cos(\alpha_1)(1 + \mathcal{O}(k^2)), \quad k \downarrow 0 \ .$$

De nauwkeurigheid waarmee het regeloppervlak R_a de kroonwielflank in het punt Q benadert, wordt overeenkomstig (0.1) beschreven door

$$\text{(1.9)} \qquad \varepsilon(Q) = (z(Q) - z(Q'))/r_b \ .$$

Op grond van (1.1) en (1.8) geldt

$$\text{(1.10)} \qquad \varepsilon = \mathcal{O}(k^2), \quad k \downarrow 0 \ .$$

Uit (1.10) concluderen we dat het regeloppervlak R_a de kroonwielflank goed benadert voor grote waarden van de overbrengverhouding $U = 1/k$; vergelijk (0.2).

Tabel 1.1 geeft de waarde $\varepsilon(Q)$ corresponderend met het regeloppervlak R_a voor verschillende waarden van α, α_1 en de waarden 3, 10, 30, 100 van de overbrengverhouding U.

α	α_1	$U = 3$	$U = 10$	$U = 30$	$U = 100$
3.0	3.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3.0	12.0	ondersneden	-0.0001130	-0.0000142	-0.0000012
3.0	21.0	ondersneden	-0.0006867	-0.0001202	-0.0000113
3.0	30.0	ondersneden	ondersneden	-0.0004394	-0.0000450
12.0	3.0	0.0003132	0.0000286	0.0000031	0.0000002
12.0	12.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12.0	21.0	-0.0003339	-0.0000346	-0.0000039	-0.0000003
12.0	30.0	-0.0021861	-0.0003227	-0.0000373	-0.0000033
21.0	3.0	0.0011103	0.0001038	0.0000116	0.0000010
21.0	12.0	0.0001602	0.0000143	0.0000016	0.0000001
21.0	21.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
21.0	30.0	-0.0002148	-0.0000205	-0.0000023	-0.0000001
30.0	3.0	0.0011839	0.0001193	0.0000134	0.0000013
30.0	12.0	0.0004261	0.0000402	0.0000044	0.0000005
30.0	21.0	0.0000663	0.0000060	0.0000007	0.0000000
30.0	30.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

Tabel 1.1.

2. Het regeloppervlak R_b

In paragraaf 6 in [2] is een regeloppervlak R_b beschreven, dat de kroonwielflank benadert. Het oppervlak R_b gaat door de rolkromme op de kroonwielflank. Laat $Q(\alpha,\ \alpha_1)$ een punt op de kroonwielflank zijn met coördinaten (1.1). De rechte door Q evenwijdig aan de kroonwielas snijdt R_b in het punt Q'. Aangezien de z- as en de kroonwielas samenvallen, geldt

$$(2.1) \qquad x(Q) = x(Q'),\ y(Q) = y(Q') \ .$$

De nauwkeurigheid waarmee het regeloppervlak R_b de kroonwielflank in Q benadert, wordt overeenkomstig (0.1) beschreven door

$$(2.2) \qquad \varepsilon(Q) = (z(Q) - z(Q'))/r_b \ .$$

Tabel 2.1 geeft de waarde $\varepsilon(Q)$ voor verschillende waarden van α, α_1 en de waarden 3, 10, 30, 100 van de overbrengverhouding U.

α	α_1	$U = 3$	$U = 10$	$U = 30$	$U = 100$
3.0	3.0	-0.0000000	-0.0000000	-0.0000000	-0.0000000
3.0	12.0	ondersneden	-0.0021841	-0.0022713	-0.0022813
3.0	21.0	ondersneden	-0.0058809	-0.0065980	-0.0066813
3.0	30.0	ondersneden	ondersneden	-0.0121798	-0.0124843
12.0	3.0	0.0371539	0.0366487	0.0366045	0.0365995
12.0	12.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000000
12.0	21.0	-0.0032867	-0.0035017	-0.0035203	-0.0035223
12.0	30.0	-0.0113695	-0.0140428	-0.0142785	-0.0143052
21.0	3.0	0.1424464	0.1406983	0.1405448	0.1405274
21.0	12.0	0.0305271	0.0298686	0.0298105	0.0298039
21.0	21.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000001
21.0	30.0	-0.0037294	-0.0038290	-0.0038375	-0.0038383
30.0	3.0	0.3129790	0.3097857	0.3095043	0.3094722
30.0	12.0	0.1521427	0.1503231	0.1501629	0.1501447
30.0	21.0	0.0211146	0.0205611	0.0205125	0.0205070
30.0	30.0	-0.0000001	-0.0000001	-0.0000000	0.0000001

Tabel 2.1.

Tabel 2.1 doet vermoeden, dat het regeloppervlak R_b de kroonwielflank niet goed benadert voor grote waarden van de overbrengverhouding. Het is de auteur tot nu toe niet gelukt dit te bewijzen.

3. Het regeloppervlak R_c

In paragraaf 7 in [2] is een regeloppervlak R_c beschreven, dat de kroonwielflank benadert. Het oppervlak R_c gaat door het punt $Q(\alpha_r,\ \alpha_r)$ op de rolkromme op de kroonwielflank. De hoek α_r wordt in [2] aangeduid als de referentiedrukhoek van R_c op de rolas. De parametervoorstelling (7.4) in [2] van R_c is eenvoudig om te werken tot de volgende parametervoorstelling, met parameters ξ en γ, van R_c

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} x &= Ur_b \cos(\xi - k\ \mathrm{inv}(\alpha_r))/(\cos(\gamma)\cos(\xi)) \ , \\ y &= Ur_b \sin(\xi - k\ \mathrm{inv}(\alpha_r))/(\cos(\gamma)\cos(\xi)) \ , \\ z &= -r_b/\cos(\gamma) + Ur_b \tan(\xi)/\sin(\gamma) \ . \end{aligned}$$

De referentiedrukhoek α_r op de rolas is een te kiezen constante. Bij de berekeningen in tabel 3.1 is genomen $\alpha_r = 20$ graden.

We onderzoeken nu de nauwkeurigheid waarmee het regeloppervlak R_c de kroonwielflank benadert. Laat $Q(\alpha,\ \alpha_1)$ een punt op de kroonwielflank zijn met coördinaten (1.1). De rechte door Q evenwijdig aan de kroonwielas snijdt R_c in het punt Q'. Aangezien de z-as en de kroonwielas samenvallen, geldt

$$(3.2)\qquad x(Q) = x(Q'),\ y(Q) = y(Q') \ .$$

Uit (1.1) en (3.1) concluderen we, dat de parameters ξ en γ corresponderend met Q' op R_c voldoen aan

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} \xi &= \psi - k\phi + k\ \mathrm{inv}(\alpha_r) \ , \\ \cos(\gamma)\cos(\xi) &= \cos(\alpha)\cos(\psi) \ . \end{aligned}$$

Dus

$$(3.4)\qquad \begin{aligned} U \tan(\xi) &= -\sin(\alpha)\cos(\alpha_1 - \alpha)/\cos(\alpha_1) + \alpha + \mathrm{inv}(\alpha_r) + \mathcal{O}(k^2),\ k \downarrow 0 \ , \\ \gamma &= \alpha + \mathcal{O}(k^2),\ k \downarrow 0 \ . \end{aligned}$$

Substitutie van de formules (3.4) in de derde vergelijking van (3.1) leidt tot de volgende uitdrukking voor de z-coördinaat $z(Q')$ van Q'

$$(3.5)\qquad z(Q') = -r_b/\cos(\alpha) + z(Q) + r_b(\alpha + \mathrm{inv}(\alpha_r))/\sin(\alpha) + \mathcal{O}(k^2),\ k \downarrow 0 \ .$$

De nauwkeurigheid waarmee het regeloppervlak R_c de kroonwielflank in het punt Q benadert, wordt overeenkomstig (0.1) beschreven door

$$(3.6)\qquad \varepsilon(Q) = (z(Q) - z(Q'))/r_b \ .$$

Op grond van (3.5) geldt

(3.7) $\qquad \varepsilon(Q) = 1/\cos(\alpha) - (\alpha + \mathrm{inv}(\alpha_r))/\sin(\alpha) + \mathcal{O}(k^2),\ k \downarrow 0$,

en derhalve

(3.8) $\qquad \lim_{U\to\infty} \varepsilon(\alpha,\ \alpha_1;\ U) = 1/\cos(\alpha) - (\alpha + \mathrm{inv}(\alpha_r))/\sin(\alpha)$.

Uit (3.8) concluderen we dat het regeloppervlak R_c de kroonwielflank niet goed benadert voor grote waarden van de overbrengverhouding $U = 1/k$; vergelijk (0.2).

Tabel 3.1 geeft de waarde $\varepsilon(Q)$ corresponderend met het regeloppervlak R_c voor verschillende waarden van α, α_1 en de waarden 3, 10, 30, 100 van de overbrengverhouding U. De limietwaarde (3.8) is in de laatste kolom afgedrukt. Voor de referentiedrukhoek α_r op de rolas is gekozen $\alpha_r = 20$ graden.

α	α_1	$U = 3$	$U = 10$	$U = 30$	$U = 100$	limiet =
3.0	3.0	-0.2851581	-0.2839830	-0.2838804	-0.2838688	-0.2838676
3.0	12.0	ondersneden	-0.2716219	-0.2824259	-0.2837370	-0.2838676
3.0	21.0	ondersneden	-0.2403744	-0.2778654	-0.2833116	-0.2838676
3.0	30.0	ondersneden	ondersneden	-0.2696330	-0.2824942	-0.2838676
12.0	3.0	-0.0535567	-0.0564040	-0.0566616	-0.0566910	-0.0566939
12.0	12.0	-0.0567118	-0.0566955	-0.0566941	-0.0566940	-0.0566939
12.0	21.0	-0.0537507	-0.0564240	-0.0566639	-0.0566912	-0.0566939
12.0	30.0	-0.0455246	-0.0556521	-0.0565778	-0.0566835	-0.0566939
21.0	3.0	0.0125233	0.0073336	0.0068683	0.0068153	0.0068101
21.0	12.0	0.0082155	0.0069369	0.0068242	0.0068113	0.0068101
21.0	21.0	0.0068097	0.0068100	0.0068101	0.0068101	0.0068101
21.0	30.0	0.0081677	0.0069317	0.0068236	0.0068113	0.0068101
30.0	3.0	0.0868526	0.0785323	0.0777875	0.0777026	0.0776942
30.0	12.0	0.0820265	0.0780861	0.0777378	0.0776981	0.0776942
30.0	21.0	0.0788791	0.0778009	0.0777061	0.0776953	0.0776942
30.0	30.0	0.0776213	0.0776877	0.0776935	0.0776942	0.0776942

Tabel 3.1

Referenties

[1] N.G. de Bruijn: Asymptotic methods in analysis, Noordhoff, Groningen, 1958.

[2] D.A. Overdijk: Meetkundige aspecten van de productie van kroonwielen, Memorandum COSOR 90-02, T.U. Eindhoven, 1990.

EINDHOVEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Department of Mathematics and Computing Science
PROBABILITY THEORY, STATISTICS, OPERATIONS RESEARCH AND SYSTEMS THEORY
P.O. Box 513
5600 MB Eindhoven - The Netherlands
Secretariate: Dommelbuilding 0.03
Telephone: 040 - 47 3130

List of COSOR-memoranda - 1990

Number	Month	Author	Title
M 90-01	January	I.J.B.F. Adan J. Wessels W.H.M. Zijm	Analysis of the asymmetric shortest queue problem Part 1: Theoretical analysis
M 90-02	January	D.A. Overdijk	Meetkundige aspecten van de productie van kroonwielen
M 90-03	February	I.J.B.F. Adan J. Wessels W.H.M. Zijm	Analysis of the assymmetric shortest queue problem Part II: Numerical analysis
M 90-04	March	P. van der Laan L.R. Verdooren	Statistical selection procedures for selecting the best variety
M 90-05	March	W.H.M. Zijm E.H.L.B. Nelissen	Scheduling a flexible machining centre
M 90-06	March	G. Schuller W.H.M. Zijm	The design of mechanizations: reliability, efficiency and flexibility
M 90-07	March	W.H.M. Zijm	Capacity analysis of automatic transport systems in an assembly factory
M 90-08	March	G.J. v. Houtum W.H.M. Zijm	Computational procedures for stochastic multi-echelon production systems

Number	Month	Author	Title
M 90-09	March	P.J.M. van Laarhoven W.H.M. Zijm	Production preparation and numerical control in PCB assembly
M 90-10	March	F.A.W. Wester J. Wijngaard W.H.M. Zijm	A hierarchical planning system versus a schedule oriented planning system
M 90-11	April	A. Dekkers	Local Area Networks
M 90-12	April	P. v.d. Laan	On subset selection from Logistic populations
M 90-13	April	P. v.d. Laan	De Van Dantzig Prijs
M 90-14	June	P. v.d. Laan	Beslissen met statistische selectiemethoden
M 90-15	June	F.W. Steutel	Some recent characterizations of the exponential and geometric distributions
M 90-16	June	J. van Geldrop C. Withagen	Existence of general equilibria in infinite horizon economies with exhaustible resources. (the continuous time case)
M 90-17	June	P.C. Schuur	Simulated annealing as a tool to obtain new results in plane geometry
M 90-18	July	F.W. Steutel	Applications of probability in analysis
M 90-19	July	I.J.B.F. Adan J. Wessels W.H.M. Zijm	Analysis of the symmetric shortest queue problem
M 90-20	July	I.J.B.F. Adan J. Wessels W.H.M. Zijm	Analysis of the asymmetric shortest queue problem with threshold jockeying
M 90-21	July	K. van Harn F.W. Steutel	On a characterization of the exponential distribution
M 90-22	July	A. Dekkers J. van der Wal	Performance analysis of a volume shadowing model

Number	Month	Author	Title
M 90-23	July	A. Dekkers J. van der Wal	Mean value analysis of priority stations without preemption
M 90-24	July	D.A. Overdijk	Benadering van de kroonwielflank met behulp van regeloppervlakken in kroonwieloverbrengingen met grote overbrengverhouding