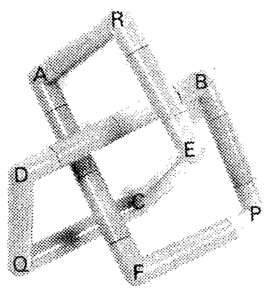
Een klaverbladknoop in de vorm van een ruimtelijke negenhoek met rechte hoeken en diëdrische symmetrie

Een klaverbladknoop in de vorm van een ruimtelijke negenhoek met rechte hoeken en diëdrische symmetrie.

Prof. dr N.G. DE BRUIJN

Bij het spelen met het plastic speelgoed 'Plasticant' kwam de vraag op, een in de titel genoemde knoop te maken. Dit lukt inderdaad, en leidt tot een fraaie figuur die men wegens de kleur van het materiaal 'De Blauwe Knoop' kan noemen. Het materiaal is buisvormig; we gebruiken slechts rechte stukken en rechthoekige knikstukken (zie figuur 1).
We gaan uit van een rechthoekig prisma met gelijkzijdig grond- en bovenvlak. We noteren de hoekpunten van het grondvlak met ABC, die van het bovenvlak met DEF; AD, BE en CF zijn de opstaande ribben. We geven de lengten van AB en AD met u resp. v aan. De verhouding van u en v zal nog worden vastgelegd.



Figuur 1

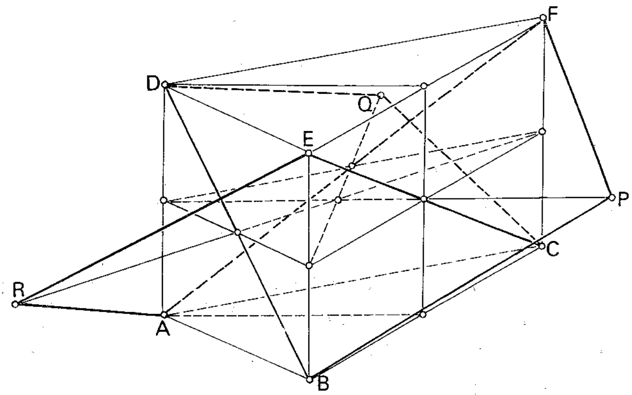
Er is een groep van 6 ruimtelijke congruentietransformaties die ons prisma invariant laten. Het punt A kan hierdoor resp. in A, B, C, D, E, F worden overgevoerd. De groep bevat geen spiegelingen. Het is een zg. 3-diëdergroep. De elementen zijn: identieke transformatie, twee rotaties van $\pm\ 120^\circ$ om een as evenwijdig met de opstaande ribben, en drie rotaties van 180° om assen die evenwijdig zijn met de hoogtelijnen van driehoek ABC.
In het middelpunt van het zijvlak BCFE richten we een loodlijn op dat vlak op en zetten daarop naar buiten een afstand af gelijk aan de helft van de diagonaal BF. Dit legt het punt P vast, met $BP \perp PF$. Op de zijvlakken CADF en ABED doen we hetzelfde, met als resultaat Q en R.
We trekken nu de lijnstukken AR, RE, EC, CQ, QD, DB, BP, PF, FA. Deze vormen een negenhoek die de topologische structuur van de klaverbladknoop heeft, en die invariant is voor de 6 congruentietransformaties van onze groep. We hebben er reeds voor gezorgd dat de hoeken bij P, Q en R recht zijn. Wegens de symmetrie zijn de hoeken bij A, B, C, D, E, F onderling gelijk. We kunnen er door keuze van de verhouding $u : v$ voor zorgen dat het rechte hoeken worden. Zie figuur 2.
Om de eis uit te drukken dat de hoek FAR recht is, stellen we $FA^2 + AR^2 = FR^2$, hetgeen leidt tot

$$u^2 + v^2 + \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2) = \tfrac{1}{4}v^2 + \left(\tfrac{1}{2}u\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{u^2 + v^2}\right)^2.$$

Met $x = v/u$ vinden we nu

$$x = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{33}}{8}} \approx 0{,}77011.$$

Onze knoop heeft 3 zijden met lengte $\sqrt{u^2 + v^2}$ en 6 zijden met lengte $\sqrt{(u^2 + v^2)/2}$. Het 'Plasticant' materiaal heeft rechte stukken van 14 mm; de door ons benodigde knikken hebben een hartlijn die beschouwd kan worden als een rechte hoek met benen van 7 mm. Gebruikt men nu voor elk der lange zijden twee rechte stukken en voor elk der korte zijden één, dan worden de rechte stukken (qua hartlijn) 42 mm en de korte 28 mm. De verhouding 42 : 28 is niet precies $\sqrt{2}$: 1; men moet bij elke verbinding op de korte zijden ongeveer 1,7 mm uitrekken om de gewenste verhouding $\sqrt{2}$: 1 te bereiken.

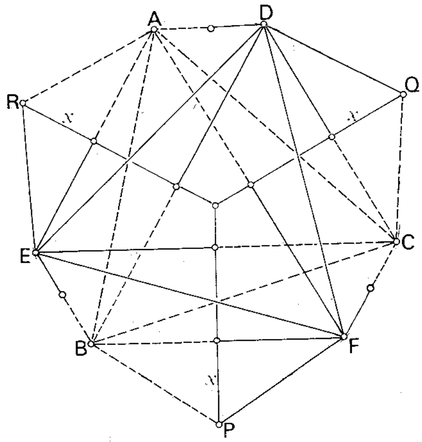


Figuur 2

Men kan ook andere verhoudingen voor AF : AR krijgen door af te zien van de eis dat AD loodrecht staat op het vlak van de driehoek ABC. Men kan uitgaan van congruente gelijkzijdige driehoeken ABC en DEF in evenwijdige vlakken, zó dat de lijn die de middelpunten van deze driehoeken verbindt, loodrecht op die vlakken staat, zonder te eisen dat AB en DE evenwijdig zijn. In het midden van BF zet men een nog nader te bepalen stuk x af op een lijn loodrecht op BF en evenwijdig met vlak ABC. Zo vindt men het punt P, en analoog Q en R. Om te rekenen projecteert men D, E, F loodrecht op vlak ABC, en vindt dan zes punten A, B, C, D_1, E_1, F_1 op één cirkel. Men kan als beschrijvingsparameters nemen $q = AF_1/AE_1$ (merk op dat AF_1 en AE_1 een hoek van 60° vormen), h (= de afstand van vlak ABC tot vlak DEF) en x. De negenhoek ARECQDBPF blijft de diëdersymmetrie houden. De condities voor negen rechte hoeken zijn

$$h^2 = 2q\,x\sqrt{3} - 2q = 4x^2 - 4.$$

De negenhoek heeft de topologische structuur van een knoop zolang $0 < q < 2$, hetgeen correspondeert met $0 < AF/AE < 2$.
Men kan zich de knoop goed voorstellen door de projectie op het middenparallelvlak te tekenen en daarbij de projectie van alles watònder dat vlak ligt te stippelen. Zie figuur 3.



Figuur 3

Meer lijn in a^x, ${}^a\log x$, $\ln x$ en e^x (II)

J. VAN IJZEREN

Mijn eerder stukje onder deze titel [1] blijkt – allicht – niet allemaal nieuws onder de zon. De hoofdlijn (via $(a^x - 1)/x$ naar $\ln a$ en e) vindt men ook in Prof. de Bruijns Beknopt Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening.
Het is jammer dat mij dit is ontgaan, maar hoera voor de sterke supporter!
Intussen is er fundamenteel verschil, ja tegenstelling in behandelingswijze. In het leerboek vindt men uiteraard een hele opbouw: het begrip afgeleide, $(x^n)'$, $(x^{m/n})'$, Rolle, middelwaardestelling, $(x^a)'$ met reële a. Via verwisseling van x en a volgt dan het kernpunt: dat $(a^x - 1)/x$ monotoon stijgt. Dit echter wordt in [1] met veel eenvoudiger middelen aangetoond. Evenals bij de monotonie van a^x komt men er uit *zonder afgeleiden.* En al is dit op zich zelf niet zo'n wonder, heel belangrijk is dat er, didactisch gezien, een volkomen andere situatie ontstaat.