Geometrisch paradijs

DR. G. R. VELDKAMP

GEOMETRISCH PARADIJS

J. B. WOLTERS GRONINGEN 1963

GEOMETRISCH PARADIJS

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING

VAN HET AMBT VAN GEWOON HOOGLERAAR

IN DE WISKUNDE

AAN DE TECHNISCHE HOGESCHOOL

TE EINDHOVEN

OP VRIJDAG 29 NOVEMBER 1963

DOOR

DR. G. R. VELDKAMP

J. B. WOLTERS GRONINGEN

1963

Mijne Heren Curatoren,

Mijne Heren Leden van de Senaat,

Gij allen die Uw werkkracht in dienst stelt van deze Hogeschool,

Dames en Heren Studenten

en voorts, Gij Dames en Heren die door Uw tegenwoordigheid van Uw belangstelling blijk geeft,

Zeer gewaardeerde toehoorders,

De hoogleraar die de aanvaarding van zijn ambt wenst te bezegelen met het uitspreken van een inwijdingsrede, wordt ten aanzien van de keuze van zijn onderwerp en de wijze van behandeling een grote mate van vrijheid toegestaan. Geheel ongebreideld is deze vrijheid nochtans niet, want er wordt van de spreker wel verwacht dat hij een onderwerp zal kiezen uit eigen vakgebied en dat de behandeling daarvan zal zijn aangepast aan de heterogene samenstelling van zijn gehoor. De beperking die hierdoor wordt opgelegd is niet van ernstige aard en laat nog vele mogelijkheden open. Immers, de spreker kan zijn toehoorders meenemen op een tocht die van de historie van zijn vak voert naar een punt vanwaar uitzicht op de toekomstige ontwikkeling mogelijk is, hij kan hen van de fundamentele begrippen leiden naar actuele practische toepassingen, hij kan gewagen van eigen onderzoek, of een programma ontvouwen en wegen aanduiden voor toekomstige onderzoekingen – maar evenzeer kan hij zijn gehoor boeien met een betoog over onderwijskundige problemen in het algemeen en van eigen vakgebied in het bijzonder. En hiermee is de verscheidenheid naar inhoud geenszins volledig beschreven.

Het zij mij vergund van de boven geschetste vrijheid gebruik te maken door U een gezelschapsreis aan te bieden in het rijk van de mathesis.

Wanneer het U vergaat als mij, zult ge bij het vernemen van het woord gezelschapsreis allicht enige weerstand moeten overwinnen voor ge U als deelnemer aanmeldt. Het woord toch wekt suggestie aan een vermoeiende tocht langs de grote verkeersaders met een aanzienlijk aantal onderbrekingen, bedoeld om op alle, maar dan ook alle in de folder vermelde bezienswaardigheden een vluchtige blik te slaan, met de gelegenheid – de reisleider wijst het U wel – om in de onmiddellijke omgeving van zo'n monument van cultuur, kunst of historie een prentbriefkaart – met postzegel liefst – machtig te worden voor de achtergebleven familie- of kennissenkring. Het suggereert inderhaast gebruikte maaltijden in restaurants, die doorgaans niet veel anders hebben te bieden dan een keuze uit indifferente, aan een geheimzinnige internationale smaak aangepaste spijzen. Kortom een reis waarvan ge vermoeid, verward door vele oppervlakkige indrukken, terugkeert met in Uw hart de twijfel of de organisatoren in hun prijzenswaardige ijver om U *alles* te tonen, niet hebben vergeten om U *iets* te laten zien van het land dat ge bereisde.

Geachte toehoorders, ik kan U op dit punt, zoal niet volledig, dan toch wel enigermate geruststellen: onze reis zal een ietwat ander karakter hebben. Wij zullen met voorbijgaan van veel schoons dat aan de grote verkeersweg valt te zien, een secundaire weg inslaan die voert naar een weinig uitgestrekt en ietwat achteraf gelegen terrein van de wiskunde, een terrein waar wij misschien te voet moeten gaan, maar dat toch zoveel aantrekkelijks biedt, dat het wel eens het „paradijs van de meetkundigen" is genoemd. In dit gebied, dat met een vakterm *kinematica* wordt geheten, wil ik in dit uur met U een bescheiden rondwandeling maken. Het zal een pretentieloze voettocht zijn waarbij wij soms wellicht een korte wijle toeven op een bijzonder fraai gelegen punt, of een blik werpen op zeldzaam gewas dat zich binnen onze gezichtskring voordoet; het kan ook zijn dat wij eens stilstaan bij een historisch monument, of daarentegen onze pas versnellen op een plek waar de omringende begroeiing al te veel doornen vertoont.

De naamgeving alsook de afbakening van het terrein danken we aan ANDRÉ-MARIE AMPÈRE, die in zijn in 1838 verschenen *Essai sur la philosophie des sciences* [1][1] het woord *cinématique* gebruikt voor de wetenschap die bewegingen bestudeert om der wille van de bewegingen zelve, dus geheel los van de krachten waardoor zij worden voortgebracht, bewegingen van vaste lichamen zoals wij die om ons heen kunnen waarnemen, bewegingen speciaal ook die optreden in stelsels die men machines pleegt te noemen. Aldus AMPÈRE in de taakomschrijving van het vak dat wij in navolging van hem nog steeds met de naam kinematica, bewegingsleer, aanduiden.

De omschrijving die AMPÈRE geeft, is ruim. Wij willen ons ietwat beperken en geen andere lichamen in onze beschouwingen betrekken dan zulke die *star* zijn. Met een star lichaam bedoelen we een lichaam met de eigenschap dat de afstand tussen elk tweetal van zijn punten onder alle omstandigheden onveranderd blijft. Wij idealiseren dus doende de wer-

1. Getallen tussen teksthaken verwijzen naar literatuurlijst aan het eind van dit geschrift.

kelijkheid. Voorts zullen we voorlopig alleen *vlakke bewegingen* beschouwen. Wat hiermee bedoeld wordt, kan ik U het eenvoudigst verklaren door U te verzoeken in Uw verbeelding plaats te nemen aan een tafel met een redelijk vlak blad. Op deze tafel denkt U zich een stevig vel tekenpapier geheel vlak uitgespreid. Dit vel tekenpapier kunt U nu over het tafelblad verschuiven. U hebt dan te doen met twee platte vlakken die voortdurend samenvallen: het vlak van de tafel dat in rust is, en dat we dan ook *het vaste vlak* zullen noemen en het vlak van het papier dat ge, geheel naar Uw wil, ten opzichte van het vaste vlak kunt laten bewegen en dat we daarom gevoeglijk *het bewegende vlak* mogen noemen.

Deze eenvoudige voorstelling van een vlakke beweging is al voldoende om een gesprek te openen over allerlei vragen, waarvoor men zich in de kinematica interesseert.

Laten wij allereerst enkele woorden wijden aan twee bijzondere bewegingsvormen. Men kan één punt van het bewegende vlak vasthouden; de beweging is dan een *rotatie* om dit punt en de banen van alle overige punten zijn cirkels met dit punt – het rotatiecentrum – als middelpunt. Op elk tijdstip is de snelheid van een punt van het bewegende vlak recht evenredig met de afstand van dit punt tot het rotatiecentrum en de snelheid is gericht loodrecht op de lijn die het betrokken punt met het rotatiecentrum verbindt.

Een andere bewegingsvorm is de *translatie*; deze treedt op, als bij de beweging een rechte van het bewegende vlak zich voortdurend evenwijdig aan zichzelf verplaatst, dus gedurende de beweging dezelfde richting blijft behouden. Het is gemakkelijk in te zien, dat dit dan voor iedere rechte in het bewegende vlak geldt en dat op een bepaald tijdstip alle punten dezelfde snelheid (zowel naar grootte als naar richting) bezitten.

Deze twee bewegingsvormen zullen we in het vervolg maar als triviale bewegingen aanduiden.

Keren we terug naar ons tekenpapier. Wij prikken er ergens een gaatje in. Bij de beweging van het papier over het tafelblad houden we dit gaatje in het oog. We merken op dat het een baan beschrijft, die bepaald wordt door de wijze, waarop we het papier bewegen. Is echter omgekeerd de baan bekend van het punt van het bewegende vlak dat door dit gaatje wordt vertegenwoordigd, dan is er natuurlijk nog geen sprake van dat daardoor de beweging van dit vlak bepaald is. Integendeel, als het gaatje in een zeker punt van zijn baan gekomen is, kan het bewegende vlak nog alle standen innemen die door een draaiing om dit punt uit elkaar ontstaan. Zijn evenwel van twee punten van het bewegende vlak de banen gegeven, dan is de beweging van dit vlak wel bepaald, in zoverre althans dat in dit geval alle standen die het vlak tijdens de beweging inneemt, bekend zijn. Niet bekend zijn daarentegen de tijdstippen waarop die standen worden ingenomen. Men kan dit zo formuleren dat nu de beweging *los van de tijd* bekend is.

Zo kunnen we dus bijvoorbeeld twee hoekpunten van ons vel papier laten glijden langs twee loodrecht op elkaar staande zijkanten van het tafelblad. Twee punten van het bewegende vlak – laten we ze A en B noemen – beschrijven dan elk voor zich een rechtlijnige baan en de twee rechten waarop deze banen liggen, staan bovendien nog loodrecht op elkaar. Omdat de rechte lijn toch wel de meest eenvoudige van alle krommen is, mogen we de thans verkregen beweging stellig wel als de meest simpele van alle niet-triviale bewegingen beschouwen. Zij heet de elliptische beweging. De naam is ontleend aan een van haar eigenschappen – die de wiskundige gemakkelijk voor ons kan bewijzen – en wel deze, dat nagenoeg elk punt van het bewegende vlak een ellips doorloopt. Nagenoeg elk punt, want er zijn uitzonderingen. In de eerste plaats beschrijft het midden van AB een cirkel en in de tweede plaats bewegen alle punten die in het bewegende vlak liggen op de cirkel met AB tot middellijn, zich langs een rechtlijnige baan. Het merkwaardige is, dat de eigenschap, dat vrijwel elk punt van het bewegende vlak een ellips doorloopt, nog steeds geldt als de lijnen waarlangs A en B zich bewegen niet loodrecht op elkaar staan; zij moeten elkaar echter wel snijden. Het is wederom de meetkundige die ons dit kan verklaren; hij weet ons nu namelijk ook weer tweetallen punten in het bewegende vlak aan te wijzen, die onderling loodrechte rechtlijnige banen beschrijven. Bepaald schriel toont hij zich daarbij niet, want hij laat ons nog de keuze uit oneindig veel van die tweetallen.

Een andere (in het algemeen niet-triviale beweging) kunnen we het bewegende vlak opdringen door twee punten A en B ervan niet-concentrische cirkels te laten beschrijven opvolgend met middelpunten A_0 en B_0. De banen die bij deze beweging ontstaan, vertonen een voor het oog zeer gevarieerde vorm; het zijn echter alle (uitgezonderd natuurlijk die van de punten A en B) tricirculaire krommen van de zesde graad. Zij bezitten drie reële speciale brandpunten, waarvan A_0 en B_0 er twee zijn en (in 't algemeen) drie tweevoudige punten. De drie speciale brandpunten en de genoemde tweevoudige punten liggen op één cirkel en vertonen daarop nog een bijzondere ligging die voor het eerst door CAYLEY is beschreven [2]. Uit deze opsomming moge blijken dat de baankrommen, die hier ook *koppelkrommen* worden genoemd, vergeleken bij die van het voorafgaande voorbeeld van zeer ingewikkelde aard zijn. Ze zijn veelvuldig bestudeerd o.a. door DARBOUX, REINHOLD MÜLLER, BENNET, MORLEY en WEISS; in onze taal is er een monografie van GROENMAN[3].

Het is niet moeilijk de boven beschreven beweging materieel te verwezenlijken met behulp van een *stangenvierzijde*. Dit is een vlakke vierhoek $A_0B_0\,BA$ waarvan de zijden gevormd worden door vier stangen, die in de hoekpunten scharnierend met elkaar zijn verbonden, zodanig dat alleen beweging mogelijk is in het eigen vlak van de vierhoek. De stang A_0B_0 wordt vastgehouden en vormt zodoende het gestel van het mechanisme; de punten A en B kunnen nu slechts cirkels (of althans delen daarvan) beschrijven. Het bewegende vlak is vast verbonden met de *koppelstang* of het *koppel* AB en valt natuurlijk samen met het vlak van de vierhoek. Het punt C van het bewegende vlak waarvan men de baan wenst te beschouwen (het zogenaamde *koppelpunt*) kan materieel worden vastgelegd door het middels twee verdere stangen met A en B te verbinden.

Van historisch standpunt gezien is het aantrekkelijk nog Uw aandacht te vragen voor een zeer bijzondere koppelkromme. Deze ontstaat als men de zijden A_0A en B_0B van de stangenvierzijde dezelfde lengte geeft en bovendien het koppelpunt C laat samenvallen met het midden van de koppelstang AB. In dit geval doorloopt C (triviale gevallen uitgesloten) een koppelkromme die de gedaante heeft van een meer of minder slanke 8. Bij een geschikte keuze van de lengten der stangen is de baan van C in de buurt van het dubbelpunt van de 8 bij zeer goede benadering en over een relatief grote afstand een deel van een rechte lijn. We hebben dan de vermaard geworden en in 1784 door JAMES WATT gevonden rechtgeleiding voor ons, die hij toepaste in zijn stoommachine. WATT zelf sloeg deze vinding bijzonder hoog aan. De historie vermeldt namelijk dat hij jaren na zijn ontdekking van dit mechanisme aan zijn zoon toevertrouwde: „Though I am not over anxious after fame, yet I am more proud of the parallel motion (want onder deze naam werd zijn vinding al spoedig bekend) than of any other mechanical invention I have ever made" [4]. En hij had toch zo wel enige „inventions" op zijn naam staan!

De rechtgeleiding van WATT is een benaderde, geen exacte, want een koppelkromme is nu eenmaal overal gekromd en nergens recht. Na hem zijn andere benaderde rechtgeleidingen met behulp van vierstangenmechanismen bekend geworden; zij zijn verbonden met de namen van RICHARD ROBERTS, OLIVER EVANS, de grote russische wiskundige TSCHEBYSCHEFF en anderen.

Een pikante bijzonderheid kan men het noemen, dat reeds in een werk [5] verschenen in 1769, dus 15 jaren voordat de vinding van WATT gepatenteerd werd, een benaderde rechtgeleiding staat afgebeeld als onderdeel van een machine die dienst moest doen om onder water palen af te zagen. Merkwaardig wordt de zaak als men verneemt dat ROBERT WILLIS juist *deze* rechtgeleiding toeschrijft aan RICHARD ROBERTS die in 1798 werd geboren en wiens naam ook nu nog met de bedoelde rechtgeleiding is verbonden [6]. Maar hoogst merkwaardig is het stellig dat op geen der tekeningen die deze ROBERTS overlegde bij het verkrijgen van de 15 patenten die op zijn naam staan, een andere rechtgeleiding voorkomt dan juist die van WATT, deze laatste op een tekening behorende bij een patent van 1832 betrekking hebbend op een stoommachine en een „locomotive carriage".

Ook wat OLIVER EVANS aangaat is het aan gegronde twijfel onderhevig of hij de geestelijke vader is van de rechtgeleiding die wij met zijn naam verbinden. Laten wij daarom, voor wij ons in de doornstruiken van de historie geheel vastwerken, terugkeren naar het meer vertrouwde en misschien ook betrouwbaarder pad der theoretische kinematica. Dat het probleem om met behulp van een stangenmechanisme een rechtgeleiding te construeren na WATT ook de theoretici interesseerde – en niet de eersten de besten onder hen – hebt U reeds kunnen bevroeden, toen U mij daareven de naam TSCHEBYSCHEFF hebt horen noemen. Het is metterdaad zo dat deze wiskundige, te beginnen in 1853, gedurende een dertigtal jaren met meer of minder lange onderbrekingen over het probleem publiceerde en daarbij tegelijk ook de generalisatie ervan – het benaderen van een gegeven kromlijnige baan – in zijn beschouwingen heeft betrokken [7]. De onderzoekingen van TSCHEBYSCHEFF leidden niet alleen voor de kinematica tot een tweetal nieuwe vormen van benaderde rechtgeleidingen, zij hadden als nevenresultaat nu juist dat, waaraan ieder wiskundige bij het horen van de naam TSCHEBYSCHEFF het eerst denkt, namelijk de welbekende naar hem genoemde polynomen uit de analyse. Er zullen onder U zijn – de meetkundigen wellicht – die mij toevoegen: „Hoe nu, in de aanvang hebt ge ons de kinematica voorgesteld als het paradijs der meetkundigen, en nu gewaagt ge van een verwantschap tussen kinematica en analyse? Of is dit dan wellicht zo'n zeldzaam gewas waarop ge zinspeelde".

Waarde toehoorders, laat ik voorlopig met een tegenvraag mogen antwoorden. Komt het niet vaak voor dat in een fraai aangelegde siertuin een hoekje is uitgespaard voor nederige kruiden, geneeskrachtige, die gebruikt worden in gevallen van nood en andere, die, in minieme hoeveelheid toegevoegd aan eenvoudige spijs, het nuttigen daarvan boven het alledaagse uitheffen?

Na deze uitweiding over benaderde rechtgeleidingen kan ik niet na-laten in het kort nog iets te vermelden over hun adellijke verwanten, de exacte rechtgeleidingen.

De eerste exacte rechtgeleiding danken we aan PEAUCELLIER, een frans genie-officier, die in een brief die hij in 1864 richtte aan de redactie van de *Nouvelles Annales de mathématiques* [8] meedeelde dat hij in staat was een stangenmechanisme te construeren dat zo'n rechtgeleiding bewerkstelligde. Het schijnt dat zijn mededeling weinig opzien verwekte en door allerlei omstandigheden waarop ik niet kan ingaan kon pas 10 jaar later aan de engelse mathematicus SYLVESTER het genoegen te beurt vallen de vinding van PEAUCELLIER onder de algemene aandacht te brengen. Het geschiedde op een vrijdag, op twee maanden na 90 jaar geleden – in Januari 1874. „Albemarle Street in London was filled with carriages, each maneuvering to unload its charge of gentlemen and their ladies at the door of the venerable hall of the Royal Institution. Amidst a „mightly rustling of silks" the elegant crowd made its way to the auditorium for one of the famous weekly lectures" [9]. Mocht er al enige overeenkomst bestaan met het heden dan strekt deze zich niet verder uit dan tot het parkeerprobleem en de élégance van het gehoor.

SYLVESTER dan houdt een lyrisch betoog over de rechtgeleiding van PEAUCELLIER – een mechanisme van 7 stangen, het gestel niet meegerekend, zoals dat in die dagen de gewoonte was. De hooggestemde voordracht wordt zo nu en dan onderbroken door het vermelden van enkele practische toepassingen. Zo laat de spreker zijn gehoor o.a.weten dat het mechanisme gebruikt is bij de constructie van de machines, die de ventilatie in de parlementsgebouwen verzorgen en – zo zegt hij – „these engines proved to be exceptionally quiet in their operation". SYLVESTER voegt hieraan toe dat hij geen enkele reden ziet, waarom het mechanisme niet met gelijk voordeel zou kunnen worden gebruikt in „ordinary waterclosets". Van iets minder practische zin getuigt zijn mededeling dat hij – SYLVESTER – een mechanisme met 78 stangen heeft bedacht, dat een exacte rechtgeleiding waarborgt langs de lijn die de beide gestelpunten verbindt [10]. Aan de voordracht is een noot toegevoegd die ons eens te meer verraadt met welk een geestdrift SYLVESTER de vinding van PEAUCELLIER bij zijn toehoorders moet hebben geïntroduceerd. Hij vermeldt daarin o.a. een ervaring die hij enige dagen te voren in zijn club opdeed, toen hij een model van het mechanisme toonde aan een vriend. Nadat deze er enige tijd aan had gedraaid en SYLVESTER het terug wilde nemen, riep zijn vriend afwerend: „No! I have not had nearly enough of it – it is the most beautiful thing I haver ever seen in my life". Deze vriend was SIR WILLIAM THOMSON, de latere baron

KELVIN. Aangespoord door deze ervaring van SYLVESTER heb ik een model van het mechanisme meegebracht. Wellicht zijn er onder U die zoveel met KELVIN gemeen hebben dat zij aanstonds ook eens aan het model gaan draaien. Het zal U na al wat ik heb gezegd duidelijk zijn geworden dat van de door AMPÈRE als wetenschap geïntroduceerde kinematica en haar zuster de leer der mechanismen een aantrekkingskracht uitgaat die ook de groten onder de wiskundigen maar moeilijk kunnen weerstaan. En nu hebben wij nog slechts één klein facet onder de loupe genomen. Immers in al onze beschouwingen is nog nimmer sprake geweest van de *tijd* en deze zal toch ongetwijfeld in de bewegingsleer ook wel een rol spelen. Reeds in 1873 gaf TSCHEBYSCHEFF aan SYLVESTER de raad: „Take to kinematics. It will repay you. It is more fecund than geometry; it adds a fourth dimension to space" [9].

Laten we daarom nogmaals terugkeren naar ons vel tekenpapier. Het beweegt, en als de beweging een triviale is, weten we op elk moment nauwkeurig aan te geven hoe het met de snelheid van elk punt gesteld is, dat wil zeggen: als wij op een bepaald ogenblik de snelheid van één enkel punt kennen, kunnen we die van elk ander punt (op dat moment) aangeven. Met een vakterm uitgedrukt: de snelheidsdistributie is bekend.

Wanneer wij een niet-triviale beweging op een bepaald moment beschouwen, blijken er maar twee gevallen mogelijk te zijn: er is één punt van het bewegende vlak dat de snelheid nul heeft en dat de *snelheidspool* wordt genoemd, of alle punten van het vlak hebben dezelfde snelheid. In het eerste geval is de snelheidsdistributie op het beschouwde ogenblik die van een rotatie met de snelheidspool als centrum, in het tweede geval stemt zij overeen met die van een translatie. Het begrip snelheidspool hebben we te danken aan JOHANN BERNOULLI [11] doch de grote betekenis van dit begrip voor de snelheidsanalyse bij mechanismen is voor het eerst in het licht gesteld door RANKINE, de meest begaafde technicus wellicht uit het midden van de vorige eeuw. Bij de beweging van Uw papier is het niet voortdurend hetzelfde punt dat snelheidspool is. Evenmin valt dit punt gedurig met hetzelfde punt van de tafel samen. Het is dus zo dat de punten van het papier die gedurende de beweging de eer genieten – elk op zijn eigen tijdstip – als snelheidspool te fungeren, zich aaneenrijen tot een kromme op het papier – de *bewegende poolkromme*. Op de tafel voegen zich de punten die in de loop van de beweging door een punt van het papier dat snelheidspool is worden bedekt, aaneen tot een kromme, die de *vaste poolkromme* heet. Op elk ogenblik raken deze twee krommen elkaar en wel in het punt dat op dit ogenblik snelheidspool is en men kan bewijzen dat tijdens de beweging de bewegende poolkromme zonder glijden langs de vaste rolt. Alle bewegingen hoe verscheiden ook onderling, kunnen dus naar één beginsel worden voortgebracht. Naast de snelheidsverdeling is ook de versnellingsverdeling van groot belang. Wiskundige beschouwing leert dat hiervoor analoge wetten gelden als voor de snelheidsverdeling. Zonder hier nader op in te gaan vermeld ik alleen dat er in dit geval in 't algemeen één punt van het bewegende vlak is – de versnellingspool – dat de versnelling nul bezit. Al deze resultaten hebben zoals U bemerkt betrekking op een momentopname van de beweging; zij horen thuis in de *instantane kinematica*. Zij staan met vele andere de werktuigbouwkundige ten dienste bij de analyse van mechanismen. Hij aanvaardt ze in dankbaarheid en gebruikt ze toegespitst op zijn problemen en dikwijls ook getransformeerd in grafische methoden, veelvuldig. Natuurlijk kan hij er niet mee tevreden zijn, want naast analyse en perfectionering van bestaande mechanismen behoort tot zijn terrein ook het scheppen van nieuwe mechanismen, bestemd om van te voren gestelde taken te volbrengen. Deze *synthese van mechanismen* is vooral in de afgelopen 30 jaar meer en meer in de belangstelling komen te staan. Voortbouwend op de door hun landgenoot ALT gelegde grondslagen [12] hebben vooral duitse theoretici en practici belangrijke bijdragen geleverd op dit grensgebied tussen de theoretische kinematica en de praktijk van het construeren van mechanismen. Het is een gebied vol voetangels en klemmen, waar de methoden van de instantane kinematica, zonder geheel onbruikbaar te zijn, niet veel succes opleveren. Laat ik dit iets nader mogen toelichten. Het kan voorkomen dat de werktuigbouwkundige voor het probleem wordt gesteld een stangen-mechanisme te ontwerpen dat in staat moet zijn het bewegende vlak in een aantal – zeggen wij vijf – nauwkeurig voorgeschreven posities te brengen. Misschien zou SYLVESTER kans zien dit te bereiken met een mechanisme van 78 stangen. Onze werktuigbouwkundige koestert echter – terecht – enige twijfel of zo'n mechanisme wel zal functioneren en hij is er dan ook op uit het met enige stangen minder te doen. Een nadere beschouwing van het probleem, waarop ik hier niet in ga, maar die populair gezegd neerkomt op het vergelijken van het aantal optredende onbekenden met het aantal betrekkingen waaraan zij moeten voldoen, leert hem dat in beginsel een stangenvierzijde de gestelde taak kan vervullen. Het bewegende vlak moet dan dus het koppelvlak van deze stangenvierzijde worden. Maar dan moeten er dus in dit vlak tenminste twee punten A en B kunnen worden gevonden, die in de voorgeschreven vijf standen elk op één cirkel liggen. De middelpunten A_0 en B_0 van deze cirkels zijn dan de gestelpunten en de stangenvierzijde is geheel bepaald. Het lijkt eenvoudig – maar zijn er zulke punten A en B?

Hierop geeft de kinematica een ondubbelzinnig antwoord. Wanneer namelijk vier standen van een bewegend vlak zijn voorgeschreven, zijn er oneindig veel punten die in deze vier standen op één cirkel liggen. Al deze punten liggen op een kromme van de derde graad die de cirkelpuntskromme heet en die men punt voor punt kan construeren. Dit betekent dus het volgende: als C een punt van deze kromme is en als dit punt in de vier gegeven standen opvolgend samenvalt met de punten C_1, C_2, C_3 en C_4 van het vaste vlak dan liggen deze vier punten op één cirkel. Welnu dan zijn we dus met onze 5 standen ook klaar. We construeren eenvoudig voor de standen 1 tot en met 4 de bijbehorende cirkelpuntskromme en voor de standen 2 tot en met 5 eveneens. Dan hebben we twee krommen in het bewegende vlak en de snijpunten daarvan zijn punten die in de gegeven 5 standen op één cirkel liggen. Twee krommen van de derde graad hebben $3 \times 3 = 9$ snijpunten en er is dus nog keuze. Zo simpel is het nu ook weer niet. De theorie leert dat de beide krommen altijd dezelfde twee imaginaire snijpunten hebben en dat van de 7 overige snijpunten er nog drie illegaal zijn geïnfiltreerd. Zodoende blijven er nog vier bruikbare snijpunten – *de punten van* BURMESTER – over. Het is niet uitgesloten dat ze alle vier imaginair zijn en dan is er geen stangenvierzijde die aan de vraag voldoet. Laten we evenwel aannemen dat de bedoelde punten reëel zijn; dan kunnen twee ervan als uiteinden A en B van de koppelstang worden gekozen; de middelpunten van de cirkels waarop A en B in de 5 posities van het bewegende vlak liggen zijn de gestelpunten. De meetkundige heeft dus het probleem opgelost, niet met hulpmiddelen uit de instantane kinematica doch met behulp van theorema's uit de *kinematica van de discrete standen.* Nu is *opgelost* een groot woord, want als we nagaan wat er in concreto moet geschieden om op deze manier de vier punten van BURMESTER te vinden, zijn er nog wel ernstige bedenkingen te maken. Immers, er moeten twee krommen worden gevonden die alleen punt voor punt kunnen worden geconstrueerd en vervolgens moeten hiervan de snijpunten worden aangewezen. Het is duidelijk dat op deze manier talrijke onnauwkeurigheden insluipen die het eindresultaat ongunstig beïnvloeden. Wil men toch deze constructieve methode volgen en daarbij onnauwkeurigheden zoveel mogelijk beperken, dan zou men in soortgelijke problemen – hier kan dat niet – moeten trachten het zo in te richten, dat de derdegraadskromme die men nodig heeft, ontaardt in een rechte lijn en een cirkel of een hyperbool desnoods – een handelwijze die dan ook bij de synthese van mechanismen niet ongewoon is. Men kan evenwel ook in zoverre van de constructieve methode afstappen, dat men de handelingen van de geometer op de voet laat volgen door rekenwerk. Het is inderdaad in principe mogelijk de vergelijkingen op te stellen van de krommen die hij gebruikt en uit deze vergelijkingen de gevraagde onbekenden op te lossen. Meestal is dit tijdrovend, zo al niet praktisch onuitvoerbaar. Het enige redmiddel is dan de rekenmachine en deze wordt dan ook voor het oplossen van vraagstukken die op de synthese van mechanismen betrekking hebben hoe langer hoe meer ingeschakeld. Zoals echter dikwijls het geval is: het gebruik van een nieuw hulpmiddel roept nieuwe vragen op. Als men gaat rekenen moet men het ook efficient doen en een programma opstellen waarbij men precies vindt wat gevraagd wordt. In het zojuist besproken voorbeeld verkreeg de geometer afgezien van de twee imaginaire, nog drie andere infiltranten en als men zijn methode numeriek volgt, vindt men deze ook bij de berekening. Recent onderzoek heeft methoden opgeleverd waarbij men als resultaat uitsluitend de punten van BURMESTER vindt en wel als snijpunten van twee kegelsneden. Een van deze methoden – afkomstig van BOTTEMA – heeft nog wel het speciale voordeel dat men voor het verstaan van de theoretische fundering ervan in 't geheel geen kennis behoeft te dragen van de oudere resultaten omtrent cirkelpuntskrommen, middelpuntskrommen en wat dies meer zij [13].

Dit is slechts één voorbeeld waarbij numerieke methoden met voordeel kunnen worden toegepast; er zijn vele andere te geven ook wel op het gebied van de instantane kinematica. Het schijnt dus dat de geometer uit het paradijs wordt verdreven. „Hij heeft het er naar gemaakt", zult ge zeggen „als hij zich vergrijpt aan het opstellen van programma's voor computers". Waarschijnlijk zal hij zich zijn verbanning – waarin ik overigens nog niet geloof – niet al te zeer aantrekken. Immers, is het niet zijn dagelijks werk zich nieuwe ruimten te scheppen? En bovendien, de vlakke kinematica is niet het enige gebied waar hij zich in meetkundig spel kan uitleven. De kinematica van de driedimensionale ruimte – onvergelijkbaar veel moeilijker dan die van het platte vlak – biedt hem daartoe nog gelegenheid te over. En mocht hij daarvan genoeg krijgen dan kan hij zich nog altijd terugtrekken in het hyperbolische vlak, waar de synthese van mechanismen hem waarschijnlijk wel niet zal achtervolgen. Ook kan hij kinematica gaan bedrijven op het gewone boloppervlak, een boeiend spel, waarvan de regels naast veel overeenkomst toch ook verrassende afwijkingen vertonen van die der vlakke kinematica. Zijn bespiegelingen hebben naar het U toeschijnt weinig nut voor de praktijk? Misschien hebt U gelijk, maar gun hem in ieder geval het privilege zich in al deze onderdelen te verdiepen, met te meer vrijmoedigheid kunt ge U later nog eens tot hem wenden als er onontkoombaar gerekend moet worden. Voor het ogenblik laten wij hem zijn gang gaan en wij laten hem achter in zijn paradijs nu onze rondwandeling daar ten einde is gekomen.

Zeer gewaardeerde toehoorders,

Aan Hare Majesteit de Koningin moge ik mijn eerbiedige dank betuigen voor de benoeming tot hoogleraar aan deze hogeschool.

Mijne Heren Curatoren,

Jegens U spreek ik mijn erkentelijkheid uit voor het vertrouwen dat Gij hebt getoond door mij voor dit ambt voor te dragen. Ik hoop naar beste vermogen mede te werken aan de bloei van de Eindhovense hogeschool. Al zal het mij niet gegeven zijn deze jonge zuster van „Delft" als gerijpte vrouw te zien, toch hoop ik haar nog eens te aanschouwen in het eerste stadium van volwassenheid.

Mijne Heren Leden van de Senaat,

Dat ik in Uw kring word opgenomen en met U mag samenwerken in dienst van het Technisch Hoger-Onderwijs in het algemeen en van deze Hogeschool in het bijzonder beschouw ik als een voorrecht.

Dames en Heren Leden en medewerkers van de onderafdeling der Wiskunde,

Ik moge hier de hoop uitspreken voor een harmonische samenwerking op dat gebied van onderwijs en wetenschap waarvoor aan ons de speciale verantwoordelijkheid is toevertrouwd. De wijze waarop Gij mij in Uw kring hebt ontvangen wettigt de verwachting dat deze hoop in vervulling kan gaan.

Mijne Heren Leden van de afdeling der Werktuigbouwkunde,

Een deel van mijn onderwijstaak is fundamenteel voor dat deel van de techniek, dat door een aantal van U wordt beoefend. Onze belangstellingssferen vertonen aanrakingspunten en er zijn grensstroken waar wij elkaar bij wijle ontmoeten. Als niet-technicus hoop ik veel van Uw kennis te mogen profiteren. Omgekeerd zal het mij een genoegen zijn de theoretische grondslagen op zodanige wijze en in zodanige omvang bloot te leggen als Gij in verband met Uw grotere kennis van de praktijk wenselijk acht.

Dames en Heren vrienden uit mijn Delftse jaren,

Welk een groot voorrecht ik het acht, U hier op dit uur aanwezig te zien, moge blijken uit de wijze waarop ik U begroet. Gedurende een vijftiental jaren heb ik het genoegen gesmaakt in een werkkring vol afwisseling de Delftse Hogeschool te dienen. Op dit ogenblik denk ik in dankbaarheid vermengd met enige weemoed aan deze periode terug. Ik houd mij dan ook – juist nu de grote rivieren ons voortaan zullen scheiden – van harte in Uw vriendschap aanbevolen.

Dames en Heren Studenten,

Bij een oratie wordt Gij het laatst toegesproken. Ik heb met deze traditie niet willen breken doch acht haar niettemin weinig in overeenstemming met de belangrijkheid van de positie die Uw groep in het bestel der Hogeschool toekomt. Gij zijt hier gekomen om U te bekwamen op een of ander gebied van de technische wetenschap. Ook in dit door U gekozen gebied zal ergens een paradijs blijken te liggen. Het is nu nog niet zichtbaar en pas na een gedegen voorbereidende studie zult Ge er een glimp van ontwaren. Het is mijn taak U tijdens deze studie bij te staan en Gij kunt dan ook van mijn steun verzekerd zijn. Vergeet echter nimmer dat deze steun zonder Uw actieve medewerking weinig kan uitwerken.

Ik heb gezegd.

1. AMPÈRE, ANDRÉ-MARIE, *Essai sur la philosophie des sciences, une exposition analytique d'une classification naturelle de toutes les connaissances, humaines*, 2 dln., Parijs 1838 dl. I, blz. 51/52.

2. CAYLEY, ARTHUR, Three bar-motion, *Proc. London Math. Soc.* VII, blz. 136–166 (1876).

3. GROENMAN, J.T., *Behandeling van de koppelkromme met isotrope coördinaten.* (Diss.), Delft 1950.

4. MUIRHEAD, JAMES P., *The Origin and Progress of the Mechanical Inventions of* JAMES WATT, Londen 1854, dl. 3, blz. 89.

5. PATTE, PIERRE, *Memoirs sur les objets les plus importants de l'architecture*, Parijs 1769, plaat 11.

6. WILLIS, ROBERT, *Principles of Mechanism*, Londen 1841, blz. 411.

7. *Oeuvres de* P. L. TSCHEBYSCHEFF, St. Petersburg 1899–1907, dl. 1, blz. 538; dl. 2 blz. 57, 85, 93.

8. *Nouvelles Annales de mathématiques*, sér. 2, dl. 3 blz. 414–415.

9. FERGUSON, EUGENE S., *Kinematics of Mechanisms from the time of Watt*, Smithsonian Institution (1962) blz. 205/206.

10. SYLVESTER, JAMES JOSEPH, Recent Discoveries in Mechanical Conversion of Motion, *Notices of the Proc. of the Royal Inst. of Great Britain*, 1873–1875, dl. 7, blz. 193.

11. BERNOULLI, JOHANNIS, *Opera Omnia*, Lausanne 1742, dl. 4, blz. 265 („De Centro Spontaneo Rotationis").

12. ALT H., Zur Synthese der ebenen Mechanismen, *Z. angew. Math. u. Mech.* dl. I (1921), blz. 377.

13. BOTTEMA, OENE, On the Determination of Burmester points for five positions of a moving plane, Voordracht gehouden voor het *Advanced Science Seminar on Mechanisms*, July 6–Aug. 3, 1963, *Yale University, New Haven, Conn.*