Meetkunde spelen met speelkaarten (I)

°°MEETKUNDE SPELEN MET SPEELKAARTEN I

Ingezonden door N. G. de Bruijn te Nuenen (N.Br.).

Kijk eens naar het volgende schema van 3 rijen en 7 kolommen:

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	6	7	7	6
I	II	III	IV	V	VI	VII

De kolommen hebben we romeins genummerd; deze romeinse aanduidingen dienen om over het schema te kunnen praten, maar ze horen zelf niet tot het schema.

We merken op:

a. Elk der getallen 1 t.e.m. 7 komt even vaak (dat is 3 keer) in het schema voor.
b. In geen enkele kolom komen twee gelijke getallen voor.
c. Kiezen we twee verschillende uit de getallen 1 t.e.m. 7, dan is er precies één kolom waar ze allebei in staan (Voorbeeld: 45 slechts in kolom II, 47 slechts in kolom VI).
d. Kiezen we twee verschillende kolommen, dan is er precies één getal, dat in beide voorkomt (Voorbeeld: I en IV bevatten beide 2, III en V bevatten beide 7).

We zullen dergelijke schema's wat algemener gaan bestuderen. In plaats van dit schema met 3 rijen en 7 kolommen nemen we een schema met k rijen en n kolommen, met analoge eigenschappen, nl.:

1. Elk der getallen 1 t.e.m. n komt k keer voor.
2. Een getal komt in een kolom hoogstens één keer voor.
3. Kiezen we twee verschillende uit 1 t.e.m. n, dan is er precies één kolom waar beide in staan.
4. Kiezen we twee verschillende kolommen, dan is er precies één getal dat in beide staat.

Het is lang niet voor alle k en n mogelijk zo een schema op te bouwen. In de eerste plaats merken we op dat uit 2 en 3 volgt dat

5. $$n = k^2 - k + 1.$$

Dit bewijzen we als volgt. Het aantal manieren waarop uit 1 t.e.m. n een getallenpaar (bestaand uit twee verschillende getallen) gekozen kan worden, bedraagt $\frac{1}{2}n(n-1)$ (ga dat na), en blijkens 2 kan elke kolom $\frac{1}{2}k(k-1)$ paren leveren. De n kolommen samen leveren er dus $\frac{1}{2}nk(k-1)$. Wegens 3 is nu

$$\tfrac{1}{2}nk(k-1) = \tfrac{1}{2}n(n-1),$$

dus $k^2 - k = n - 1$, waaruit 5 volgt.

Met $k = 3$ vinden we $n = 7$, zoals in ons eerste voorbeeld. Met $k = 2$ vinden we $n = 3$, en dan gaat het ook:

1	2	3
2	3	1
I	II	III

Met $k = 1$ vinden we $n = 1$, en dan is er geen aardigheid meer aan. Maar $k = 4$ levert $n = 13$, en ook dan lukt het. Met deze mogelijkheid hebben producenten van speelkaarten blijkbaar reeds eeuwenlang rekening gehouden, want het normale pak van 52 kaarten is precies aan onze behoefte aangepast. In plaats van de getallen 1 t.e.m. 13 werken we nu met de symbolen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, b, v, h, a, die we *waarden* zullen noemen; van elk dezer zijn er in het pak precies de vier exemplaren, die we voor ons spel nodig hebben. De kleuren (schoppen, harten, ruiten, klaveren) laten ons voorlopig volkomen onverschillig. Er zijn trouwens nog meer dingen in het te maken schema onbelangrijk: zowel de volgorde der kolommen onderling als de volgorde der kaarten in elke kolom kunnen we naar hartelust veranderen zonder de eisen 1 t.e.m. 5 geweld aan te doen. Trouwens, als het ons belieft in het schema bijv. alle drieën door vijven te vervangen en alle vijven door drieën, dan stoort dat geenszins.
De lezers worden nu uitgenodigd een pak speelkaarten te nemen en zelf te proberen deze te leggen in een schema van 4 rijen en 13 kolommen, zó dat het aan alle eisen voldoet.

Teneinde het puzzelen te vergemakkelijken geven we een algemene aanwijzing; vooraf spreken we af, dat we elk paar van twee verschillende waarden een *waardenpaar* zullen noemen.
We vervangen de voorwaarden 1, 3 en 4 nu door één enkele (6), die slechts een *deel* van 3 eist, nl.
6. elk waardenpaar staat *hoogstens* in *één* kolom.

Men kan nu bij het leggen van het schema volstaan met er voor te zorgen, dat er aan 2 en 6 voldaan is. (Voor het pak kaarten is, zoals we zagen, voldaan aan 5).

We beredeneren nog dat het voldoende is dat er aan 2, 5 en 6 voldaan is. Wie deze redenering wat moeilijk mocht vinden, hoeft zich daardoor niet van het puzzelen te laten afschrikken. Ook zonder het volgende te begrijpen kan men wel een 4×13 schema vinden en controleren, dat het aan alle eisen voldoet.

We nemen aan, dat we een schema (k rijen en n kolommen) hebben, dat aan 2, 5 en 6 voldoet.
Er zijn $\frac{1}{2}n(n-1)$ manieren om een waardenpaar te kiezen, en elke kolom levert er $\frac{1}{2}k(k-1)$. Blijkens 6 leveren de kolommen samen $\frac{1}{2}nk(k-1)$ verschillende waardenparen. Maar wegens 5 is $\frac{1}{2}nk(k-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$, zodat de kolommen samen *alle* waardenparen produceren. Hieruit volgt: bij elk waardenpaar is er een kolom, waar dat paar in voorkomt. Samen met 6 betekent dat 3.
Het is nu niet moeilijk om 1 af te leiden. Vatten we een waarde in het oog, bijv. a, dan zijn er $n-1$ waardenparen die a bevatten. Een kolom die a bevat, bevat $k-1$ van deze waardenparen, zodat nu blijkt dat er $(n-1)/(k-1)$ kolommen zijn die a bevatten. Daar $(n-1)/(k-1) = k$ (volgens 5), is nu 1 bewezen. We merken op, dat dit voor ons geval niet zo interessant is, want we veronderstellen met een eerlijk pak kaarten te doen te hebben.

Tenslotte bewijzen we 4. We weten al dat 3 waar is, dus twee kolommen hebben hoogstens één waarde gemeen. We bekijken nu de *kolommenparen.* Elke waarde komt in k kolommen voor, en het is dus op $\frac{1}{2}k(k-1)$ manieren mogelijk om twee kolommen aan te wijzen, die juist die waarde als gemeenschappelijk element hebben. Daar er n waarden zijn, komt het in totaal $\frac{1}{2}nk(k-1)$ keer voor dat twee kolommen een element gemeen hebben. Dit aantal is (wegens 5) juist $\frac{1}{2}n(n-1)$, en dat is het *totaal aantal* kolommenparen. Derhalve zijn hiermee alle kolommenparen afgeteld, zodat elk kolommenpaar een gemeenschappelijk element heeft.

In het volgende nummer geven we een oplossing en dan zullen we gaan vertellen, wat dit met meetkunde te maken heeft.

°°Projectieve Meetkunde III

Als drie punten A, B en C op een rechte liggen, dan veranderen door het projecteren in het algemeen niet alleen de lengten van AB en BC, maar ook hun onderlinge verhouding. Dit is goed te zien in fig. 18, waar AB en BC gelijk zijn, maar $A'B'$ en $B'C'$ niet.

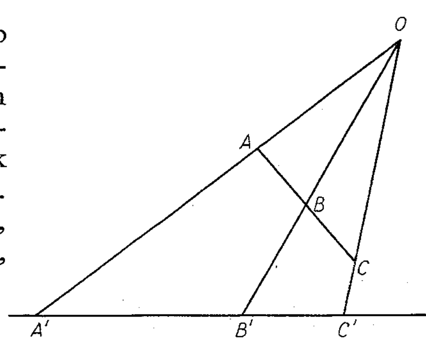

Fig. 18