Opbouw van het systeem der reële getallen

Citation for published version (APA):
Bruijn, de, N. G. (1977). Opbouw van het systeem der reële getallen. *Verslag van de gewone vergadering der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Afd. Natuurkunde*, *86*, 121-125.

Document status and date:
Published: 01/01/1977

Document Version:
Publisher's PDF, also known as Version of Record (includes final page, issue and volume numbers)

Please check the document version of this publication:

• A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
• The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
• The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

Link to publication

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

• Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
• You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
• You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Download date: 17. Apr. 2024

KONINKL. NEDERL. AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN — AMSTERDAM
Overgenomen uit
het Verslag van de gewone vergadering der Afd. Natuurkunde, 86, No. 9, 1977

WISKUNDE

VOORDRACHT

OPBOUW VAN HET SYSTEEM DER REËLE GETALLEN

DOOR

N. G. DE BRUIJN

Reeds in de oudheid was men min of meer vertrouwd met het systeem der positieve gehele getallen (hier met $\mathbf{N}$ genoteerd) en met het systeem $\mathbf{Q}_+$ der positieve rationale getallen (gehele of breuken). De negatieve getallen en het getal nul verschenen pas veel later ten tonele, maar de moeilijkheden van inzichtelijke aard waren daarbij niet ernstiger dan bij de invoering van de rationale getallen. Veel moeilijker lag dat bij de invoering der z.g. onmeetbare getallen waarmee de Grieken reeds worstelden toen ze zagen dat bijv. de lengte van de diagonaal van een vierkant niet door middel van een breuk in de lengte der zijden kan worden uitgedrukt. Een verhouding van twee lijnstukken is in het algemeen niet rationaal: het is een getal uit $\mathbf{R}_+$ (de positieve reële getallen). De Grieken hebben veel aandacht aan dit soort vragen gegeven. Zo was Archimedes een meester in het beschrijven van oneindige processen die dienden om uitspraken te verkrijgen over oppervlakten en inhouden van meetkundige figuren die niet met rationale getallen konden worden behandeld. Pas in de 19e eeuw kwam men wezenlijk verder ten aanzien van een formeel correcte behandeling van oneindige verzamelingen en oneindige processen. Laat in de 19e eeuw kwamen acceptabele axiomatische en synthetische beschrijvingen van $\mathbf{R}$ tot stand (de negatieve getallen waren toen sinds eeuwen geen moeilijkheid meer).

In een axiomatische beschrijving legt men het wezen van $\mathbf{R}$ vast met een stel fundamentele eigenschappen (axioma's) zonder zich moeite te geven om die te bewijzen. Bij de synthetische opbouw construeert men de elementen van $\mathbf{R}$ als nieuwe objecten gevormd met behulp van reeds bekende, en daarna behoeft men de fundamentele eigenschappen niet meer te postuleren; men kan ze bewijzen. Heeft men de opbouw achter de rug dan is het voor het verdere werken met reële getallen onbelangrijk of die opbouw axiomatisch dan wel synthetisch was. Veel wiskundigen zullen de voorkeur aan de axiomatische methode geven zolang de synthetische erg lastig of ondoorzichtig is, maar eerlijkheidshalve moet gezegd worden dat het feit dat de synthetische opbouw eenmaal gelukt is de sterkst denkbare steun is voor de betrouwbaarheid van de axiomatische systemen.

Wat ideevorming betreft liggen de axiomatische en synthetische opbouw dicht bij elkaar. Men kan bijv. zowel een axiomatische als een synthetische opbouw koppelen aan Cauchy's idee van de convergentie van fundamentele rijen, of men kan beide koppelen aan oneindig voortlopende decimale (of duale) breuken, of beide aan de zg. snede van Dedekind (die in 1872 de eerste synthetische opbouw leverde). Doordat het stelsel **R** uitbundig veel structuur heeft, is er nogal wat keus, waarbij elke groep in elke periode de neiging heeft voorkeur te geven aan aspecten die het beste aansluiten aan verdere ideeën van die groep in die periode.

Als voorbeeld van een axiomatische aanpak noemen we er een die de ordeningsstructuur centraal stelt. We gaan uit van het begrip "snede" in **R**. Dat is een splitsing van **R** in twee niet-lege klassen, resp. linkerklasse en rechterklasse genaamd, zó dat elk getal in de linkerklasse kleiner is dan elk getal in de rechter. Een fundamentele eigenschap luidt nu: in elke snede heeft hetzij de linkerklasse een grootste, hetzij de rechterklasse een kleinste getal. Samen met eigenschappen over optelling, vermenigvuldiging en ordening (die dezelfde zijn als van het systeem **Q** der rationale getallen) levert dit een axiomatische beschrijving van **R**.

Dedekind gebruikte dezelfde gedachte voor synthetische opbouw: hij beschouwde sneden in **Q** (i.p.v. in **R**). Als men **R** eenmaal heeft ziet men wel dat met elke snede in **Q** precies één element van **R** correspondeert, en omgekeerd; om dit laatste te bereiken moet men bijv. sneden verbieden waarbij de rechterklasse een kleinste element heeft. Om nu de synthetische opbouw van **R** te krijgen deed Dedekind iets dat men vaker doet als men iets wil construeren waarvan men al dacht het te kennen: men gebruikt de snede in **Q** die met het reële getal zou corresponderen als *definitie* van dat reële getal. Nu is **Q** echter nog geen deel van **R**, maar men kan **Q** inbedden in **R** door aan elke q uit **Q** de snede toe te voegen waarbij de linkerklasse de verzameling der rationale getallen $\leqslant q$ is.

Nadat deze definitie is gegeven is er heel wat werk te verrichten. De nieuwe collectie moet van een structuur worden voorzien met optelling, vermenigvuldiging en ordening, en men moet aantonen dat de in **Q** reeds aanwezige begrippen via de inbedding met de nieuwe corresponderen. Dit nogal bewerkelijke programma is in alle details uitgevoerd in een boekje van E. Landau [6]. Dat laatste doet nog meer: Landau begint met **N**, bouwt dan $\mathbf{Q}_+$ op, vervolgens $\mathbf{R}_+$ en eindelijk **R**. Het moeizame proces van uitbreiding, inbedding en voortzetting van structuren vindt maar liefst drie keer plaats. De meeste wiskundigen vinden dit niet zo erg. Het gaat om de ideeën; de uitwerking ervan is een soort vervelende routine die gemakkelijk door "proof by handwaving" kan worden afgedaan. Maar als men alles precies wil verantwoorden haalt men zich veel werk op de hals. Dit is onlangs weer gebleken toen het gehele boekje van Landau in de automatisch leesbare taal AUTOMATH werd omgezet (zie [4]). Om allerlei redenen werd die vertaling strikt aan de tekst van Landau gekoppeld, en werden wezenlijke verbeteringen achterwege gelaten. Een tweede keer zou men zoiets niet doen: als nauwkeurige beschrijving zo bewerkelijk is, vraagt men wel eerst of er niet een veel kortere weg is!

Overigens geldt voor het in alle details begrijpen hetzelfde als voor het opschrijven in een automatisch leesbare taal. Meestal (maar niet altijd) geldt: hoe korter hoe helderder, mits de kortheid geen onvolledigheid betekent.

Er is reden om een wezenlijk snellere opbouw van **R** te overwegen. Drie recente pogingen hiertoe worden hier vermeld.

Door Metropolis et al. ([7], [8]) is de oneindige duale breukontwikkeling tot uitgangspunt genomen. Zij bestuderen daarop zowel de optellingsalgorithme als de vermenigvuldigingsalgorithme in de gewone vorm zoals die (althans voor de gehele getallen) in feite in het lager onderwijs wordt geleerd. Ze gaan uit van het systeem **Z** der gehele getallen waarin ze de optelling, vermenigvuldiging en ordening bekend veronderstellen. Er kan tegen in gebracht worden dat de opbouw van **Z** met zijn bewerkingen nog heel wat werk kost en dat men nòg met de inbedding van **Z** in **R** blijft zitten. Er moet bij worden vermeld dat de doelstelling van deze auteurs niet alleen de opbouw van **R** betreft: hun voornaamste oogmerk is om het begrip "reëel getal" dichter in de buurt te brengen van de rekenprecisie waarmee men in de praktijk te maken heeft.

In [1] werd een andere opzet gekozen, ook gebaseerd op duale breuken. De daar aangewezen weg is zeer snel. Er wordt uitgegaan van **Z** met de daarin geldende eigenschappen van volgorde. Optelling en vermenigvuldiging wordt hier niet aanwezig ondersteld, en ook later behoeft deze **Z** niet in **R** te worden ingebed, want **Z** dient slechts om de plaatsen in de duale ontwikkeling aan te geven. We beschouwen nu deelverzamelingen van **Z**: in gedachten koppelen we zo'n deelverzameling V aan het reële getal $\Sigma_{k\in V}\, 2^{-k}$, althans voor zover het positieve getallen betreft. Negatieve getallen worden weergegeven op een manier die samenhangt met wat men ervaart wanneer men een positief getal via de gewone aftrekkingsalgorithmus van een kleiner getal aftrekt: dan ontstaan er links in het tientallige stelsel op den duur uitsluitend negens, en in het hier beschouwde tweetallige (duale) stelsel uitsluitend enen. Een kleinigheid is nog dat men met de dubbele voorstelling zit van sommige getallen: zo is tweetallig 1,10000... hetzelfde als 1,01111.... Men doet het verstandigst de laatstgenoemde eenvoudig te verbieden. Men komt dan tot de volgende definitie: een reëel getal is een deelverzameling V van **Z** met de volgende eigenschappen: (i) bij elke $x \in \mathbf{Z}$ bestaat er een $y \in \mathbf{Z}$ met $x<y$ en $y \notin V$, en (ii) er is een $u \in \mathbf{Z}$ zó dat òf alle $x \in \mathbf{Z}$ met $x<u$ in V òf al zulke x buiten V liggen. In het eerste geval noemt men het reële getal negatief, in het tweede niet-negatief.

Men kan nu de som van twee dergelijke getallen definiëren op de wijze waarop men in de gewone optellingsalgorithmus de cijfers van de som berekent. Men bepaalt eerst op elke plaats de "carry", de overdracht afkomstig van rechts gelegen plaatsen, en daarna is op diezelfde plaats het cijfer van de som zeer eenvoudig vastgelegd. De enige moeilijkheid is vast te stellen dat deze optelling voldoet aan de associatieve wet

$(a+b)+c=a+(b+c)$. Dit is een puzzle die wel wat hoofdbrekens kost door de verschillende carries die er een rol bij spelen, maar er is een korte eenvoudige oplossing.

Na de invoering van de optelling komt de omkering ervan, de aftrekking, en de studie van de ordening. Maar in feite is het veel eenvoudiger om in eerste instantie de optelling te negeren, en uit te gaan van de definitie van de aftrekking, geleid door de aftrekkingsalgorithmus. In plaats van de associatieve wet komt de eigenschap $a-(b-c)=c-(b-a)$ met ongeveer dezelfde puzzle. Men definiëert nu de som $a+b$ door $a-(0-b)$, en de ordening $a<b$ door de eis dat $a-b$ negatief is. Dit is uitgevoerd in [2].

Op deze wijze komt men zeer snel tot **R** met de additieve structuur en de ordeningsstructuur. Inbeddingsproblematiek is er niet. In deze structuur moet vervolgens de vermenigvuldiging worden gedefiniëerd, maar dat kan desgewenst worden uitgesteld totdat men veel meer over het systeem der reële getallen weet. De uitvoerbaarheid van de deling door een getal $\neq 0$ kan men bijv. laten rusten op de eigenschap dat een continue functie die zowel positieve als negatieve waarden aanneemt ook ergens de waarde nul heeft.

Dit proces van de invoering van vermenigvuldiging en deling kost wel enige moeite, maar het gaat met behulp van ideeën en technieken die men bij het gebruik van reële getallen tòch moet leren. Er geldt dus niet het bezwaar dat vaak geuit wordt tegen de opbouw van Dedekind, nl. dat alle eraan bestede moeite nutteloos is geworden wanneer de opbouw achter de rug is.

Door J. H. Conway [3] is onlangs een invoering van **R** bedacht die sterk van de gangbare methoden afwijkt. Zijn uitgangspunt was merkwaardigerwijze de theorie van de tweepersoonsspelen! Daarin wordt aan een spelletje (gedefiniëerd met behulp van een boomdiagram) een waarde toegekend, en door op een zekere wijze meer spelletjes tegelijk te spelen worden die waarden opgeteld, en men kan zeggen dat de som van twee spelletjes weer een spelletje is. Vandaar kwam Conway tot de gedachte om de spelletjes met getallen te identificeren, of liever getallen als spelletjes te definiëren, en vervolgens de ordening, optelling en vermenigvuldiging uit te drukken op de manier zoals men dat bij de spelletjes waarneemt. Wat men daar waarneemt is dat alles wat men over een spelletje zegt wordt uitgedrukt in termen van eenvoudiger spelletjes die al bekend geacht worden. De formele getaldefinitie van Conway gaat dan ook uit van een sterk recursief principe. In een door D. E. Knuth [5] aan deze nieuwe getaldefinitie gewijde novelle wordt gesproken over een doorlopend scheppingsproces: elke volgende dag wordt weer een nieuw stel objecten gecreëerd. Enerzijds speelt hierbij de klassenindeling zoals bij Dedekind, anderzijds is het recursieve procédé geïnspireerd door de wijze waarop men de natuurlijke getallen (en de oneindige ordinaalgetallen) inbed in de formele verzamelingstheorie (van Zermelo-Fraenkel).

Alles gaat in termen van verzamelingen. Heeft men twee verzamelingen a en b dan kan men het geordende paar (a,b) vormen (dit definiëert men gewoonlijk als de verzameling {{a}, {a,b}} die twee elementen bevat als $a \neq b$ en één als $a = b$). Men vormt nieuwe paren met behulp van reeds gecreëerde, en na elke scheppingsdaad wordt het gemaakte in de volgorde der oudere ingepast. De geproduceerde paren heten "getallen". De regels zijn:

(i) Een getal wordt gemaakt door twee verzamelingen van eerder gemaakte getallen te nemen, te noemen de linkerverzameling L en de rechterverzameling R, zó dat geen enkel getal uit L groter is dan of gelijk is aan een getal uit R.

(ii) We stellen vast dat $(L_1, R_1) \geqslant (L_2, R_2)$ dan en slechts dan geldt wanneer $(L_2, R_2) \geqslant$ geen enkel getal uit R_1 is en voor geen enkel getal uit L_2 geldt dat het $\geqslant (L_1, R_1)$ is. Twee getallen (L_1, R_1) en $L_2, R_2)$ heten gelijk wanneer zowel $(L_1, R_1) \geqslant (L_2, R_2)$ als $(L_2, R_2) \geqslant (L_1, R_1)$.

Na deze wat bizarre parenconstructie kan men op betrekkelijk simpele wijze som en product van twee getallen construeren en de eigenschappen ervan bewijzen. Het gaat weer in de onderstelling dat voor alle eerder geschapen getallen alles al bekend is. Interessant is dat naast de reële getallen ook allerlei andere dingen worden geschapen, zoals oneindig kleine en oneindig grote getallen.

De theorie van Conway is bijzonder krachtig en bijzonder interessant. Maar een nadeel is dat wat er zich in afspeelt zo weinig te maken heeft met de dingen die men in de wiskundige praktijk met reële getallen doet. Daarom zal zijn systeem niet licht tot de gewone leerboekliteratuur doordringen.

LITERATUUR

1. Bruijn, N. G. de – Introducing the reals as a totally ordered additive group without using the rationals. Memorandum 1975-13, Eindhoven University of Technology, Department of Mathematics, 1975.
2. Bruijn, N. G. de – Defining reals without the use of rationals. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. **A 79** (= Indagationes Math. 38), 100–108 (1976).
3. Conway, J. H. – On numbers and games. Acad. Press 1976.
4. Benthem Jutting, L. S. v. – Checking Landau's "Grundlagen" in the AUTOMATH system. Thesis Technological University Eindhoven, 1977. Zal ook verschijnen in Mathematical Centre Tracts, Amsterdam.
5. Knuth, D. E. – Surreal Numbers, Addison Wesley Publ. Comp. 1974.
6. Landau, E. – Grundlagen der Analysis. Chelsea Publ. Comp., New York, 1951.
7. Metropolis, N. and G. C. Rota – Significance Arithmetic. On the algebra of binary strings. In: Studies of Numerical Analysis, papers in honour of Cornelius Lanczos, ed. B.K.P. Scaife. Published for the Royal Irish Academy by Academic Press, London–New York, 241–251 (1974).
8. Metropolis, N., G. C. Rota and S. Tanny – Significance Arithmetic: I. The Carrying Algorithm. Journal Combinatorial Theory Ser. **A, 14**, 386–421 (1973).