

Het bepalen van een krommingsprofiel van een ketel

Citation for published version (APA):

Morsche, ter, H. G. (1993). *Het bepalen van een krommingsprofiel van een ketel*. (IWDE report; Vol. 9308). Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1993

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.



Technische
Universiteit
Eindhoven

Instituut Wiskundige Dienstverlening Eindhoven

Rapport IWDE 93 - 08

**Het bepalen van een krommingsprofiel
van een ketel**

H.G. ter Morsche

maart 1993



Den Dolech 2
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

INSTITUUT WISKUNDIGE DIENSTVERLENING EINDHOVEN

Rapport IWDE 93 - 08

Het bepalen van een krommingsprofiel van een ketel

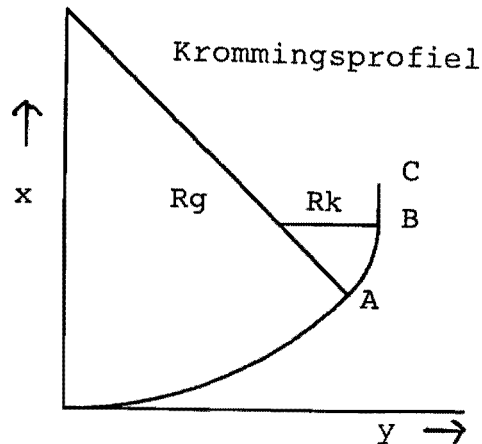
H.G. ter Morsche

maart 1993

Het bepalen van een krommingsprofiel van een ketel

Probleembeschrijving

Het krommingsprofiel van een ketel bestaat uit twee cirkelbogen en een rechte lijn, die glad aansluiten als weergegeven in onderstaande tekening.



Met behulp van laser-technieken is men in staat coördinaten van punten op het profiel t.o.v. een te kiezen assenstelsel te meten.

Het probleem is op basis van de meetpunten nauwkeurige schattingen te geven voor de in eerste instantie onbekende parameters $1/R_g$ en $1/R_k$, i.e., de krommingen van de twee cirkelbogen, en bovendien voor de locaties van A en B . De schattingen dienen rekening te houden met eventuele meetfouten in de coördinaten van de gemeten punten.

Experimentele analyse van enkele wiskundige methoden

Wiskundige methoden die toegepast kunnen worden om op een efficiënte manier nauwkeurig schattingen te vinden is natuurlijk afhankelijk van de hoeveelheid informatie over de meetpunten.

Als men weet van welke delen van het profiel (de twee cirkelbogen en de rechte) de meetpunten afkomstig zijn, dan ligt het voor de hand om bijvoorbeeld met kleinste kwadratenmethoden de krommingen van afzonderlijke delen van het profiel vast te leggen om vervolgens de locaties van A en B te berekenen. Echter de nauwkeurigheid waarmee A en B dan berekend kunnen worden is een zorg. Het is zeer wel mogelijk dat bijvoorbeeld de gevonden cirkelbogen, vanwege de meet- en rekenfouten, geen snijpunt hebben. Het berekenen van A en B is slecht geconditioneerd.

Een volgende methode, die de slechte conditie van het bepalen van A en B kan vermijden, is een zogenaamde running least square methode.

1 Running least square methode

De meetpunten, zeg, $(x_i, y_i), i = 0, \dots, N$ worden verdeeld in elkaar overlappende segmenten van telkens $2m + 1$ punten:

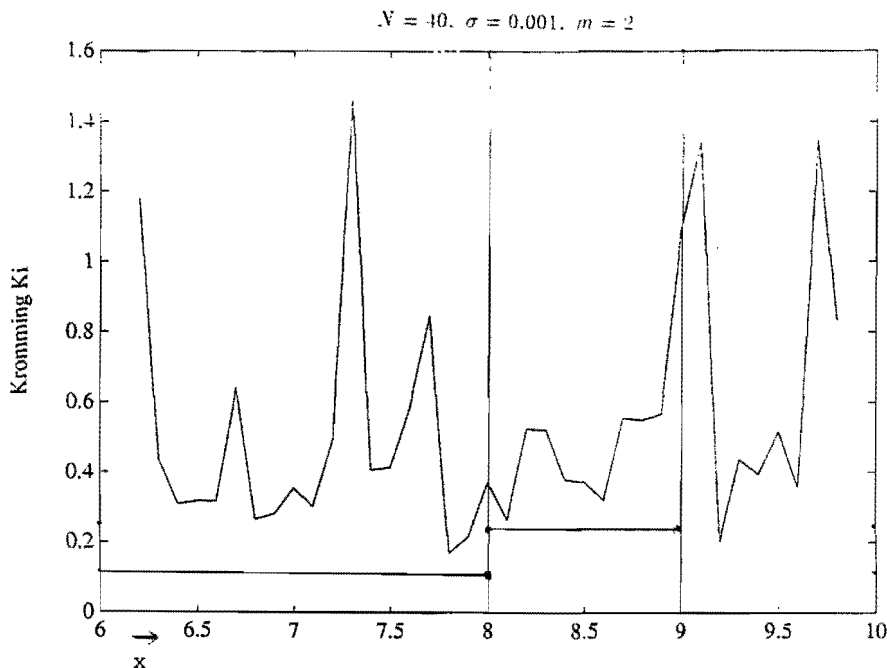
$$\{x_{i-m}, \dots, x_i, \dots, x_{i+m}\} \quad (i=m, \dots, N-m).$$

Bij ieder segment wordt een cirkel berekend, die in de zin van kleinste kwadraten het beste past bij de gegeven data in het segment. Aan ieder segment wordt op deze manier een kromming K_i toegekend als benadering van de kromming van het profiel in x_i .

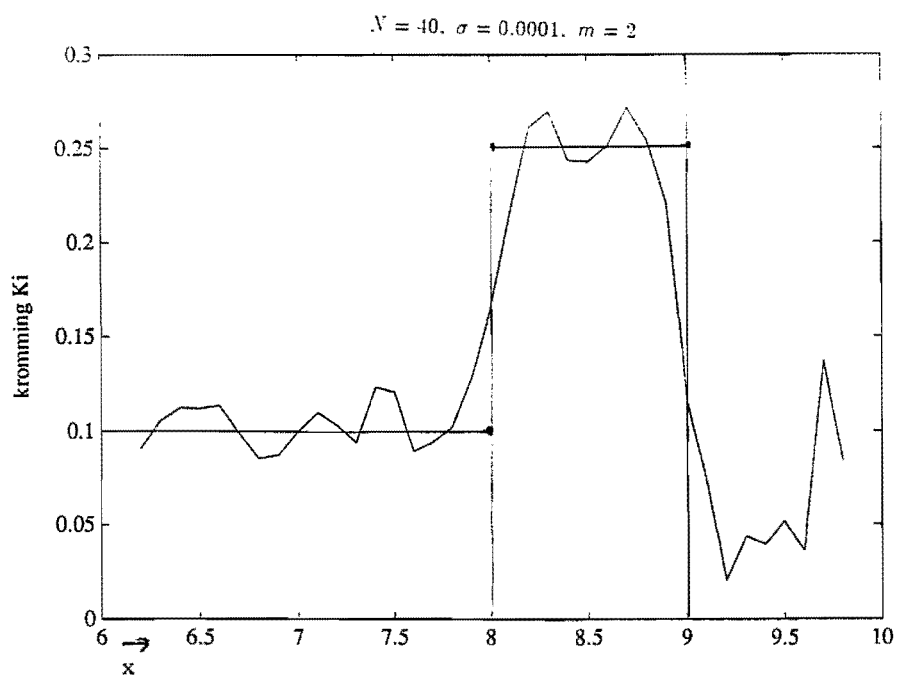
Om een eerste indruk te krijgen zijn enkele experimenten uitgevoerd voor een fictieve ketel met parameters:

$$Rg = 10, Rk = 4, xa = 8, xb = 9, xc = 10.$$

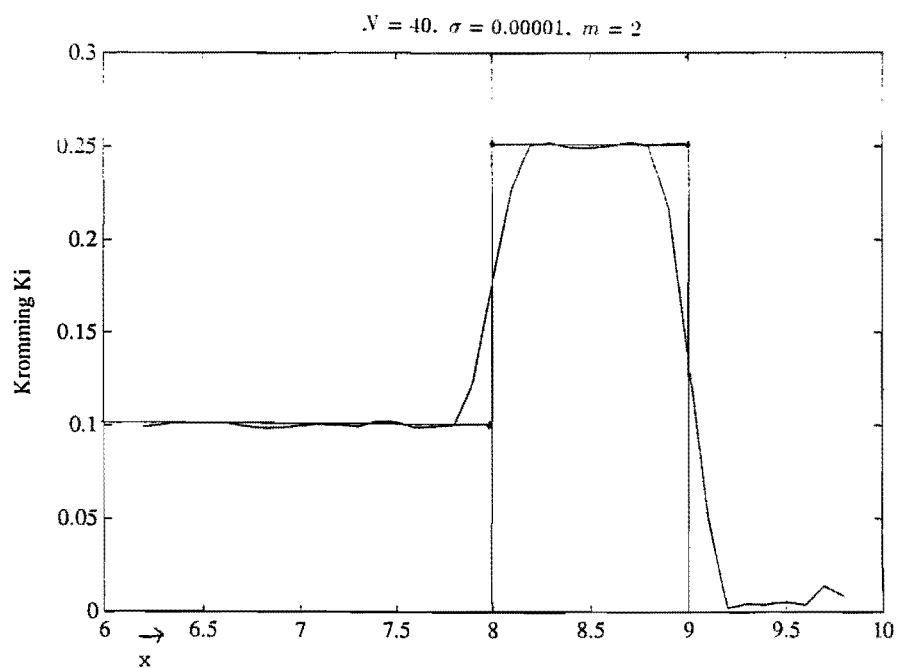
Bij deze experimenten werd er vanuit gegaan dat de x -coördinaten van de gemeten punten exact bekend zijn, omdat deze vrijelijk kunnen worden ingesteld. Verondersteld is dat de x -coördinaten, in totaal $N + 1$, op onderling gelijke afstand dx op het interval $[6, 10]$ liggen. De bijbehorende y -coördinaten zijn verstoord met een relatieve fout van ten hoogste σ . De waarde van σ kan vrij worden gekozen; in geval $\sigma = 0$ liggen de meetpunten exact op het ketelprofiel.



Figuur 1a.



Figuur 1b.



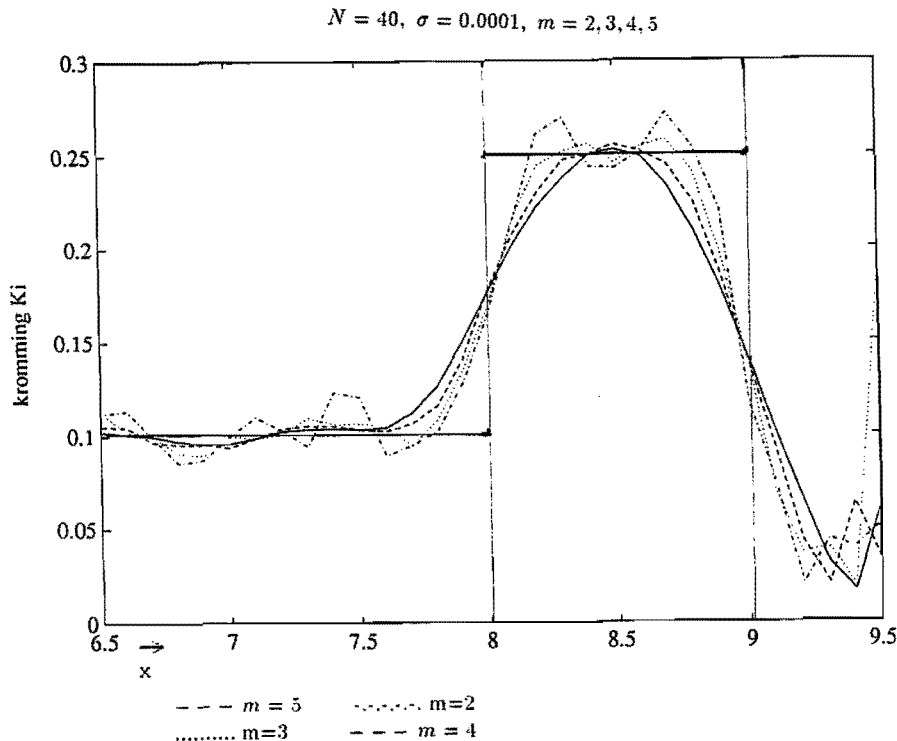
Figuur 1c.

Uit de Figuren 1a,b,c is het duidelijk dat de storing σ een belangrijke invloed heeft. De waarde van σ moet klein genoeg zijn om enige resultaten te kunnen verkrijgen. Het is beter om de verstoorte data eerst nog eens glad te strijken met bijvoorbeeld een smoothing cubic

spline (zie sectie 2).

De waarde van m heeft natuurlijk direct te maken met de nauwkeurigheid waarmee de locaties \underline{x}_a en \underline{x}_b kunnen worden geschat.

In Figuur 2 zijn voor $\sigma = 0.0001$, $N = 40$ de krommingen getekend, respectievelijk $m = 2, 3, 4$ en 5 . De resultaten laten vooralsnog de invloed van m nauwelijks zien. Wel is duidelijk het "smoothing" karakter bij toenemende m .



Figuur 2.

2 Cubic en quadratic spline technieken

Er zijn verschillende wiskundige technieken om krommen door gegeven punten te beschrijven. Een veel gebruikte techniek is de zogenaamde cubische spline fitting, bedoeld voor data met ruis. Cubische spline fitting kan ook gebruikt worden voor het glad strijken van data alvorens deze te bewerken. De oorspronkelijke methodiek is gebaseerd op een artikel van Reinsch [1] en kan worden beschreven als volgt:

Bij een door de gebruiker te kiezen parameter λ wordt de functie f gezocht, die de volgende uitdrukking minimaliseert:

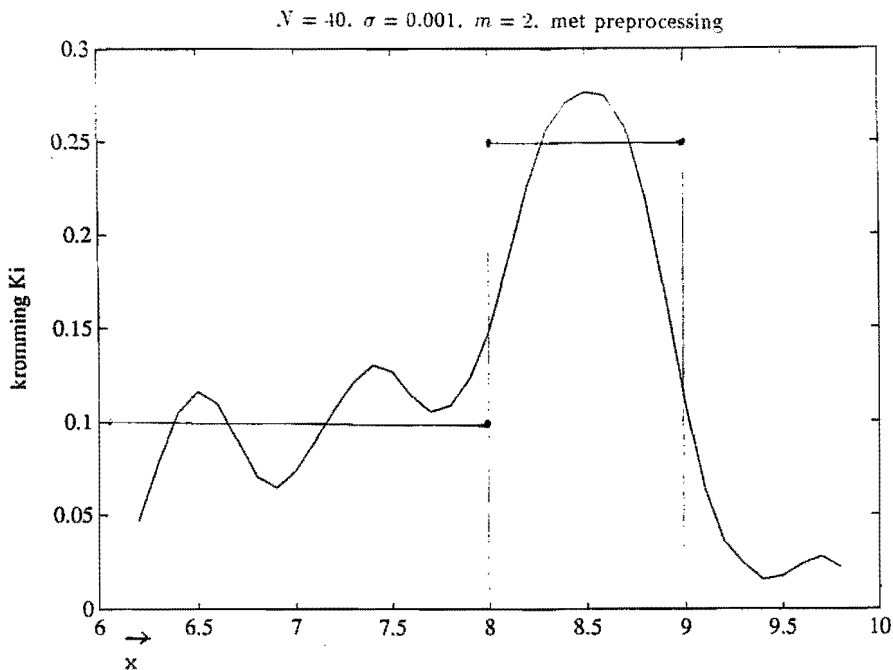
$$\sum_{i=0}^N (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \int_{x_0}^{x_N} (f''(x))^2 dx .$$

De eerste term regelt de kwadratische afwijking van de meetpunten t.o.v. de functie f . Hierbij kunnen per punt nog eventuele gewichten worden toegekend. De tweede term is een indicatie

voor de fluctuatie in de functie f .

Nu blijkt dat de minimaliserende functie f bestaat uit een natural cubic spline met $f''(x_0) = f''(x_N) = 0$. Als $\lambda = 0$ is, dan is f de natural cubic spline die de data interpoleert: $f(x_i) = y_i$, ($i = 0, \dots, N$). Voor grote λ bestaat f nagenoeg uit de regressierechte passend bij de punte \underline{x}_i . Een verstandige keuze van λ wordt geleid door de waarde van de storing σ op de punten y_i .

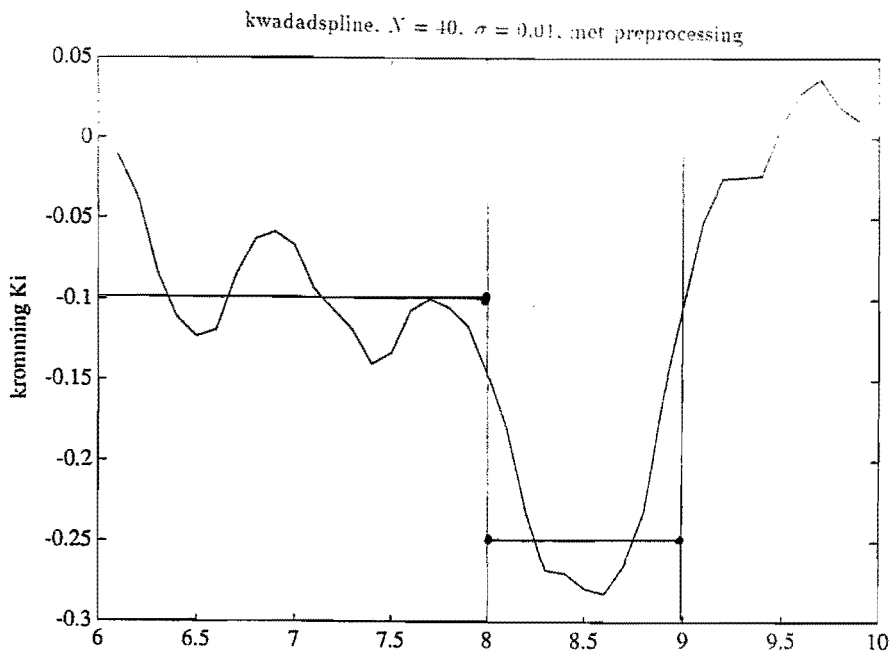
Het Pascal programma ipffsn uit de numerieke turbo Pascal bibliotheek [2] van de Technische Universiteit Eindhoven kiest default een waarde van λ . Dit programma kan goed worden gebruikt om de verstoorde data y_i glad te strijken. In de uitgevoerde experimenten bij de geconstrueerde fictieve ketel is dit programma gebruikt om de gemeten data glad te strijken (preprocessing). In Figuur 3 is het resultaat getekend bij toepassing van de running least square methode met $N = 40$, $\sigma = 0.001$ en $m = 2$. Echter nu zijn de data \underline{x}_i eerst glad gestreken m.b.v. het programma ipffsn. Opvallend is de aanzienlijke verbetering die is ontstaan in vergelijking met het resultaat in Figuur 1 zonder preprocessing.



Figuur 3.

De kromming van een ketelprofiel verloopt, behoudens in de punten x_a en x_b , continu. Kwadratische splines hebben eveneens de eigenschap dat de kromming op een eindig aantal punten na (de zogenaamde) knooppunten continu verloopt. De constructie van een kwadratische spline s waarvoor geldt $s(x_i) = y_i$ met knooppunten steeds halverwege de punten x_i is vrij eenvoudig. Echter een kwadratische spline s is pas geheel vastgelegd indien naast de interpolatie condities $s(x_i) = y_i$ ook nog twee extra (rand)voorwaarden worden opgegeven. Er is een experiment uitgevoerd met een kwadratische spline die voldoet aan de zogenaamde not a knot randcondities (zie [1]), hetgeen impliceert in het eerste en laatste knooppunt wordt ook nog geëist dat de kromming continu verloopt.

In Figuur 4 is de kromming in \underline{x}_i berekend van een kwadratische spline die het ketelprofiel interpoleert. Overigens zijn eerst de data bewerkt met het programma ipff.



Figuur 4.

Het ziet er naar uit dat ook kwadratische splines bevredigende resultaten kunnen opleveren.

3 Rationale spline fitter

In Computer Aided Geometric Design van krommen en oppervlakken, worden krommen bestaande uit stuksgewijze kegelsneden, beschreven door rationale B -splines. Analoog aan Bezier krommen, worden de stuksgewijze kegelsneden ontworpen door middel van controlepunten. Het ligt voor de hand om rationale B -splines ook toe te passen voor het interpoleren en fitten van krommen die uit cirkelbogen en rechte stukken bestaan. De gebruiker zal zelf de algoritmen en de wiskundige opzet moeten ontwikkelen. Software voor het gebruik van rationale B -splines is (nog) niet aanwezig in de bekende numerieke programma bibliotheken. Het resultaat van een onderzoek in deze richting kan wellicht zijn dat ontwerpen en fitten van stuksgewijze kegelsneden op een efficiënte wijze gebeurt. Het profiel van de ketel is dan slechts een voorbeeld. De ontwikkelde methode is dan voor een ruimere klasse van profielen toepasbaar.

Literatuur

1. C. de Boor: A practical guide to splines. Applied Mathematical Sciences 27, Springer Verlag, New York 1978.
2. K. van Ginneken, W. Kortsmit, L. van Reij: TPNumLib, Documentatie bij de Numerieke Turbo Pascal Bibliotheek, Rekencentrum, TUE, november 1991.
3. C.H. Reinsch: Smoothing by spline functions, Num. Math. 19 (1967).