

NORMAL STRENGTH CONCRETE IN MULTIAXIAL COMPRESSION
A 3D CONSTITUTIVE MODEL
(INCLUDING ULTIMATE FAILURE BEHAVIOR)

FINITE ELEMENTE UND IHRE ANWENDUNG AUF PHYSIKALISCH UND GEOMETRISCH NICHTLI- NEARE PROBLEME

Report TUE-BCO 01.05
Technische Universiteit Eindhoven, Niederlande

Dipl.-Ing. Steffen Zimmermann
März 2001

VORWORT

Bei der Entwicklung von Stoffgesetzen werden heute Finite Elemente Programme eingesetzt. Finite Elemente Algorithmen sollten sich weitgehend neutral gegenüber der gewählten Stoffgesetzformulierung verhalten. Werden die Ergebnisse der numerischen Experimente durch das eingesetzte Programm beeinflusst, können die Ursachen für ein Fehlverhalten der Simulationen nur schwer ermittelt werden.

In diesem Bericht wird die Methode der Finiten Elemente hinsichtlich der Anwendung auf physikalisch und geometrisch nicht-lineare Probleme erörtert. Es werden grundlegende Methoden diskutiert, deren Leistungsfähigkeit beurteilt und die an das Programm zu stellenden Anforderungen dargelegt.

Eindhoven im März 2001

Steffen Zimmermann

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einleitung	1
2	Finite Elemente in der nicht-linearen Festkörpermechanik	1
2.1	Numerische Integration von mechanischen Systemen	2
2.1.1	Explizite Integration	3
2.1.2	Implizite Integration	4
2.2	Numerische Stabilität, Konvergenz	6
2.2.1	Numerische Stabilität	6
2.2.2	Konvergenz	7
2.3	Leistungsfähigkeit der Integrationsmethoden	9
3	Berechnung eines diskontinuierlichen Systems als kontinuierliches System: Werkstoff Beton	12
4	Auswahlkriterien	13
5	Literaturverzeichnis	14

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen

BEZEICHNUNGEN

Lateinische Buchstaben

c	Wellengeschwindigkeit
h	Seitenlänge eines Finiten Elements
t	Zeit
E	Elastizitätsmodul
D	Dämpfungsmatrix
F	Vektor der äußeren Kräfte
I	Vektor der inneren Kräfte
K	Tangentensteifigkeitsmatrix
M	Massenmatrix
U	Vektor der Verschiebungen/Verzerrungen
U	Verformungsenergie
W	Arbeit der äußeren Kräfte

Griechische Buchstaben

ρ	Dichte
ξ	Konstante

Indizes

lim	grenz-
mat	Material

Bezeichnungen

1 EINLEITUNG

Die konstitutiven Gleichungen, die das mechanische Verhalten eines Werkstoffes festlegen, sind Differentialgleichungen mit Rand- und Anfangsbedingungen, die in der Regel numerisch integriert werden müssen. Zur Lösung solcher nicht-linearer algebraischer Probleme stehen eine Fülle numerischer Integrationsverfahren zur Verfügung. Gemäss der zeitlichen Diskretisierung können diese in explizit über die Zeit (differentielle Formulierung) und in implizit über die Zeit integrierende (Variations-Formulierung) Verfahren eingeteilt werden. Eine solche Unterscheidung gewinnt im Besonderen bei der Anwendung der Finiten Elemente Methode auf geometrisch und physikalisch nicht-lineare Probleme an Bedeutung. Aus der Sichtweise des Anwenders unterscheiden sich explizite und implizite Methoden in den folgenden Merkmalen:

- Explizite Methoden benötigen sehr kleine Zeitinkremente. Die Grösse der Zeitschritte hängt nur von der höchsten Eigenfrequenz des Systems ab. Die Simulationen können je nach Problem bis zu einer Million und mehr Inkremente erfordern. Der Rechenaufwand pro Inkrement ist gering [Hib/Kar/Sor98], [Bat90].
- Implizite Methoden erfordern aufgrund des Lösungsalgorithmus grundsätzlich keine Beschränkung der Zeitintervallgröße. Sie wird durch die angestrebte Genauigkeit und die Konvergenzbedingungen festgelegt. Gewöhnlich werden wesentlich weniger Inkremente eingesetzt als es explizite Simulationen erfordern. Während eines Zeitschrittes muss jedoch wiederholt ein globales Gleichungssystem gelöst werden, so dass der numerische Aufwand pro Inkrement deutlich höher ist als bei expliziten Methoden [Hib/Kar/Sor98], [Bat90].

Entscheidende Kriterien zur Beurteilung numerischer Integrationsverfahren sind das Konvergenzverhalten und die damit verbundene numerische Stabilität, weswegen zu späterem Zeitpunkt auf diese Begriffe eingegangen wird.

2 FINITE ELEMENTE IN DER NICHT-LINEAREN FESTKÖRPERMECHANIK

Kann man voraussetzen, dass sich der Werkstoff linear-elastisch verhält, die Verschiebungen infinitesimal klein sind und die Randbedingungen sich im Laufe der Belastung der Finiten Elemente Gruppierung nicht ändern, ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen zu:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \tag{2.1}$$

Diese Gleichungen entsprechen einer linearen Strukturberechnung, weil die Verschiebungsantwort \mathbf{U} eine lineare Funktion des Vektors der wirkenden Lasten \mathbf{F} ist. Wird anstatt des Lastvektors \mathbf{F} der Vektor $\xi\mathbf{F}$, wobei ξ eine Konstante ist, auf das System aufgebracht, werden die Ver-

schiebungen ξU hervorgerufen. Trifft dies nicht zu, muss die Berechnung nicht-linear durchgeführt werden.

Die lineare Antwort einer Struktur beruht auf den Annahmen, die in die Gleichgewichtsbedingungen eingegangen sind. Die Voraussetzung, dass die Verschiebungen klein sein müssen, ist in der Auswertung der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und in den Lastvektor \mathbf{F} eingegangen, weil dabei alle Integrationen über das Volumen der unverformten Finiten Elemente ausgeführt worden sind. Die Annahme eines linear-elastischen Materials ist enthalten in der Verwendung einer konstanten Spannungsverzerrungsmatrix (sie wird üblicherweise mit \mathbf{C} bezeichnet). Schliesslich spiegelt sich die Annahme unveränderlicher Randbedingungen in der Verwendung konstanter Zwangsbedingungen wieder, denen die Lösung zu unterwerfen ist. Nicht-lineare Verhältnisse bedeuten entweder:

- nicht-lineares Materialgesetz, aber geometrische Linearität,
- grosse Verschiebungen, grosse Drehungen, aber kleine Verzerrungen ($\varepsilon < 0,04$), oder
- grosse Verschiebungen, grosse Drehungen und grosse Verzerrungen.

Das Grundproblem nicht-linearer Berechnungen ist die Ermittlung des Gleichgewichtszustandes des verrückten deformierten Körpers, der den auf ihn einwirkenden Lasten entspricht. Will man das Gleichgewicht eines Systems in der augenblicklichen Geometrie ausdrücken, müssen zuvor alle Nichtlinearitäten in Betracht gezogen worden sein. Dies bedeutet, dass man nicht in einem Rechenschritt zur Lösung gelangen kann. Das Gleichgewicht zwischen äusseren (\mathbf{F}) und inneren Kräften (\mathbf{I}) muss während der ganzen Lastgeschichte erfüllt sein. Folglich ist das Problem von der Zeit t abhängig und man kann für das Gleichgewicht schreiben:

$$\mathbf{F}^t - \mathbf{I}^t = 0 \tag{2.2}$$

In kinetischen und statischen Berechnungen mit Zeiteffekten des Werkstoffes ist die Zeit t eine wirkliche Variable, die in die Modellierung der aktuellen physikalischen Situation mit einbezogen werden muss. Einige statische nicht-lineare Analysen lassen zu, dass die Gleichgewichtskonfiguration zu einer bestimmten Zeit t berechnet werden kann, ohne dass auch andere Konfigurationen berechnet werden müssen. Treten pfadabhängige, geometrische oder physikalische Nichtlinearitäten auf, sind die Gleichgewichtsbedingungen für den gesamten Zeitbereich zu lösen. Die Antwort wird zweckmässig Schritt für Schritt in einem Inkrementalverfahren ermittelt, da sich die Materialsteifigkeit mit steigender Belastung kontinuierlich ändert. Zu diesem Zweck können entweder explizit oder implizit integrierende Algorithmen eingesetzt werden [Bat90].

2.1 Numerische Integration von mechanischen Systemen

Betrachtet man ein statisches Problem als Sonderfall eines dynamischen, kann man für die kinetische Antwort eines Systems schreiben:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \tag{2.3}$$

wobei \mathbf{M} , \mathbf{D} bzw. \mathbf{K} die Massen-, Dämpfungs-, bzw. Steifigkeitsmatrix, \mathbf{F} der Vektor der äußeren Lasten und $\ddot{\mathbf{U}}$, $\dot{\mathbf{U}}$ bzw. \mathbf{U} der Beschleunigungs-, Geschwindigkeits- bzw. der Verschiebungsvektor sind.

Die Entscheidung für eine statische oder kinetische bzw. dynamische Berechnung, d.h. für die Berücksichtigung oder Vernachlässigung von beschleunigungs- und geschwindigkeitsabhängigen Kräften wird im Allgemeinen durch den aufzubringenden Rechenaufwand festgelegt. Bathe [Bat90] weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass in geometrisch nicht-linearen Berechnungen die vereinfachende Annahme, Trägheits- und Dämpfungskräfte zu vernachlässigen, so gravierende Folgen haben kann, dass es unmöglich wird, eine Lösung zu erhalten. Die Annahme statischer Verhältnisse ist also sehr genau zu überprüfen.

2.1.1 Explizite Integration

Der in nicht-linearen Berechnungen am häufigsten benutzte explizite Zeitintegrationsalgorithmus ist der zentrale Differenzenoperator. Das kinetische Gleichgewicht wird zur Zeit t betrachtet, um Verschiebungen zur Zeit $t + \Delta t$ zu ermitteln. Bei Vernachlässigung der Dämpfungsmatrix \mathbf{D} wird für jede diskrete Zeitschrittlösung von den Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^t = \mathbf{F}^t - \mathbf{I}^t \quad (2.4)$$

ausgegangen. $\mathbf{I}^t = \mathbf{K}\mathbf{U}^t$ ist dabei der Vektor der auf die Knoten wirkenden inneren Kräfte zur Zeit t . Die Lösung für die Knotenpunktverschiebungen zur Zeit $t + \Delta t$ erhält man, indem $\ddot{\mathbf{U}}^t$ in Gleichung 2.4 durch die zentrale Differenzennäherung nach Gleichung 2.5 für die Beschleunigungen aller Elemente $i = 1, 2, \dots, n$ ersetzt wird:

$$\ddot{\mathbf{U}}^t = \frac{d\dot{\mathbf{U}}^t}{dt} = \frac{d^2\mathbf{U}}{(dt)^2} = \frac{\mathbf{U}^{t-\Delta t} - 2\mathbf{U}^t + \mathbf{U}^{t+\Delta t}}{(\Delta t)^2} = \frac{\mathbf{F}^t - \mathbf{I}^t}{\mathbf{M}} \quad (2.5)$$

Bei bekannten Verschiebungen $\mathbf{U}^{t-\Delta t}$ und \mathbf{U}^t kann, ausgehend von Gleichung 2.5, ein Ausdruck für die Verschiebungen $\mathbf{U}^{t+\Delta t}$ angegeben werden.

Drückt man den Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{U}}^t$ durch die Knotengeschwindigkeiten aus, führt dies auf Gleichung 2.6:

$$\ddot{\mathbf{U}}^t = \frac{\dot{\mathbf{U}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \dot{\mathbf{U}}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{F}^t - \mathbf{I}^t}{\mathbf{M}} \quad (2.6)$$

Auflösen von Gleichung 2.6 nach $\dot{\mathbf{U}}^{t+\frac{\Delta t}{2}}$ ergibt Gleichung 2.7:

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \dot{\mathbf{U}}^{t-\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\mathbf{F}^t - \mathbf{I}^t}{\mathbf{M}} \Delta t = \frac{\mathbf{U}^t - \mathbf{U}^{t-\Delta t}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}^t - \mathbf{I}^t}{\mathbf{M}} \quad (2.7)$$

Durch Einsetzen von Gleichung 2.7 in Gleichung 2.8

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \dot{\mathbf{U}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \Delta t \quad (2.8)$$

sind die Knotenverschiebungen $\mathbf{U}^{t+\Delta t}$ zur Zeit $t + \Delta t$ bestimmt.

Der Algorithmus entspricht einer schrittweisen Ausbreitung der Last (von Element zu Element) durch den Körper hindurch, so dass die globale Systemantwort durch die Lösung der Bewegungsgleichungen auf Elementniveau erhalten wird. Es werden dabei die kinetischen Bedingungen während eines Inkrements herangezogen, um die des darauffolgenden zu berechnen [Bat90].

2.1.2 Implizite Integration

Im Fall der impliziten Zeitintegration wird das Gleichgewicht des Systems zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ betrachtet. Dies erfordert, dass in nicht-linearen Berechnungen eine Iteration bezüglich des Gleichgewichts durchzuführen ist.

Entgegen der Prozedur der expliziten Integration, die die Last auch bei statischen Problemen „dynamisch“ von einem Element zum nächsten vorantreibt, werden bei impliziten Methoden zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ die äusseren Lasten \mathbf{F} mit den inneren \mathbf{I} verglichen

$$\mathbf{F}^{t+\Delta t} - \mathbf{I}^{t+\Delta t} = 0 \quad (2.9)$$

Da die Lösung zum Zeitpunkt t bekannt ist, kann man

$$\mathbf{I}^{t+\Delta t} = \mathbf{I}^t + d\mathbf{I} \quad (2.10)$$

schreiben, wo $d\mathbf{I}$ der Zuwachs der Knotenpunktkräfte ist, der dem Zuwachs der Elementverschiebungen bzw. -spannungen vom Zeitpunkt t bis zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ entspricht. Dieser Vektor kann bei Vernachlässigung der Trägheits- und Dämpfungsterme nach Gleichung 2.3 durch die Verwendung einer Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}^t angenähert werden. \mathbf{K}^t muss dabei den geometrischen und materiellen Bedingungen zur Zeit t entsprechen:

$$d\mathbf{I} = \mathbf{K}^t d\mathbf{U} \quad (2.11)$$

Es ist $d\mathbf{U}$ der Vektor der inkrementellen Knotenpunktverschiebungen. Mit den Gleichungen 2.10 und 2.11 lautet 2.9:

$$\mathbf{K}^t d\mathbf{U} = \mathbf{F}^{t+\Delta t} - \mathbf{I}^t \quad (2.12)$$

Die Lösungen für die Zustandsgrößen $d\mathbf{U}$ werden erhalten aus der Variationsformulierung

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = 0 \quad (2.13)$$

erhalten. Das energetische Potential Π ergibt sich hierbei aus Gleichung 2.14:

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T (\mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.14)$$

Mit den erhaltenen Zustandsgrößen $d\mathbf{U}$ kann für die Verschiebungen zur Zeit $t + \Delta t$ geschrieben werden:

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + d\mathbf{U} \quad (2.15)$$

Die exakten Verschiebungen sind diejenigen, die genau den wirkenden äusseren Lasten $\mathbf{F}^{t+\Delta t}$ entsprechen. Mit Gleichung 2.15 kann jedoch nur eine Näherung berechnet werden, da Gleichung 2.12 verwendet wurde. Nachdem eine Näherung für die Verschiebungen zur Zeit $t + \Delta t$ ermittelt worden ist, wird mit der Spannungsverzerrungsmatrix \mathbf{C} eine Näherung für die Spannungen berechnet, die den Knotenpunktkräften zur Zeit $t + \Delta t$ entsprechen. Danach könnte man mit den Berechnungen für den nächsten Zeitzuwachs fortfahren. Solches Vorgehen kann wegen der gemachten Annahme 2.12 signifikant von den tatsächlichen Werten abweichen und je nach den verwendeten Zeit- oder Lastschritten auch instabil werden. Bei der Anwendung ist es deshalb notwendig, so lange zu iterieren, bis die Teillösung eine hinreichende Genauigkeit erreicht hat. Ohne näher auf einzelne Iterationsverfahren einzugehen, wird hier anhand des modifizierten Newtonschen Iterationsverfahrens das Schema der Iterationsprozedur vorgestellt. In der modifizierten Newtonschen Iteration werden die Gleichungen

$$\mathbf{K}^t \Delta \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{F}^{t+\Delta t} - \mathbf{I}^{t+\Delta t(i-1)} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t(i)} = \mathbf{U}^{t+\Delta t(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (2.17)$$

für $i = 1, 2, 3, \dots$ mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t(0)} = \mathbf{U}^t, \quad \mathbf{I}^{t+\Delta t(0)} = \mathbf{I}^t \quad (2.18)$$

verwendet. Berücksichtigt man auch den Einfluss von Trägheit und Dämpfung, schreibt sich Gl. 2.16 analog Gleichung 2.3:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t(i)} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t(i)} + \mathbf{K}^t \Delta \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{F}^{t+\Delta t} - \mathbf{I}^{t+\Delta t(i-1)} \quad (2.19)$$

Im ersten Iterationsschritt reduzieren sich die Beziehungen 2.16 und 2.17 auf die zuvor vorgestellten Gleichungen 2.12 und 2.15. In den folgenden Iterationsschritten werden die ermittel-

ten Näherungen für die Knotenverschiebungen dazu verwendet, um die zugehörigen Elementspannungen und Knotenpunktkräfte $\mathbf{I}^{t+\Delta t(i-1)}$ zu berechnen. Der nichtausbalancierte Lastvektor $\mathbf{F}^{t+\Delta t} - \mathbf{I}^{t+\Delta t(i-1)}$ entspricht den Lastanteilen, die noch nicht mit den Elementspannungen im Gleichgewicht stehen. Daher wird ein Zuwachs der Knotenverschiebungen erforderlich. Die Änderung der Knotenverschiebungen wird iterativ fortgesetzt, bis die nicht ausbalancierten Lasten und der Zuwachs der Verschiebungen hinreichend klein sind. Bei der praktischen Anwendung sind die Konvergenzeigenschaften der Iterationen von grosser Bedeutung, weswegen brauchbare Konvergenzkriterien herangezogen werden müssen [Bat90].

2.2 Numerische Stabilität, Konvergenz

2.2.1 Numerische Stabilität

Der Begriff der numerischen Stabilität spielt eine wichtige Rolle in der Approximationstheorie für Anfangswertaufgaben. Hierbei interessiert vor allen Dingen die Frage, unter welchen Bedingungen endliche Störungen eines numerischen Verfahrens vermindert werden können. Endliche Störungen können sowohl Rundungsfehler als auch bei der Integration entstandene Fehler sein. Integrationsverfahren werden hinsichtlich ihres Stabilitätsverhaltens in unbedingt stabile und bedingt stabile unterteilt. Ein Integrationsverfahren ist unbedingt stabil, falls die mit einem beliebigen und insbesondere mit einem gegenüber der kleinsten Eigenschwingungsperiode T des Systems großen Zeitschrittes Δt ermittelte Lösung für beliebige Anfangsbedingungen nicht über alle Grenzen wächst. Ein Verfahren ist bedingt stabil, wenn diese Aussage nur zutrifft, falls der Zeitschritt kleiner als ein gewisser Wert Δt_{lim} ist. Dieser wird gewöhnlich als Stabilitätsgrenze bezeichnet [Bat90], [Ste/Eib93]. Implizite Algorithmen gehören der Gruppe der unbedingt stabilen, explizite der Gruppe der bedingt stabilen Algorithmen an. Im Falle expliziter Finite Elemente Methoden kann der Grenzwert Δt_{lim} zu

$$\Delta t_{\text{lim}} \leq \frac{T}{\pi} \quad (2.20)$$

festgelegt werden. Die Stabilitätsgrenze Δt_{lim} kann nicht exakt bestimmt werden, da die Höchstfrequenz

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.21)$$

von vielen sich gegenseitig beeinflussenden Faktoren abhängt. Dennoch ist es möglich, einen Wert für Δt anzugeben, bei dessen Einhaltung der Algorithmus effektiv und stabil arbeitet. Es kann gezeigt werden, dass die höchste Frequenz eines Elements stets grösser ist als die höchste Frequenz der gesamten Finiten Elemente-Anordnung. Das Stabilitätskriterium wird demzufolge durch die Wellengeschwindigkeit c_{mat} des Werkstoffes und der Seitenlänge h des kleinsten Elementes definiert:

$$\Delta t \leq \frac{h}{c_{\text{mat}}} \quad (2.21)$$

Je kleiner die Elementgrösse, um so kleiner muss Δt gewählt werden. Die Wellengeschwindigkeit des Werkstoffes ergibt sich aus Gleichung 2.22:

$$c_{\text{mat}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (2.22)$$

worin E der Elastizitätsmodul und ρ die Dichte des Werkstoffes sind. Je steifer der Werkstoff ist, desto grösser ist die Wellengeschwindigkeit. Ist die Dichte des Materials hoch, kann ein größerer Wert für Δt verwendet werden [Bat90], [Hib/Kar/Sor98].

2.2.2 Konvergenz

Um monotone Konvergenz zu erreichen, müssen die Elemente vollständig und kompatibel sein. Sind diese Bedingungen erfüllt, nimmt die Genauigkeit der Lösung kontinuierlich zu, wenn man das Elementenetz verfeinert. Eine Netzverfeinerung sollte durch Unterteilung der zuvor verwendeten Elemente erreicht werden. Das neue Netz ist somit in das alte eingebettet. Mathematisch bedeutet dies, dass der neue Raum der Finite Elemente-Interpolationsfunktionen den vorhergehenden enthält und dass die Dimension des Finite Elemente-Lösungsraumes mit der Verfeinerung des Netzes kontinuierlich zunimmt, bis er schliesslich die exakte Lösung enthält.

Ein Element wird vollständig genannt, wenn man mit seinen Verschiebungsfunktionen Starrkörperverschiebungen und konstante Verzerrungszustände erfassen kann. Starrkörperverschiebungen sind solche Verschiebungen, die das Element ausführen können, ohne dass in ihm Spannungen entstehen. Warum ein Element in der Lage sein muss, solche Verschiebungen auszuführen, kann man am Beispiel des in Abbildung 2.2.2-1 gezeigten Kragbalkens erkennen:

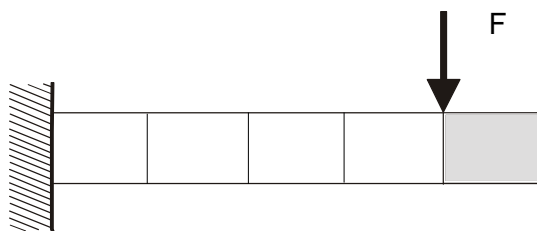


Abbildung 2.2.2-1: Eingespannter Balken; das Element am rechten Ende muss sich spannungsfrei bewegen können

Das Element am rechten Ende des Balkens muss sich translatorisch und rotatorisch bewegen können, ohne dass Spannungen entstehen, da der Balken rechts des Kraftangriffspunktes (grau unterlegter Bereich) spannungsfrei ist. Dass die Elemente notwendigerweise auch in der Lage sein müssen, konstante Verzerrungszustände zu beschreiben, ist physikalisch einzusehen, wenn

man sich vorstellt, dass immer mehr Elemente für die Gruppierung, die die Struktur darstellen soll, verwendet werden. Für den Grenzfall, dass jedes Element eine sehr geringe Größe annimmt, nähert sich die Verzerrung in jedem Element einem konstanten Wert. Dann kann jeder beliebige, komplexe Verzerrungsverlauf in der Struktur näherungsweise dargestellt werden.

Die Forderung nach Kompatibilität bedeutet, dass die Verschiebungen in den Elementen und über die Elementränder hinweg kontinuierlich sein müssen. Aus der Sicht der Physik stellt die Forderung nach Kompatibilität sicher, dass keine Spalten zwischen den Elementen entstehen, wenn die Gruppierung belastet wird. Sind auch rotatorische Freiheitsgrade definiert, so ist es zusätzlich erforderlich, die Elementkontinuität in den entsprechenden ersten Ableitungen der Verschiebungen zu gewährleisten. Die vorstehenden Bedingungen ergeben sich aus geometrischen Zwangsbedingungen. Darüber hinaus müssen jedoch auch numerische Konvergenzbedingungen eingehalten werden [Bat90].

Während die geometrischen Konvergenzbedingungen sowohl für explizite als auch implizite Finite Elemente Algorithmen zu erfüllen sind, richten sich die folgenden numerischen Konvergenzbedingungen nur an implizite Methoden.

Die nicht-lineare Matrixgleichung 2.19 muss bei den relativ großen Schrittweiten impliziter Methoden iterativ gelöst werden. Um festzustellen, ob nach einer Iteration Gleichgewicht erzielt wurde, müssen (numerische) Konvergenzkriterien erfüllt werden. Am weitesten verbreitet sind das Energie-, Kräfte- und Verschiebungskriterium. Während bei statischen Problemen alle drei Kriterien zur Anwendung kommen, wird bei dynamischen oftmals nur das Kräftekriterium benutzt. Dies ist darin begründet, dass nichtlineare dynamische Antworten stark pfadabhängig sind und somit einer guten Konvergenz besondere Bedeutung zukommt. Mit dem Kräftekriterium wird die Erfüllung der Gleichgewichtsgleichungen unmittelbar nachgewiesen, weswegen es das anspruchvollste Kriterium ist. Bei nicht-linearen Berechnungen wird manchmal auch das Energiekriterium herangezogen. Dieses kann jedoch leichter erfüllt werden als das Kräftekriterium. Das Verschiebungskriterium hingegen erlaubt keinerlei Aussage über den Gleichgewichtszustand. Als das anspruchvollste Konvergenzkriterium sei das Kräftekriterium vorgestellt. Es vergleicht die Norm der nicht ausbalancierten Kräfte mit der Norm der Laständerung:

$$\frac{\left\| \mathbf{F}^{t+\Delta t} - \mathbf{I}^{t+\Delta t} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \right\|_2}{\left\| \mathbf{F}^{t+\Delta t} - \mathbf{I}^t - \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}^t - \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}^t \right\|_2} \quad (2.23)$$

Hierbei bedeutet der Index „2“, dass es sich um die L_2 – oder „Euklidische“ Vektornorm der Kraftvektoren handelt. Die Euklidische Norm eines Vektors \mathbf{v} wird durch Gleichung 2.24 vorgeschrieben:

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2} \quad (2.24)$$

Geometrisch betrachtet stimmt diese Norm mit der Länge des Vektors \mathbf{v} überein [Bat90], [Ste/Eib93].

2.3 Leistungsfähigkeit der Integrationsmethoden

Die meisten im Bauwesen eingesetzten Materialien zeigen pfadabhängiges Verhalten. Dies bedeutet, dass man für einen identischen äusseren Endbelastungszustand verschiedene Spannungswerte erhält, wenn bei der Belastung ein anderer Pfad beschritten wurde. Das Verhalten einer Struktur kann folglich nur genau erfasst werden, wenn dem Belastungspfad (es können Spannungen, Verschiebungen oder Dehnungen vorgeschrieben sein) durch hinreichend kleine Inkremente eng gefolgt wird.

Bei der Verwendung von impliziten Methoden könnte man annehmen, dass zur Berechnung des aktuellen Verformungszustands eines deformierten Körpers nur sehr wenige (z.B. ein oder zwei) Zeitschritte ausreichen. Dennoch ist ein solches Vorgehen - insbesondere bei nicht-linearen Analysen - nicht sinnvoll, da die Lastverschiebungskurve bereichsweise linearisiert in die Berechnungen eingeht. Bei zu großen Schrittweiten bleiben z.B. plastische Werkstoffeigenschaften unberücksichtigt, so dass sich die inneren und äusseren Kräfte nach einem vorgenommenen Rechenschritt noch stark unterscheiden. Da die Iterationsalgorithmen nur einen beschränkten Konvergenzradius haben, kann bei zu groß gewählten Integrationsbereichen der tatsächliche Gleichgewichtszustand auch durch einen sich anschliessenden Iterationsprozess nicht ermittelt werden. Das Iterationsverfahren divergiert.

In Abbildung 2.3-1 wird zunächst das Verhalten eines rein inkrementellen Berechnungsalgorithmus vorgestellt. Die numerische Lösung driftet bei zunehmender Belastung immer weiter von der tatsächlichen Lösung ab.

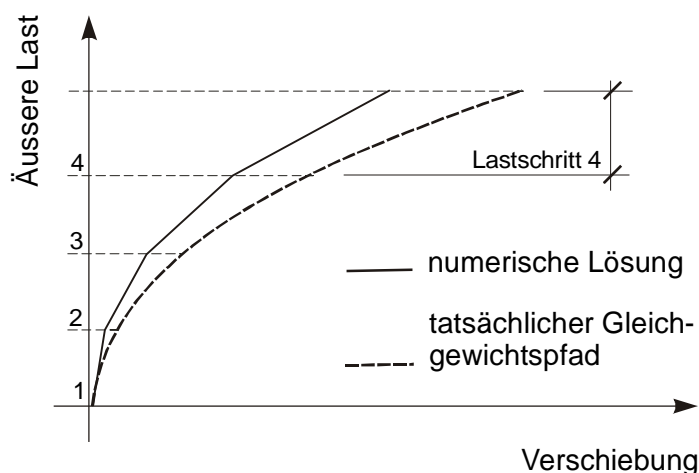


Abbildung 2.3-1: Rein inkrementeller Lösungsalgorithmus: Abdriftverhalten der numerischen Lösung von der tatsächlichen Lastverformungskurve

Zu Beginn eines neuen Lastschrittes sollte der Unterschied zwischen den äusseren (**F**) und inneren Kräften (**I**) Null sein. Dies ist nur dann der Fall, wenn der Algorithmus in jedem Zeitschritt vollkommen konvergiert. In der Praxis sind die erhaltenen Teillösungen nur Näherungen, so dass in jedem einzelnen Schritt ein Fehler erzeugt wird. Jeder Fehler aus einem nicht hergestellten Gleichgewicht wird in die folgenden Lastschritte übertragen. Teilfehler akkumulieren sich

und verursachen somit ein signifikantes Abweichen von der wirklichen Lastverformungskurve, was zu einer beträchtlichen Überschätzung der Maximallast führt.

Ein wichtiger Aspekt bezüglich der Genauigkeit impliziter Methoden ist, dass nur einmal je Lastschritt, durch die Linearisierung des nicht-linearen Gleichungssatzes, eine Tangentensteifigkeitsmatrix abgeleitet wird. Die Tangentensteifigkeit stellt nur in einem infinitesimalen Bereich die Tangente zur wahren Lastverformungskurve dar, zweifelsohne aber nicht während des gesamten Belastungsschrittes. Die Konvergenz hängt von der Krümmung der Lastverformungskurve ab. Das allmähliche Abdriften der numerischen Lösung vom tatsächlichen Gleichgewichtspfad wird durch Gleichgewichtsiterationen abgeschwächt (siehe Abschnitt 2.12). Hierbei wird durch wiederholtes Lösen der Variationsaufgabe versucht, die Lösungen für die Verschiebungen \mathbf{U} zu verbessern [Bor93].

Explizite Methoden verwenden erheblich kleinere Integrationsinkremente, so dass die Materialparameter für ein Inkrement tatsächlich als konstant angesehen werden dürfen. Die Bewegungsgleichungen werden durch Ersetzen der Differentiale durch ihren Differenzenquotienten direkt integriert, so dass für jeden diskreten Zeitschritt unmittelbar das Kräftegleichgewicht hergestellt wird. Bei der Einhaltung hinreichend kleiner Zeitschritte Δt , stellen die pro Inkrement in die Berechnung eingebrachten Ungenauigkeiten nur einen Bruchteil der bei impliziten Methoden erzeugten dar. Das Abdriften der berechneten mechanischen Antwort vom tatsächlichen Gleichgewichtspfad beruht deshalb vorwiegend nur auf Fehlern, die durch die Berechnung selbst (Rundungsfehler, etc.) hervorgerufen werden.

Implizite Finite Elemente Methoden, denen die Variationsformulierung zugrunde liegt, nehmen einen „Umweg“ über Steifigkeitsmatrizen. Diese werden durch Integration der Ansatzfunktionen über das Volumen erhalten. Hierbei werden infolge der idealisierten räumlichen Diskretisierung des Dehnungsfeldes zusätzliche Ungenauigkeiten erzeugt. Ferner ist das bei der Variationsformulierung geforderte energetische Gleichgewicht von äußerer und innerer Arbeit einfacher zu erfüllen, als das Kräftegleichgewicht. Insbesondere im Entfestigungsbereich der Lastverformungskurve kann dies dazu führen, dass die Verformungskonzentration in kritischen Bereichen des Körpers falsch bewertet wird. Die prognostizierte Verteilung der inneren Kräfte stimmt dann nicht mit den tatsächlichen lokalen Kräften überein. Die Variationsformulierung wird aus diesem Grund auch als „schwache Formulierung“ mechanischer Probleme bezeichnet.

Während auf den Variationsprinzipien beruhende Finite Elemente Methoden versuchen, Fehler, die durch das Einsetzen von Näherungslösungen in die Differentialgleichung entstanden sind, zu minimieren, ist es das Ziel explizit integrierender Methoden a priori Fehler zu vermeiden. Es sind deshalb keine Gleichgewichtsiterationen erforderlich. In Abbildung 2.3-2 ist das Vorgehen eines impliziten Algorithmus dem eines expliziten Algorithmus gegenübergestellt. Implizite Methoden müssen sich auf die Effizienz der Gleichgewichtsiteration stützen. Die erste iterative Näherungslösung $\Delta u_2^{(1)}$ für das tatsächliche (Gesamt-) Verschiebungsinkrement des Knotens du im zweiten Lastschritt geht unmittelbar aus der Gegenüberstellung der äußeren Kraft zum Zeitpunkt $t + \Delta t$, $F^{t+\Delta t}$, mit der inneren Kraft I^t zur Zeit t nach Gleichung 2.12 hervor. Nach der Ermittlung der inneren Knotenkraft $I^{t+\Delta t}$ zur Zeit $t + \Delta t$ ist festzustellen, dass diese nicht exakt der äußeren Kraft entspricht, so dass die Lösung für die Verschiebung du durch Addieren der iterativ ermittelten Verbesserungen $\Delta u_2^{(2)}$, $\Delta u_2^{(3)}$, ..., u.s.w. verändert werden muss. Bei stark nicht-linearen

Problemen ist das Konvergenzverhalten impliziter Methoden oft in Frage gestellt. Die Zeitschrittgrößen müssen in einigen Fällen so sehr reduziert werden, dass sie in der Größenordnung der Intervalle expliziter Methoden liegen, wobei kontinuierlich ein unverhältnismäßig hoher Rechenaufwand für die iterative Lösung geleistet werden muss. Ist das zu lösende Gleichungssystem darüber hinaus groß, steigen die Anforderungen hinsichtlich Rechenkapazität sehr schnell an. In der Praxis werden deshalb Simulationen hauptsächlich durch den verfügbaren Arbeits- und Festplattenspeicher dominiert und weniger durch die Rechenzeit.

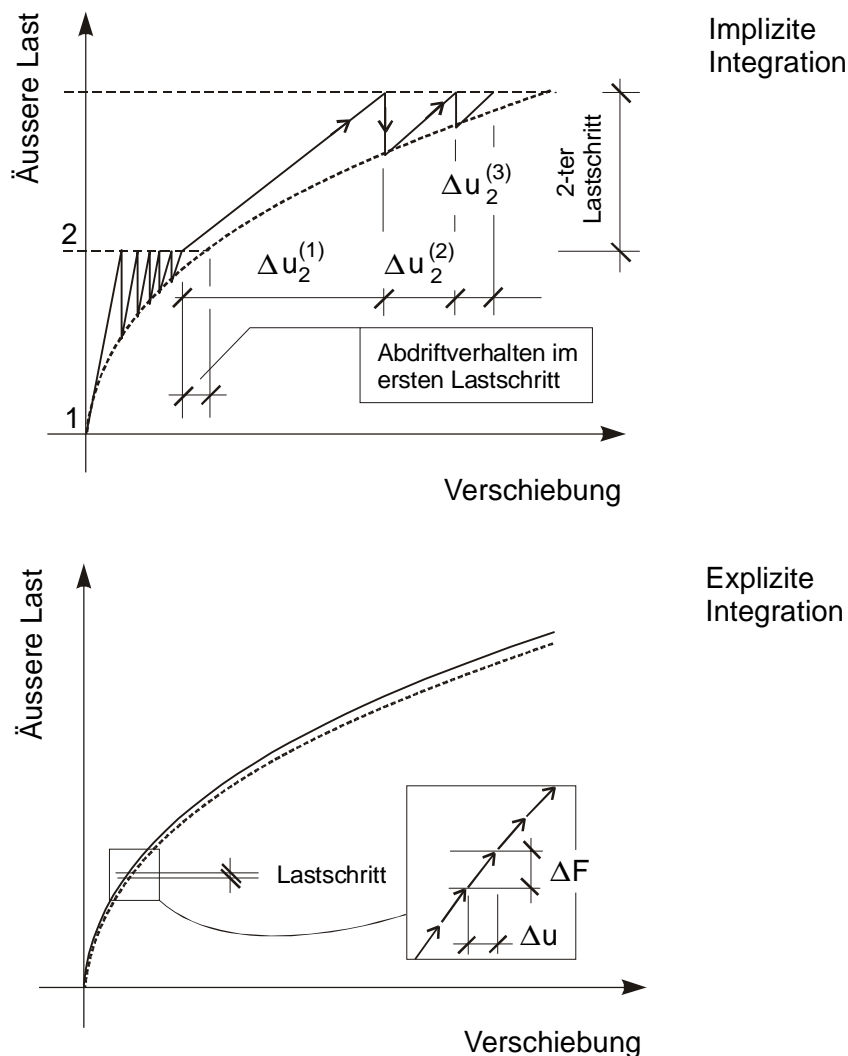


Abbildung 2.3-2: Implizite (modifiziertes Newtonsches Iterationsverfahren, oben) und explizite (unten) Zeitintegration im Vergleich

Es ist darauf hinzuweisen, dass insbesondere im Nachbruchbereich in vielen Fällen, überhaupt keine Konvergenz erreicht werden kann und oft das Verfahren bereits beim Überschreiten der Traglast divergiert. Die Physik mancher nicht-linearer Prozesse lässt weggesteuerte Berechnungen nicht zu, so dass diese lastgesteuert erfolgen müssen. Dies trifft bei viskosem und plastischem Materialverhalten und insbesondere bei der Abbildung von Rissbildungsprozessen zu. Ein bekanntes Phänomen ist das sogenannte „Snap-Back Behavior“, bei dem es nicht möglich

ist, die Spannungsdehnungskurve über die Höchstlast hinaus zu verfolgen [Bor93], [Hib/Kar/Sor98].

Explizite Algorithmen benötigen bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden, einfachem Materialverhalten und geringem Einfluss aus Geometrie und Randbedingungen erfahrungsgemäss eine etwas längere Rechenzeit. Handelt es sich um Systeme mit vielen Freiheitsgraden, komplexem pfadabhängigen Materialverhalten und schwierigen geometrischen Verhältnissen, zeichnen sich explizit über die Zeit integrierende Methoden nicht nur durch ein vorteilhaftes Verhalten bezüglich Arbeits- und Festplattenspeicher aus. Sie weisen ebenso eine aussergewöhnliche Robustheit hinsichtlich des Konvergenzverhaltens und somit auch der direkt damit verbundenen numerischen Stabilität auf. Die numerische Stabilität spielt eine entscheidende Rolle für die Behandlung des Nachbruchbereichs. Während in Anbetracht der erreichbaren Genauigkeit im rein elastischen Bereich und im Verfestigungsbereich eines Werkstoffes beide Verfahren als gleichwertig angesehen werden können, sind im plastischen Teil der Spannungsdehnungslinie explizite Verfahren vorzuziehen. Die dynamische Lösung der Gleichgewichtsbedingungen, bei der die Last von Element zu Element weitergetrieben wird, erlaubt es, den Bereich der Maximallast ohne Divergenzverhalten zu durchlaufen.

Werden keine geeigneten Kurvenverfolgungsalgorithmen eingesetzt, divergieren implizite Methoden bei Erreichen der Höchstlast, wenn lastkontrolliert belastet wird (Abbildung 2.3-3). Dieses Verhalten wird dadurch verursacht, dass sich im Bereich der Höchstlast die Lastverformungskurve und die Horizontale, welche die auf das System aufgebrachte Last charakterisiert, nicht schneiden. Das Verfahren iteriert zur Einhaltung der Konvergenzbedingungen weiter, wobei die nicht-ausbalancierten Kräfte unbegrenzt zunehmen.

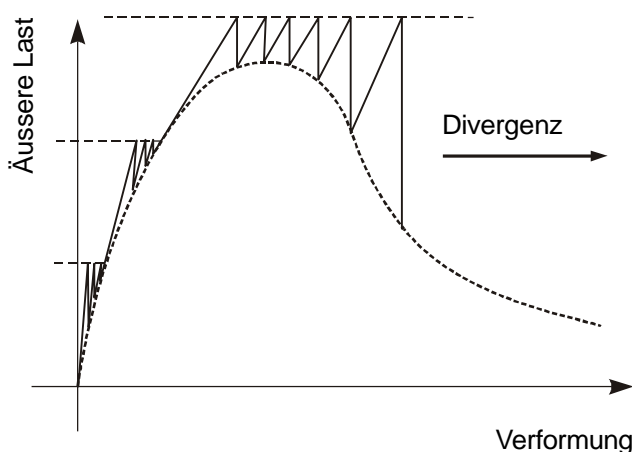


Abbildung 2.3-3: Divergenzverhalten impliziter Finite Elemente Algorithmen. Nach Erreichen der Höchstlast wächst die nicht-ausbalancierte Kraft unkontrolliert an

Implizite Integrationsverfahren speichern große Steifigkeitsmatrizen ab, die zur Lösung des Gleichungssystems auf Dreiecksform gebracht werden müssen. Explizite Integrationsverfahren hingegen speichern Vektoren, die nur einen geringen Kernspeicherbedarf haben. Ferner entfällt bei ihnen die konsistente Linearisierung des Werkstoffgesetzes, weswegen auch keine Gleichgewichtsiterationen erforderlich sind. Die Anforderungen an das Rechensystem sind deshalb günstiger.

3. BERECHNUNG EINES DISKONTINUIERLICHEN SYSTEMS ALS KONTINUIERLICHES SYSTEM: WERKSTOFF BETON

Das Werkstoffverhalten von Beton kann im Anfangsbereich der Lastverformungskurve vollständig durch die Beziehungen der linear-elastischen Kontinuummmechanik beschrieben werden. Bei weiterer Steigerung der Last weicht die Spannungsdehnungskurve immer mehr von dem durch den Elastizitätsmodul vorgegebenen Kurvenverlauf ab, so dass sowohl die Differentialgleichungen der Verzerrungen als auch die Spannungsdifferentialgleichung im Bereich der Höchstlast ihre Elliptizität verlieren und eine parabolische Form annehmen. Begibt man sich in den Nachbruchbereich, nimmt die Variable Zeit zunehmend Einfluss. Die bestimmenden Differentialgleichungen besitzen dort eine hyperbolische Form. Aus Gründen der Klassifizierung sei auf die allgemeine partielle Differentialgleichung nach Gleichung 3.1 für den ebenen Fall eingegangen:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f \left(x, y, u, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.1)$$

In Gleichung 3.1 bezeichnet v die unbekannte Zustandsgrösse. Je nach dem Verhältnis ihrer Koeffizienten A , B und C nennt man die Differentialgleichung elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, und zwar für:

$$B^2 - AC \begin{cases} < 0 & \text{elliptisch} \\ = 0 & \text{parabolisch} \\ > 0 & \text{hyperbolisch} \end{cases} \quad (3.2)$$

Die durch die vorgenommene Klassifizierung 3.2 erhaltenen Differentialgleichungen unterscheiden in ihrem Verhalten erheblich voneinander und können demnach auch verschiedenen physikalischen Problemen zugeordnet werden. Im allgemeinen 3D-Fall beschreiben, in den durch die Klassifizierung 3.2 definierten Bereichen, jeweils drei voneinander linear unabhängige Differentialgleichungen analog Gleichung 3.1 das mechanische Problem.

Hinsichtlich der Finiten Elemente Methode können die Differentialgleichungen entweder direkt am differentiellen Element, wobei Beziehungen zwischen Gleichgewicht, Bewegung und Materialgesetz hergestellt werden müssen, oder durch eine Variationsmethode gewonnen werden.

Mehraxial druckbeanspruchter Beton zeigt vor allen Dingen im Nachbruchbereich sowohl geometrisch als auch physikalisch nicht-lineares Verhalten. Infolge der bei Erreichen der Höchstlast einsetzenden Makrorissbildung treten grosse Verschiebungen der sich dissoziierenden Kontinuums-teile auf. Demzufolge muss gewährleistet sein, dass der Übergang, von reinem Materialverhalten im Bereich vor Erreichen der Höchstlast zu dem den Nachbruchbereich bestimmenden Strukturverhalten bei sich ändernden Randbedingungen, nachvollzogen werden kann. Lässt man Kriech- und Schwindeffekte ausser Acht, ist das Materialverhalten im elasto-plastischen Teil der Spannungsdehnungskurve nahezu unabhängig von der Zeit. Das rein plastische Verhalten im ab-

fallenden Ast wird jedoch in hohem Masse vom durchlaufenen Belastungspfad und somit auch von der Zeit bestimmt.

4. AUSWAHLKRITERIEN

In den Abschnitten 1 – 3 wurden die wesentlichen Merkmale angesprochen, die unmittelbar Einfluss auf die Effektivität einer nicht-linearen Werkstoffanalyse nehmen. Im Rahmen des Forschungsprojektes „3D-Stoffgesetz für Normalbeton bei mehraxialen Druckverhältnissen“ soll insbesondere auch auf die Umgebung der Höchstlast und den Nachbruchbereich eingegangen werden. Dies erfordert ein äußerst robustes Verhalten des eingesetzten Finite Elemente Programms hinsichtlich der numerischen Stabilität. Aus diesem Grund sind besonders hohe Anforderungen an das Konvergenzverhalten zu stellen. Darüber hinaus ist die Rechenzeit zu kontrollieren.

Aus den vorstehenden Abschnitten geht hervor, dass ein Höchstmass an numerischer Stabilität nur durch explizit über die Zeit integrierende Programme sichergestellt werden kann. Weiterhin ist zu beachten, dass das zu entwickelnde Stoffgesetz ein physikalisch begründetes sein soll und sich auf Werkstoffparametern wie Zugfestigkeit, Kohäsion, Reibungs- und Dilatanzwinkel abstützt. Die differentielle Formulierung solcher Programme erlaubt es, dass diese Kennwerte zu jedem Zeitpunkt des Berechnungsprozesses verändert werden können, was bezüglich der Entwicklung eines Stoffgesetzes von grossem Vorteil ist. Hiervon abgesehen sind, insbesondere bei nicht-linearen Berechnungen, ihre Anforderungen an das Rechensystem und ihr Speicherbedarf geringer. Das strikteste Auswahlkriterium ist demnach die Forderung, dass das Programm ein explizit-dynamisches sein soll.

Aus praktischen Überlegungen wurden weitere Kriterien festgelegt:

- Liegen bereits erweiterte Stoffgesetzformulierungen für Beton in den betreffenden Programmen vor?
- Können Änderungen an den Stoffgesetzen des Programms vorgenommen werden?
- Wie werden die Ergänzungen implementiert?
- Gibt es Erfahrungen aus der Praxis mit dem betreffenden Programm?
- (Wie ist die Unterstützung der Firmen?)

5

LITERATURVERZEICHNIS

- Hibbitt, Karlsson, Sorensen* [1998]
Getting Started with ABAQUS/Explicit
Manual
- de Borst R.* [1993]
Computational methods in non-linear solid mechanics
Delft University of Technology, 1993
- Stempniewski L., Eibl J.* [1993]
Finite Elemente im Stahlbeton
In: Betonkalender 1993, Teil 1, 1993, pp. 249-312
- Bathe K.J.* [1990]
Finite Elemente Methoden
Springer, 1990

