Over de berekening van het magnetische veld van een cirkelvormige stroomkring

AFD. ALGEMENE WETENSCHAPPEN

SECTIE WISKUNDE

RAPPORT 1957-1

OVER DE BEREKENING VAN HET

MAGNETISCHE VELD

VAN EEN CIRKELVORMIGE STROOMKRING

d o o r

C. J. B O U W K A M P

november 1957

TECHNISCHE HOGESCHOOL TE EINDHOVEN

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

AFDELING ALGEMENE WETENSCHAPPEN

SECTIE WISKUNDE

Over de berekening van het magnetische veld van een cirkelvormige stroomkring

door

C.J.BOUWKAMP

november 1957

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Sectie Wiskunde.

Enige verbeteringen bij rapport 1957-1 :

"Over de berekening van het magnetische veld van een cirkelvormige stroomkring"

door C.J.Bouwkamp.

blz.6 regel 3 van onder moet zijn :

$$= \frac{i}{2\pi} \quad \frac{1}{\sqrt{z^2 + (a + r)^2}} \quad \left\{ K + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{z^2 + (a - r)^2} \, E \right\}$$

blz. 11 regel 12 :

$\frac{9}{4\pi}$ moet zijn $\frac{q}{4\pi}$

Over de berekening van het magnetische veld

van een cirkelvormige stroomkring

door

C.J. Bouwkamp

1. Inleiding

Op verzoek van de heren Hölscher en Van der Laan worden in dit rapport resultaten van numerieke berekening gegeven voor het magnetische veld van een cirkelvormige stroomkring in de vrije ruimte.

In rechthoekige coördinaten (x, y, z) zij de cirkel (straal a) gegeven door de vergelijkingen

$$x^2 + y^2 = a^2, \; z = 0.$$

In deze cirkel vloeit een constante gelijkstroom ter grootte i, in de positieve zin. Het veld van deze stroom is kennelijk rotatiesymmetrisch om de z-as. In bijbehorende cylindercoördinaten (z, r, φ), met $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, is het veld gekarakteriseerd door de componenten H_z en H_r, die alleen van z en r afhangen, terwijl $H_\varphi = 0$ is. Bekend is dat H_z en H_r elementaire functies zijn op de z-as; in de rest van de ruimte kan men H_z en H_r uitdrukken in elementaire functies en complete elliptische integralen van de eerste en tweede soort. Hoe men tot de expliciete uitdrukkingen voor H_z en H_r komt, wordt later in detail behandeld. Voor numerieke resultaten raadplege men tabellen I en II. Deze tabellen geven H_z en H_r als functies van z/a en r/a in dimensieloze eenheden.
Als eenheid van veldsterkte is daarbij aangenomen

$$H_o = \frac{i}{2a} ,$$

zijnde de veldsterkte H_z in het middelpunt van de cirkel. Is i gemeten in ampères, a in meters, dan is H_o uitgedrukt in ampères per meter. In dit rapport worden uitsluitend gerationaliseerde Giorgi-eenheden gebruikt.

T A B E L I

Numerieke waarden van H_z/H_o als functie van z/a en r/a.

Hierbij is H_o het veld in het middelpunt van de cirkel:

$$H_o = \frac{i}{2a} \text{ ampère/meter} = H_z(0,0).$$

(H_z is een even functie van z).

z/a → / r/a ↓	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	3.0
0.0	1.0000	0.9429	0.8004	0.6305	0.4761	0.3536	0.2624	0.1964	0.1489	0.1145	0.0894	0.0316
0.2	1.0312	0.9653	0.8065	0.6255	0.4676	0.3455	0.2561	0.1918	0.1456	0.1123	0.0878	0.0313
0.4	1.1412	1.0386	0.8187	0.6044	0.4391	0.3207	0.2373	0.1784	0.1362	0.1057	0.0832	0.0303
0.6	1.4106	1.1761	0.8068	0.5470	0.3837	0.2782	0.2070	0.1572	0.1216	0.0954	0.0760	0.0288
0.8	2.2570	1.2991	0.6731	0.4242	0.2972	0.2198	0.1676	0.1304	0.1031	0.0826	0.0669	0.0268
1.0	$\pm\infty$	0.4252	0.3100	0.2406	0.1911	0.1536	0.1243	0.1012	0.0829	0.0683	0.0567	0.0244
1.2	−1.0648	−0.3882	−0.0193	0.0742	0.0941	0.0921	0.0833	0.0730	0.0631	0.0541	0.0463	0.0218
1.4	−0.4021	−0.2822	−0.1118	−0.0151	0.0282	0.0452	0.0498	0.0487	0.0453	0.0409	0.0364	0.0192
1.6	−0.2119	−0.1764	−0.1054	−0.0448	−0.0063	0.0150	0.0255	0.0298	0.0306	0.0295	0.0276	0.0165
1.8	−0.1294	−0.1155	−0.0829	−0.0481	−0.0206	−0.0019	0.0096	0.0161	0.0192	0.0203	0.0202	0.0140
2.0	−0.0862	−0.0796	−0.0631	−0.0429	−0.0245	−0.0100	0.0002	0.0069	0.0110	0.0132	0.0142	0.0117
3.0	−0.0211	−0.0206	−0.0191	−0.0168	−0.0141	−0.0112	−0.0083	−0.0057	−0.0034	−0.0014	0.0001	0.0037

T A B E L II

Numerieke waarden van H_r/H_o als functie van z/a en r/a.

Hierbij is H_o het veld in het middelpunt van de cirkel:

$$H_o = \frac{i}{2a} \text{ ampère/meter} = H_z\,(0,0)$$

(H_r is een oneven functie van z)

z/a → r/a ↓	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	3.0
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.0000	0.0581	0.0865	0.0852	0.0699	0.0527	0.0383	0.0275	0.0198	0.0144	0.0106	0.0028
0.4	0.0000	0.1439	0.1971	0.1800	0.1404	0.1028	0.0736	0.0526	0.0379	0.0276	0.0204	0.0055
0.6	0.0000	0.3221	0.3619	0.2865	0.2067	0.1457	0.1027	0.0731	0.0527	0.0385	0.0286	0.0079
0.8	0.0000	0.8106	0.5860	0.3825	0.2548	0.1742	0.1218	0.0868	0.0630	0.0465	0.0348	0.0100
1.0	∞	1.5239	0.6945	0.4096	0.2662	0.1820	0.1284	0.0927	0.0682	0.0510	0.0387	0.0116
1.2	0.0000	0.6796	0.5049	0.3416	0.2369	0.1688	0.1230	0.0911	0.0685	0.0522	0.0403	0.0128
1.4	0.0000	0.2376	0.2806	0.2381	0.1860	0.1425	0.1090	0.0838	0.0649	0.0506	0.0398	0.0135
1.6	0.0000	0.1036	0.1524	0.1542	0.1356	0.1126	0.0913	0.0733	0.0587	0.0471	0.0379	0.0138
1.8	0.0000	0.0533	0.0875	0.0992	0.0960	0.0858	0.0736	0.0617	0.0512	0.0423	0.0349	0.0138
2.0	0.0000	0.0307	0.0534	0.0652	0.0677	0.0643	0.0581	0.0508	0.0437	0.0371	0.0314	0.0135
3.0	0.0000	0.0046	0.0087	0.0122	0.0148	0.0165	0.0173	0.0175	0.0171	0.0163	0.0153	0.0096

2. Berekening van het veld uit een vector-potentiaal

De differentiaalvergelijkingen voor het magneetveld $\underline{H}$, bij gegeven stroomdichtheid $\underline{i}$, zijn

$$\text{rot } \underline{H} = \underline{i} \qquad \text{div } (\mu \underline{H}) = 0,$$

waarin μ de magnetische permeabiliteit van de ruimte is. Probeer een hulpvector $\underline{A}$ te vinden, zódanig dat $\mu \underline{H} = \text{rot } \underline{A}$. Als dat gelukt, dan is automatisch aan de tweede vergelijking voldaan. Substitutie in de eerste vergelijking (μ is constant) geeft dan

$$\text{rot rot } \underline{A} = \mu \underline{i}$$

Nu geldt, in rechthoekige componenten,

$$\text{rot rot } \underline{A} = \text{grad div } \underline{A} - \Delta \underline{A},$$

waarin Δ de Laplace - operator is. We proberen nu $\underline{A}$ nog te laten voldoen aan div $\underline{A} = 0$. Als dat kan, vinden we voor $\underline{A}$ de Poisson-vergelijking

$$\Delta \underline{A} = - \mu \underline{i}.$$

Een particuliere oplossing hiervan, die in het oneindige naar nul gaat, is gegeven door

$$\underline{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\underline{i}}{R} \, dV,$$

waarbij R de afstand is van het bronpunt tot het veldpunt. Deze vector $\underline{A}$ heet de vectorpotentiaal van de stroomdichtheid $\underline{i}$. Inderdaad controleert men gemakkelijk dat voor deze vector div $\underline{A} = 0$ is, omdat div $\underline{i} = 0$ is. Daarmee hebben we een formalisme om $\underline{H}$ in zijn bronnen $\underline{i}$ uit te drukken, te weten,

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu} \text{ rot } \underline{A}, \qquad \underline{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\underline{i}}{R} \, dV. \tag{1}$$

Deze formules gaan we nu toepassen op het geval van de cirkelvormige stroomkring. De functie $\underline{i}$ is nu geconcentreerd in de cirkel. Een punt van de cirkel heeft tot coordinaten

$$z = 0, \quad r = a, \quad \varphi = \alpha .$$

De afstand van dit punt tot het veldpunt (z, r, φ) is

$$R = \sqrt{z^2 + a^2 - 2 \, ar \cos(\varphi - \alpha) + r^2}$$

Is $ds = a \, d\alpha$ het boogelement van de cirkel, dan is $\underline{i} \, dV = i \, \underline{s} \, ds$, waarbij $\underline{s}$ de raaklijneenheidsvector aan de cirkel is. De componenten van $\underline{s}$ zijn

$$s_x = - \sin\alpha , \qquad s_y = \cos\alpha , \; s_z = 0.$$

De vectorpotentiaal van de cirkelvormige stroomkring is nu, volgens vergelijking (1),

$$\underline{A} = \frac{\mu i}{4\pi} \int \frac{\underline{s}}{R} \, ds,$$

waarbij de integratie over de hele cirkel moet worden genomen. Het is duidelijk dat $A_z = 0$ is. Uit symmetrie-overwegingen ziet men gemakkelijk dat ook $A_r = 0$ is, omdat de bijdragen van spiegelpunten ten opzichte van het vlak door veldpunt en z-as elkaar precies opheffen voor wat de component A_r aangaat. De vectorpotentiaal heeft dus alleen een van-nul-verschillende φ-componente.

Bovendien is A_φ onafhankelijk van φ. We kunnen dus volstaan met het berekenen van A_y op de plaats $y = o$ ($\varphi = o$). Deze is precies gelijk aan A_φ. Dus

$$A\varphi = \frac{\mu ia}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{z^2 + a^2 - 2ar\cos\alpha + r^2}}$$

Deze en soortgelijke integralen kunnen we met de theorie van Besselfuncties berekenen.

Is $z > o$, dan geldt

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} = \int_0^\infty e^{-zt} J_o(bt)dt \tag{2}$$

Verder gebruiken we het additie-theorema dezer functies:

$$J_o(t\sqrt{a^2 - 2\,ar\cos\alpha + r^2}) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_m(at)\, J_m(r\,t) \cos(m\alpha), \tag{3}$$

waaruit volgt

$$\int_o^{2\pi} J_o(t\sqrt{a^2 - 2\,ar\cos\alpha + r^2}) \cos\alpha d\alpha = 2\pi J_1(at)\, J_1(rt).$$

Zo vinden we, voor $z > 0$,

$$A\varphi = \frac{\mu ia}{4\pi}\int_o^{2\pi} \cos\alpha\, d\alpha \int_o^\infty e^{-zt} J_o(t\sqrt{a^2 - 2ar\cos\alpha + r^2})\, dt$$

$$= \frac{\mu ia}{4\pi}\int_o^\infty e^{-zt}dt \int_o^\pi J_o(t\sqrt{a^2-2ar\cos\alpha + r^2}) \cos\alpha d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\mu ia \int_o^\infty e^{-zt} J_1(at)\, J_1(rt)\, dt.$$

Kennelijk is $A\varphi$ een even functie van z. Dus geldt algemeen:

$$A\varphi = \frac{1}{2}\mu ia \int_o^\infty e^{-|z|t} J_1(at)\, J_1(rt)\, dt. \tag{4}$$

De overblijvende integraal kan worden uitgedrukt in complete elliptische integralen van de eerste en de tweede soort:

$$K(k) = \int_o^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}}, \tag{5}$$

respectievelijk

$$E(k) = \int_o^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}\, d\phi. \tag{6}$$

Men vindt

$$\int_o^\infty e^{-|z|t} J_1(at) J_1(rt)dt = \frac{1}{\pi\sqrt{ar}}\left\{\left(\frac{2}{k} - k\right) K(k) - \frac{2}{k} E(k)\right\} \tag{7}$$

met

$$k = \left\{\frac{4\,ar}{z^2 + (a + r)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Dan wordt de vectorpotentiaal

$$A_z = 0, \quad A_r = 0,$$

$$A_\varphi = \frac{\mu i}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{r}}\left\{\left(\frac{2}{k} - k\right) K(k) - \frac{2}{k} E(k)\right\}$$

$$= \frac{\mu i}{2\pi r}\sqrt{z^2 + (a + r)^2}\left\{\left(1 - \tfrac{1}{2}k^2\right) K - E\right\}. \tag{9}$$

Het bijbehorende magnetische veld vindt men uit

$$\mu H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\ A_\varphi),\ \mu H_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z},\ H_\varphi = 0.$$

Men vindt, na enige manipulaties,

$$H_z = \tfrac{1}{2}\, i\, a \int_0^\infty e^{-|z|t}\, J_1(at)\, J_o(rt)\, t\, dt, \qquad (10)$$

$$H_r = \tfrac{1}{2}\, i\, a\ \operatorname{sgn} z \int_0^\infty e^{-|z|t}\, J_1(at)\, J_1(rt)\, t\, dt. \qquad (11)$$

Ook deze integralen kunnen in de functies E en K worden uitgedrukt. Men heeft:

$$H_z = \frac{i\ k}{4\ \pi}\ \frac{1}{\sqrt{ar}}\{K - E + \frac{\frac{1}{2}k^2\ E}{1 - k^2}\ (\frac{a}{r} - 1)\ \}$$

$$= \frac{i}{2\pi}\ \frac{1}{\sqrt{z^2 + (a + r)^2}}\ \{K + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{z^2 + (a - r)^2}\ E\}, \qquad (12)$$

$$H_r = \frac{ikza}{4\pi(ar)^{3/2}}\{\frac{1 - \frac{1}{2}\ k^2}{1 - k^2}\ E - K\}$$

$$= \frac{i}{2\ \pi\ r}\ \frac{z}{\sqrt{z^2 + (a + r)^2}}\left\{\frac{z^2 + a^2 + r^2}{z^2 + (a - r)^2}\ E - K\right\}. \qquad (13)$$

3. Berekening van het veld uit een scalaire potentiaal

De methode van berekening met behulp van de vectorpotentiaal uit het voorafgaande is algemeen. Zijn de bronnen $\underline{i}$ echter geconcentreerd in een gesloten ruimte-kromme, dan bestaat er ook nog een andere methode, die samenhangt met de ruimtehoek waaronder men de ruimte-kromme vanuit het veldpunt ziet. Deze samenhang wordt nu beschouwd. Voor de transformatie hebben we een hulpstelling nodig.

Hulpstelling

Zij φ een scalaire functie gedefinieerd in de omgeving van F (tweezijdig oppervlak door de gesloten ruimte-kromme C) die daar tenminste eenmaal continu-differentieerbaar is. Dan geldt

$$\int \varphi\, \underline{s}\, ds = \int \underline{n} \times \mathrm{grad}\, \varphi\, df.$$

Bewijs:

Zij $\underline{a}$ een constante vector. Dan is

$$\underline{a}. \int \varphi\, \underline{s}\, ds = \int \varphi\, \underline{a}.\, \underline{s}\, ds$$
$$= \int \underline{n}.\ \mathrm{rot}\, (\varphi\, \underline{a})\, df,$$

waarbij het laatste gelijkteken geldt op grond van de stelling van Stokes:

$$\int \underline{v}.\underline{s}\, ds = \int \underline{n} \times \mathrm{rot}\, \underline{v}\, df \qquad (\text{met } \underline{v} = \varphi\, \underline{a}).$$

Verder heeft men

$$\mathrm{rot}\, (\varphi\, \underline{a}) = \varphi\, \mathrm{rot}\, \underline{a} + \mathrm{grad}\, \varphi \times \underline{a}$$
$$= \mathrm{grad}\, \varphi \times \underline{a}$$

($\underline{a}$ is constant, dus rot $\underline{a} = \underline{0}$).

Men vindt zo

$$\underline{a}. \int \varphi\, \underline{s}\, ds = \int n.(\mathrm{grad}\, \varphi \times \underline{a})\, df.$$

De rechter integrand is het bekende triple - of volume-product. Daarvoor kunnen we door cyclische verwisseling ook schrijven:

$$\underline{n}.(\mathrm{grad}\, \varphi \times \underline{a}) = \underline{a}.\ (\underline{n} \times \mathrm{grad}\, \varphi).$$

Derhalve geldt

$$\underline{a}. \int \varphi\, \underline{s}\, ds = \int \underline{a}.\ (n \times \mathrm{grad}\, \varphi)\, df$$
$$= \underline{a}. \int \underline{n} \times \mathrm{grad}\, \varphi\, df$$

(in de middelste integraal kunnen we de constante vector $\underline{a}$ vòòr het integraalteken brengen). Bovenstaande relatie geldt voor elke $\underline{a}$. Dan moet ook gelden

$$\int \varphi\, \underline{s}\, ds = \int \underline{n} \times \mathrm{grad}\, \varphi\, df,$$

hetgeen te bewijzen was.

Uit het voorafgaande weten we dat het magneetveld van de stroomkring C kan worden berekend met behulp van de formule

$$\underline{H} = \frac{i}{4\pi}\ \mathrm{rot} \int \frac{\underline{s}}{R}\, ds.$$

Pas nu de hulpstelling toe voor $\varphi = {}^1/R$. Dan vindt men

$$H = \frac{i}{4\pi} \operatorname{rot} \int \underline{n} \times \operatorname{grad}' \frac{1}{R} \, df.$$

Hierbij is met een accent aangegeven dat de gradient-operator werkt op de integratiecoordinaten; gradient zonder accent wil zeggen dat we naar de veldpuntcoordinaten moeten differentieren.
Bekend is dat geldt

$$\operatorname{grad}' \frac{1}{R} = - \operatorname{grad} \frac{1}{R}.$$

Daarmee vindt men voor het magneetveld

$$H = \frac{i}{4\pi} \operatorname{rot} \int (\operatorname{grad} \frac{1}{R}) \times \underline{n} \, df.$$

Verder gebruiken we weer

$$\operatorname{rot} (\varphi \underline{n}) = \varphi \operatorname{rot} \underline{n} + (\operatorname{grad} \varphi) \times \underline{n}.$$

Bedenken we dat $\operatorname{rot} \underline{n} = \underline{0}$ is ($\underline{n}$ hangt niet van de veldpuntcoordinaten af, en naar deze coordinaten differentieren we), en nemen we $\varphi = {}^1/R$, dan wordt

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{i}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int \frac{\underline{n}}{R} \, df \\ &= \frac{i}{4\pi} \{ \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta \} \int \frac{\underline{n}}{R} \, df. \end{aligned}$$

Ligt het veldpunt niet op F, dan is

$$\Delta \int \frac{\underline{n}}{R} \, df = \int \underline{n} \, \Delta (\frac{1}{R}) \, df = \underline{0},$$

omdat ${}^1/R$ aan de potentiaalvergelijking voldoet ($R \neq 0$).
Buiten F geldt dus de voorstelling

$$\underline{H} = \frac{i}{4\pi} \operatorname{grad} \operatorname{div} \int \frac{\underline{n}}{R} \, df. \tag{14}$$

Daarmee is aangetoond dat het magnetisch veld van de gesloten stroomkring C kan worden berekend uit een scalaire potentiaal

$$\underline{H} = -\operatorname{grad} \phi , \qquad \phi = - \frac{i}{4\pi} \operatorname{div} \int \frac{\underline{n}}{R} \, df. \tag{15}$$

Bij een bepaalde keuze van F is ϕ eenduidig bepaald. De functie ϕ is, anders dan de vectorpotentiaal $\underline{A}$, geen reguliere functie van de plaats. Alleen buiten F is het een reguliere functie; F is een oppervlak van discontinuiteit van ϕ, een snede voor ϕ. Daarentegen is grad ϕ wel weer regulier buiten C.
De potentiaal ϕ is meerduidig, zolang we het oppervlak F niet specificeren. Is de kromme C een vlakke kromme, dan ligt het voor de hand om voor F het inwendige van C te nemen. In het geval van de cirkel vindt men aldus de eenvoudige uitdrukking

$$\phi = - \frac{i}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{df}{R},$$

waarbij de integraal over de cirkelschijf wordt uitgestrekt.
Deze integraal kunnen we weer transformeren met behulp van Besselfuncties. De afstand R van het veldpunt (z, r, φ) tot het integratiepunt $(0, \rho, \alpha)$ is

$$R = \sqrt{z^2 + r^2 - 2\,r\rho\cos(\varphi - \alpha) + \rho^2},$$

zodat

$$\frac{1}{R} = \int_0^\infty e^{-|z|t}\, J_0\left(t\sqrt{r^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \alpha) + \rho^2}\right) dt.$$

Integreren we dit over φ dan is het resultaat

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{R} = 2\pi \int_0^\infty e^{-|z|t}\, J_0(rt)\, J_0(\rho t)\,dt,$$

als we formule (3) gebruiken. Vervolgens:

$$\begin{aligned}\int \frac{df}{R} &= \int_0^a \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{R} \\ &= 2\pi \int_0^\infty e^{-|z|t}\, J_0(rt)\,dt \int_0^a \rho\, J_0(\rho t)\, d\rho \\ &= 2\pi a \int_0^\infty e^{-|z|t}\, J_0(r t)\, J_1(a t)\, t^{-1} dt, \end{aligned} \qquad (16)$$

als men gebruik maakt van $\frac{d}{dx}(x\,J_1) = x\,J_0(x)$,

en dus $\int_0^a \rho\, J_0(\rho t)\, d\rho = a\, t^{-1}\, J_1(at)$.

De scalaire potentiaal is dus tenslotte

$$\begin{aligned}\psi &= -\tfrac{1}{2}\, ia\, \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty e^{-|z|t}\, J_0(rt)\, J_1(at)\, \frac{dt}{t} \\ &= \tfrac{1}{2}\, ia\, \operatorname{sgn} z \int_0^\infty e^{-|z|t}\, J_0(rt)\, J_1(at)\, dt. \end{aligned} \qquad (17)$$

Berekent men $\underline{H}$ nu met $H_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z}$ en $H_r = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$,

dan vindt men inderdaad de formules (10) en (11) terug.
We merken op dat ψ een oneven functie van z is.

4. Samenhang met de ruimtehoek

De scalaire potentiaal ϕ uit formule (15) kunnen we èn physisch èn meetkundig interpreteren.
Voor punten buiten F kunnen we de operator div onder het integraalteken brengen. Bedenkt men dat geldt

$$\operatorname{div}\left(\frac{\underline{n}}{R}\right) = \underline{n}.\ \operatorname{grad}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R}\operatorname{div}\underline{n}$$

$$= \underline{n}.\ \operatorname{grad}\frac{1}{R} = -\ n.\ \operatorname{grad}'\frac{1}{R},$$

dan vindt men voor de scalaire potentiaal

$$\phi = \frac{i}{4\pi}\int \underline{n}.\ \operatorname{grad}'\frac{1}{R}\ df.$$

Nu is de scalaire potentiaal van een magnetische dipool met moment $d\underline{m}$ gegeven door

$$d\chi = \frac{1}{4\pi}\ d\underline{m}.\ \operatorname{grad}'\frac{1}{R}.$$

Beleggen we het oppervlak F met een moment ter dichtheid

$$\underline{m} = i\ \underline{n},$$

dan is $d\underline{m} = i\ \underline{n}\ df$,

en dan wordt de potentiaal van de homogene dipoollaag

$$\chi = \frac{i}{4\pi}\int \underline{n}.\ \operatorname{grad}'\frac{1}{R}\ df = \phi\ .$$

Het magnetische veld van de stroomkring is dus identiek met dat van een homogene dubbellaag over F met oppervlaktedichtheid gelijk aan de stroomsterkte. Aangezien een magnetische dubbellaag physisch niet realiseerbaar is, en men wel een electrische dubbellaag kan maken, kan men ook zeggen:
het magnetische veld van de stroom i in de kromme C is identiek met het electrisch veld van een homogene dubbellaag, ter dichtheid i, die C tot rand heeft. Tot zover de physische betekenis van ϕ.

Nu de geometrische betekenis van ϕ.

Laat $\underline{R}$ zijn de vector van ds naar het veldpunt.
Dan is

$$\operatorname{grad}'\frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2}\operatorname{grad}' R = \frac{\underline{R}}{R^3}\ .$$

Men heeft dus

$$\phi = \frac{i}{4\pi}\int\frac{n.R}{R^3}\ df = \frac{i}{4\pi}\int\frac{\cos\ (\underline{n},\ \underline{R})}{R^2}\ df.$$

Als cos $(\underline{n},\ \underline{R})$ positief is, ziet men gemakkelijk in dat

$\int\frac{\cos(\underline{n},\ \underline{R})}{R^2}\ df$ gelijk is aan de ruimtehoek Ω die door C wordt opgespannen van uit het veldpunt.

Immers $d\Omega = \frac{\cos\ (\underline{n},\underline{R})}{R^2}\ df$ is juist de projectie van df op de eenheidsbol rondom het veldpunt. De integraal kan wel negatief zijn. Laat men ook negatieve ruimtehoeken toe, dan geldt dus

$$\phi = \frac{i}{4\pi}\,\Omega \qquad (18)$$

De scalaire potentiaal is dus $i/4\pi$ maal de ruimtehoek of schijnbare grootte van de stroomkring.
Aan formule (18) is duidelijk te zien dat ϕ discontinu is aan het oppervlak F. Immers, aan de positieve zijde van F (de kant waar $\underline{n}$ heen wijst) is $\Omega = \Omega_+ = 2\pi$, aan de andere kant is $\Omega = \Omega_- = -2\pi$. Dus

$$\phi_+ = \tfrac{1}{2}\, i, \quad \phi_- = -\tfrac{1}{2}\, i, \quad \phi_+ - \phi_- = i.$$

De sprong in ϕ is precies gelijk aan de stroom in C.

5. Slotopmerkingen en bibliographie

De scalaire potentiaal van een homogeen-geladen cirkelvormige schijf, met ladingsdichtheid q, is volgens (16),

$$\frac{q}{4\pi}\int \frac{df}{R} = \tfrac{1}{2}\, qa \int_0^\infty e^{-|z|t}\, J_0(rt)\, J_1(at)\, \frac{dt}{t}\,.$$

In tegenstelling tot de integralen (7), (10) en (11), is deze integraal niet uitdrukbaar in de functies K en E. We hebben voor haar berekening ook nog nodig de complete elliptische integraal van de derde soort:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 - p\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\,,$$

die van twee parameters, p en k, afhangt.

Ook voor de berekening van de ruimtehoek Ω of de daarmee evenredige scalaire potentiaal ϕ (formules (17) en (18) moet men beschikken over tabellen van deze elliptische integraal van de derde soort.

Zonder in details te willen treden, merken we nog op dat de lijnen

$$rA_\varphi = \text{constant}$$

samenvallen met de krachtlijnen. Deze magnetische krachtlijnen zijn de orthogonale trajectoriën van de oppervlakken

$$\phi = \text{constant}.$$

De inhoud van dit rapport is in wezen niet nieuw. Een summier overzicht van de literatuur is misschien gewenst, in verband met verdere berekeningen als deze nodig zouden zijn.

LITERATUUR

G.N. Watson. Theory of Bessel Functions.
Dit is het standaardwerk van Bessel functies, waarin men bijvoorbeeld formules (2) en (3) vindt bewezen.

C. Heuman. Tables of complete elliptic integrals,
J. Math. Phys. 20, 127-206, 1941.
Uitgebreide tabellen van de functies K en E, alsmede van de complete elliptische integraal van de derde soort.

C.J. Bouwkamp. On the mutual inductance of two parallel coaxial circles of circular cross-section, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam 51, 1280-1290, 1948; Ind. Math. 10, 424-434, 1948.
Hier kan men de berekening van de integralen (4), (10), (11) en vele andere, in termen van elliptische integralen vinden.

E. Weber. Electromagnetic fields. Theory and applications.
Vol I. Mapping of fields, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950.
Op pag. 140 ff. vindt men de formules (9), (12) en (13).
Verder een uitgebreide literatuuropgave.

J.P. Blewett. Magnetic field configurations due to air core coils.
J. appl. Phys. 18, 968-976, 1947.
Tabellen voor H_z.

G. Eason, B. Noble, I.N. Sneddon. On certain integrals of Lipschitz-Hankel type involving products of Besselfunctions.
Phil. Trans. Roy. Soc. London. Series A.
No. 935. Vol 247, pp. 529-551, 19 april 1955.
Talloze integralen van het type (10), (11) numeriek getabelleerd.
Ook de integralen (16) en (17). Tabellen I en II van dit rapport zijn overgenomen uit dit artikel. Voor z > 0 geldt:

$$\frac{2a}{i} H_z = a^2 \int_0^\infty e^{-zt} J_0 (rt) J_1 (at) t \, dt,$$

$$\frac{2a}{i} H_r = a^2 \int_0^\infty e^{-zt} J_1 (rt) J_1 (at) t \, dt.$$