Over de rol van polynomen in de approximatietheorie

OVER DE ROL VAN POLYNOMEN IN DE APPROXIMATIETHEORIE

Dr. Ir. F. SCHURER

OVER DE ROL VAN POLYNOMEN IN DE APPROXIMATIETHEORIE

OPENBARE LES

GEGEVEN BIJ HET AANVAARDEN VAN HET AMBT
VAN LECTOR IN DE WISKUNDE AAN DE
TECHNISCHE HOGESCHOOL TE EINDHOVEN
OP VRIJDAG 7 MAART 1969

DOOR

DR. IR. F. SCHURER

"All exact science is dominated by the idea of approximation"

Bertrand Russell

Mijne heren curatoren,
Mijnheer de rector magnificus,
Mijne heren hoogleraren en lectoren,
Dames en heren leden van de wetenschappelijke,
de technische en de administratieve staf,
Dames en heren studenten,
en voorts gij allen, die door het bijwonen van deze les
blijk geeft van Uw belangstelling,

Zeer gewaardeerde toehoorders,

Als een wiskundige het voorrecht wordt geboden om een openbare les uit te spreken, dan is daaraan meestal het schrijven van een aantal wetenschappelijke artikelen voorafgegaan. Een vergelijking van de inhoud van een dergelijke rede met een artikel of wetenschappelijke voordracht op een congres geeft in de meeste gevallen aanleiding tot het constateren van een duidelijk verschil. Dit heeft zijn oorzaken onder meer in het volgende. Daar is in de eerste plaats het bekende feit dat het aantal publikaties sterk toeneemt. Ook de congressen mogen zich in een stijgende belangstelling verheugen. Dat brengt met zich mee dat op lange artikelen geen prijs meer wordt gesteld; ook mag een spreker niet klagen wanneer hij twintig minuten voor een voordracht krijgt toegewezen. Er blijft dan geen ruimte, respectievelijk tijd, beschikbaar voor een adequate inleiding tot het vakgebied. Hoewel er dus begrijpelijke redenen zijn aan te geven, is het verschijnsel niettemin te betreuren. Is het niet vaak zo dat men graag bereid is te luisteren naar datgene wat men voor een groot gedeelte al weet? Bovendien kan een goede introductie stimulerend werken om belangstelling te wekken voor de meer technische aspecten van de inhoud.

Een openbare les of een oratie bieden nu de mogelijkheid om aan deze verwaarloosde zijde aandacht te besteden; het is misschien ook de beste rechtvaardiging voor het feit dat zij inderdaad worden gehouden.

Dames en heren,

Vanmiddag zou ik U graag iets willen vertellen over een onderdeel der wiskunde dat met de naam approximatietheorie wordt aangeduid. Ik zal hier niet pogen een allesomvattende definitie van de approximatietheorie te geven, maar door het bespreken van een aantal voorbeelden proberen U eerst een indruk te geven van de soort problemen waarom het gaat. Daarna wordt een globale schets gegeven van een aantal kernvraagstukken in een bepaald gedeelte van de approximatietheorie. Tenslotte zal ik nog aandacht besteden aan een onderwerp van vrij recente datum.

Waarom doen we aan approximatietheorie? Ik geloof dat het idee van benaderen in bijna alle exacte wetenschappen een rol speelt. Nog sterker is dit het geval, daar waar experimenten worden verricht. Het hoeft dan ook niet te verwonderen dat geleidelijk een gehele theorie is opgebouwd, die zich bezighoudt met een systematische studie ervan. Approximeren is vaak een bittere noodzaak. Gelukkig blijkt niet zelden dat een compromisoplossing zeer bevredigend is.

Laten we als eenvoudige illustratie van de laatste uitspraak een van de meest bekende mathematische constanten beschouwen, namelijk het getal dat staat voor de verhouding van de omtrek van een gegeven cirkel tot de lengte van een middellijn van deze cirkel. Reeds Archimedes probeerde deze constante, aangeduid met de letter π, exact te bepalen. Dat lukte niet. Wel gaf hij aan dat het getal $3^1/7$ dicht in de nabijheid van π lag, was er zich dus van bewust dat dit getal slechts een benadering van π voorstelde. Voor allerlei doeleinden is deze approximatie echter zeer goed bruikbaar.

Het gevraagde object is in dit voorbeeld een getal. Bovendien ligt het voor de hand dat we het getal a een betere benadering zullen noemen dan het getal b, als de absolute waarde van het verschil van a en π kleiner is dan de absolute waarde van het verschil van b en π.

De approximatietheorie houdt zich onder meer bezig met het benaderen van functies door middel van andere functies die in zeker opzicht eenvoudiger zijn en beter hanteerbaar. Een eenvoudig voorbeeld hiervan is het volgende. Stel dat op het interval $[-1,1]$ van de reële x-as een reële functie f is gegeven, bepaald door $f(x) = x$. Er wordt gevraagd deze functie te benaderen door een andere functie die op het gehele interval [-1,1] constant is. Alvorens een uitspraak over de kwaliteit van een benadering kan worden gedaan, moet eerst worden vastgesteld wat onder de afstand van twee functies zal worden verstaan. Dit kan op verschillende manieren gebeuren. De Russische wiskundige P. L. Chebyshev [1] (1821-1894), die als een van de grondleggers van de approximatietheorie moet worden beschouwd, heeft het volgende afstandsbegrip ingevoerd. Voor de afstand tussen twee functies f en g wordt het supremum van de absolute waarde van het verschil van f(x) en g(x) genomen, waarbij x loopt over het gehele interval waarop f en g gedefinieerd zijn. Deze definitie van afstand zal hier worden gebruikt.

Er zijn geheel andere afstandsbegrippen in te voeren en afhankelijk van de keuze verkrijgt men een bepaalde approximatietheorie. Als men te maken heeft met continue functies is de afstandsdefinitie van Chebyshev heel geschikt en de bijbehorende uniforme approximatietheorie neemt een belangrijke plaats in binnen de approximatietheorie. Nog een ander begrip, eveneens door Chebyshev geïntroduceerd, moet worden genoemd. Als voor de benadering van een functie f ons een bepaalde verzameling van functies ter beschikking staat, waarmee we f willen benaderen, dan wordt de functie g uit deze verzameling een beste approximatie voor f genoemd, als de afstand van f tot g niet groter is dan de afstand van f tot een willekeurige andere functie uit de gegeven verzameling.

In dit kader is het nu onmiddellijk duidelijk dat de constante functie, die de functie $f(x) = x$ op het interval [-1,1] het beste approximeert, identiek gelijk is aan nul en dat de afstand van deze twee functies 1 bedraagt. Immers, elke andere constante functie heeft een afstand tot f groter dan 1, hetzij voor $x = -1$, hetzij voor $x = 1$.

Het zojuist behandelde voorbeeld kan worden gegeneraliseerd tot het volgende interessante vraagstuk. Als we weer het interval [-1,1] als uitgangspunt nemen, wat is dan de beste approximatie voor de functie $f(x) = x^n$ door middel van gewone algebraïsche polynomen met graad kleiner dan n? Hierbij is n een willekeurig, maar vast natuurlijk getal. Kennelijk is de vraagstelling equivalent met het volgende probleem. Bepaal dat algebraïsche polynoom van de graad n, waarvan de coëfficiënt van de hoofdterm gelijk is aan 1 en dat op het interval [-1,1] de kleinste afstand heeft tot de functie die identiek gelijk aan nul is op dit interval.

Dit probleem is gesteld door Chebyshev [2] en door hem in 1859 met succes opgelost. Het eenduidig bepaalde polynoom $p_n(x)$, dat aan de gestelde opgave voldoet, kan geschreven worden in de vorm $p_n(x) = 2^{-n+1}T_n(x)$. $T_n(x)$ is een algebraïsch polynoom van de graad n en wordt het n-de Chebyshev-polynoom genoemd. Ik zal hier niet aangeven hoe Chebyshev zijn polynomen vond. Het blijkt dat $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Uit deze formule zijn enkele interessante eigenschappen van de Chebyshev-polynomen af te leiden. De maximale afwijking van nul bedraagt 1 en deze waarde wordt, met alternerend teken, $(n+1)$-maal aangenomen. De nulpunten van $T_n(x)$ liggen alle op het interval $(-1,1)$ en kunnen gemakkelijk expliciet worden aangegeven.

Chebyshev-polynomen zijn uitgebreid onderzocht en hebben vele toepassingen, met name in de numerieke wiskunde [3]. Ik wijs hier slechts op het gebruik van de nulpunten van deze polynomen als knooppunten in de interpolatietheorie en verder op de rol die ze spelen in het zogenaamde economisatieproces van machtreeksen, afkomstig van C. Lanczos [4].

Voortbouwend op het zojuist behandelde voorbeeld, kunnen we nu een vrij algemeen vraagstuk binnen de approximatietheorie formuleren. Beschouw de verzameling van alle reële functies, die op een interval $[a,b]$ van eindige lengte van de reële x-as gedefinieerd en continu zijn. Het is gebruikelijk deze verzameling van functies aan te geven met het symbool $C[a,b]$. Een deelklasse van $C[a,b]$ wordt gevormd door de algebraïsche polynomen van de graad $\leq n$. Deze verzameling wordt aangeduid met P_n. Als we hier weer de afstandsdefinitie hanteren, zoals die in het vorige voorbeeld is gebruikt en tevens het begrip beste approximatie in dezelfde betekenis aanhouden, dan is het duidelijk in welk kader we werken. Het is nu de bedoeling een willekeurige functie uit $C[a,b]$ te benaderen met een polynoom uit de verzameling P_n.

Algebraïsche polynomen bezitten een aantal aantrekkelijke eigenschappen. Ze hebben een eenvoudige vorm, kunnen gemakkelijk worden gedifferentieerd en geïntegreerd, terwijl voor een bepaalde waarde van het argument x hun berekening met behulp van een elektronische rekenautomaat geen moeilijkheden oplevert. Deze eigenschappen maken ze zeer geschikt om als approximatiemateriaal voor andere functies te dienen.

Als we een willekeurige functie f uit de verzameling C[a,b] beschouwen, dan kunnen de volgende vragen worden gesteld.

1. Bestaat er een beste approximatie in de klasse P_n voor f?

2. Als het antwoord op deze vraag bevestigend is, is het beste approximatiepolynoom dan eenduidig bepaald?

3. Wat zijn de eigenschappen van een beste approximatie, met andere woorden: hoe weet men dat inderdaad een beste approximatie is gevonden?

4. Kan men elke continue functie uit C[a,b] willekeurig dicht benaderen met behulp van algebraïsche polynomen, dat wil zeggen: bestaat er bij elk positief getal ε een natuurlijk getal N zodat het mogelijk is in de verzameling P_N een polynoom te vinden, waarvoor de afstand tot de gekozen functie kleiner is dan het getal ε?

5. Stel dat een polynoom van beste approximatie bestaat en laten we dit aangeven met t_n. De afstand van f en t_n wordt $E_n(f)$ genoemd. Het getal $E_n(f)$ is een maat voor de kwaliteit van de beste approximatie. Wat is de invloed van structuureigenschappen van de functie f, zoals bijvoorbeeld differentieerbaarheid, op de grootte van $E_n(f)$?

Ik wil nu een aantal opmerkingen maken bij de gestelde vragen. In het voorbeeld, dat aanleiding gaf tot de Chebyshev-polynomen, hebben we reeds opgemerkt dat daar inderdaad een beste approximatie aanwezig was. Chebyshev zelf hield het bestaan van een beste approximatie voor vanzelfsprekend. Inderdaad is het antwoord op de eerste vraag bevestigend. Dit is bewezen door de Duitse wiskundige P. Kirchberger [5].

De existentie van een beste benadering volgt uit een algemene stelling uit de theorie der genormeerde lineaire ruimten. Als aan elk element f uit de verzameling C[a,b] als norm het getal wordt toegevoegd dat gelijk is aan het maximum van de absolute waarde van f(x), waarbij x alle waarden uit het interval [a,b] aanneemt, dan is C[a,b] een genormeerde lineaire ruimte. Voor een willekeurig, maar vast natuurlijk getal n vormen de functies $1, x, x^2, \ldots, x^n$ een lineaire deelruimte van eindige dimensie in C[a,b]. Elk algebraïsch polynoom van de n-de graad kan worden opgebouwd uit deze n+1 functies. De betreffende stelling spreekt nu uit dat een eindig-dimensionale deelruimte van een genormeerde lineaire ruimte tenminste één punt bevat dat de kleinste afstand heeft tot een willekeurig gekozen element van de genormeerde lineaire ruimte. Voor het probleem dat we gesteld hebben is er dus tenminste één algebraïsch polynoom met graad $\leqslant$ n dat de kleinste afstand tot f heeft.

Is er slechts een zo'n polynoom of zijn er meer? Dit is de inhoud van de tweede vraag. Laten we eerst eens het volgende voorbeeld beschouwen. De functie uit de ruimte C[0,1] die identiek gelijk is aan 1, wordt benaderd door functies g van de vorm $g(x) = \lambda x$, waarbij λ een willekeurig reëel getal is. Volgens de zojuist genoemde stelling zijn er elementen van beste approximatie aanwezig. Daar de functies waarmee we benaderen, nul zijn voor $x = 0$, is de afstand tot de beschouwde functie tenminste 1; aan de andere kant volgt dat voor elke λ met $0 \leqslant \lambda \leqslant 2$ de afstand tussen de functies $f(x) = 1$ en $g(x) = \lambda x$ ook inderdaad gelijk is aan 1. Al deze lineaire functies zijn dus beste benaderingen.

Als men voor elk element uit een genormeerde lineaire ruimte en bij een willekeurige keuze van de eindig-dimensionale deelruimte van deze genormeerde lineaire ruimte de eis stelt dat het element van beste approximatie eenduidig moet zijn bepaald, dan volgt uit dit voorbeeld dat men extra voorwaarden moet stellen, hetzij aan de aan de beschouwing ten grondslag liggende genormeerde lineaire ruimte, hetzij aan de eindig-dimensionale deelruimte. Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor eenduidigheid van beste approximatie is dat de genormeerde lineaire ruimte strikt genormeerd is [6]. Deze voorwaarde komt erop neer dat in de driehoeksongelijkheid voor de norm van een tweetal elementen f en g het gelijkteken dan en slechts dan optreedt als voor $f \neq 0$ geldt $g = \alpha f$ met $\alpha \geqslant 0$. Hierbij is de eindig-dimensionale deelruimte geheel willekeurig. Uit het zojuist behandelde voorbeeld volgt kennelijk dat de ruimte C[0,1] niet strikt genormeerd is. Voor de approximatie van continue functies met behulp van algebraïsche polynomen was het laatste voorbeeld echter ook niet geheel representatief, daar de benadering werd uitgevoerd met functies van de vorm $g(x) = \lambda x$ en niet met een algemene lineaire functie.

Wij sluiten de discussie over dit punt af met de opmerking dat het antwoord op de tweede vraag eveneens bevestigend is, dus voor elke functie uit de ruimte C[a,b] is een beste polynoombenadering in de klasse, gevormd door alle polynomen met graad $\leqslant$ n, eenduidig bepaald [7]. De reden hiervoor is dat de functies $1,x,x^2,\ldots,x^n$ op het interval [a,b] een Chebyshev-systeem [8] vormen. Dat de zojuist genoemde functies een Chebyshev-systeem op het interval [a,b] vormen, is een gevolg van het feit dat een algebraïsch polynoom van de graad n niet meer dan n reële nulpunten heeft. De Hongaarse wiskundige A. Haar [9] heeft bewezen, dat, als een stelsel van lineair onafhankelijke functies $g_0,\ldots,g_n$, behorend tot C[0,1], niet een Chebyshev-systeem vormt, er tenminste één functie in C[0,1] is, waarvoor een beste approximatie door middel van $g_0,\ldots,g_n$ niet eenduidig bepaald is.

Als we een willekeurige continue functie uit de ruimte C[a,b] benaderen met algebraïsche polynomen van de graad $\leqslant$ n in de zin van Chebyshev, dan weten we nu dat een beste approximatie aanwezig is en bovendien is er slechts een. Hoe kan een dergelijke beste benadering worden gekarakteriseerd? Dat is de inhoud van de derde vraag.

Ik breng in herinnering dat het n-de Chebyshev-polynoom, afgezien van een factor 2^{n-1}, het verschil is van x^n en de beste benadering van deze functie met behulp van algebraïsche polynomen van de graad $\leqslant n-1$. Dit polynoom heeft onder meer de bijzondere eigenschap dat het n+1 extrema heeft op het interval [-1,1]. Deze extrema hebben alle dezelfde absolute waarde en steeds volgt een negatief minimum op een positief maximum. Het is deze equioscillatie-eigenschap van de foutfunctie – dit is het verschil van de functie die wordt benaderd en de benadering zelf – die karakteristiek is voor alle beste approximaties met behulp van algebraïsche polynomen en met gebruikmaking van het afstandsbegrip van Chebyshev. Deze uitspraak blijft geldig wanneer het functiesysteem $g_0,g_1,\ldots,g_{n-1}$, waarmee de benadering wordt uitgevoerd, een Chebyshev-systeem vormt op het betrokken interval.

Het zojuist genoemde resultaat is zeer belangrijk om in de praktijk beste approximaties te vinden. Als we eenmaal weten in welke punten de foutfunctie zijn extrema aanneemt, dan kan het polynoom van beste approximatie in principe eenvoudig worden bepaald. Dit komt neer op het oplossen van een aantal lineaire vergelijkingen. Maar juist het vinden van de punten, waar de foutfunctie extrema heeft, is niet eenvoudig, daar dit bijna altijd het oplossen van niet-lineaire vergelijkingen met zich meebrengt.

Als men binnen de klasse P_n de beste approximatie voor een functie op een bepaald interval wil berekenen, gaat men in de praktijk vaak als volgt te werk. Men vervangt het interval door een eindige puntverzameling en probeert nu een approximatie te vinden die optimaal is op deze verzameling. Het lijkt namelijk redelijk dat een goede approximatie voor een voldoend fijne verdeling van het interval bevredigend zal zijn op het gehele interval. Het vervangen van een continuüm door een discrete verzameling wordt discretisatie genoemd. Een extreem voorbeeld hiervan is interpolatie. Daar wordt het aantal punten ter vervanging van het interval zo groot genomen dat het overeenstemt met het aantal aanwezige parameters. Een gevolg hiervan is dat het benaderingspolynoom in de gekozen punten dezelfde waarde aanneemt als de beschouwde functie.

Uit de interpolatietheorie is bekend dat een puntverzameling die uniform over het gegeven interval is verdeeld, niet tot bijzonder gunstige resultaten leidt. In dit verband heb ik in een eerder stadium reeds mogen wijzen op het belang van de nulpunten van Chebyshev-polynomen.

Als bij een bepaalde discretisatie de beste benadering in de klasse P_n op de eindige puntverzameling is gevonden, dan kan natuurlijk voor de punten van het interval die niet tot deze puntverzameling behoren, de afstand tot de te approximeren functie aanzienlijk zijn. Als men tot steeds grotere discrete puntverzamelingen overgaat, dan ligt het voor de hand dat de keuze daarvan in ieder geval zo wordt gedaan dat het gehele interval wordt opgevuld, dat er dus geen gaten overblijven. Dit kan streng worden geformuleerd door de dichtheid van een puntverzameling in te voeren. Het feit dat er geen gaten in het interval overblijven, betekent dan dat de dichtheid naar nul gaat. Er kan nu worden bewezen [10] dat, als een functie f uit de ruimte C[a,b] benaderd wordt door algebraïsche polynomen uit de klasse P_n, de beste approximaties voor f op een rij van gegeven puntverzamelingen van [a,b] naar de beste approximatie voor f op het gehele interval convergeren, als de dichtheid van de gebruikte puntverzamelingen naar nul gaat. Voor de numerieke wiskunde is dit resultaat van belang, aangezien bepaalde algorithmen voor het vinden van de beste approximatie erop zijn gebaseerd. In dit verband wil ik nog opmerken, dat de veelgebruikte Remez-algorithmen [11] voor het berekenen van de beste benadering op een ander principe berusten.

Een onderwerp dat binnen de approximatietheorie veel belangstelling heeft gehad, is het volgende. Kan elke functie uit de ruimte C[a,b] willekeurig dicht worden benaderd door algebraïsche polynomen? Dit is een parafrasering van de vierde vraag. K. Weierstrass [12] heeft in 1885 een bevestigend antwoord daarop gegeven. Inderdaad kan bij elke continue functie een algebraïsch polynoom worden gevonden met de eigenschap dat het maximum van de absolute waarde van de bijbehorende foutfunctie op het gehele interval kleiner is dan een vooraf gekozen positief getal. Weierstrass bewees tevens dat een analoog resultaat geldt voor de benadering van continue periodieke functies met periode 2π door middel van trigonometrische polynomen. In feite kan het ene resultaat uit het andere worden afgeleid [13].

Het is misschien nuttig erop te wijzen dat voor het polynoom, waarvan in de stelling van Weierstrass sprake is, in het algemeen niet de reeks van Taylor kan worden gebruikt. Dat is slechts mogelijk voor een deelverzameling van de ruimte C[a,b]. De stelling kan ook niet worden afgeleid door de graad van het interpolatiepolynoom van Lagrange maar groot genoeg te nemen. Op dit resultaat kom ik aanstonds nog terug.

Voor de approximatiestelling van Weierstrass zijn vele bewijzen bekend. Weierstrass zelf levert het bewijs in twee stappen. Via een bepaalde integraaloperator wordt eerst een functie gevonden die een willekeurig kleine afstand tot de te benaderen functie heeft, daarna wordt een algebraïsch polynoom geconstrueerd dat op zijn beurt een willekeurig kleine afstand heeft tot het beeld van de integraaloperator.

Een geheel andere methode werd gevolgd door H. Lebesgue [14]. Zijn bewijs verloopt als volgt. De te approximeren functie wordt continu verondersteld op een gesloten interval en is daarom uniform continu. Een consequentie hiervan is dat er een gebroken lijn bestaat die de functie willekeurig dicht benadert. Deze gebroken lijn kan worden voorgesteld als een som van functies, waarbij elk van deze functies weer de som is van een lineaire functie en de absolute waarde van een lineaire functie. Het hele probleem is aldus gereduceerd tot het vinden van een algebraïsch polynoom dat de functie $f(x) = |x|$ voorstelt met een willekeurig kleine afwijking, bijvoorbeeld op het interval $[-1,1]$. Dit bewijs is constructief, maar levert geen concrete rij van polynomen die voor praktische approximatiedoeleinden kan worden gebruikt.

Ik heb reeds opgemerkt dat vele wiskundigen van naam zich met de approximatiestelling van Weierstrass hebben beziggehouden. Het bewijs van Weierstrass zelf had het nadeel dat het beeld van de gebruikte operator niet direct een algebraïsch polynoom opleverde. Het lag voor de hand naar operatoren te zoeken, waarbij dit wel het geval was. Dergelijke operatoren zijn onder andere gegeven door E. Landau [15] en C. J. de La Vallée Poussin [16].

Het bewijs van de stelling van Weierstrass dat men ongetwijfeld het meest in de literatuur tegenkomt, heb ik nog niet genoemd. Het is elegant en heeft bovendien het voordeel dat bij de beschouwde functie f een concrete rij van polynomen wordt aangegeven die uniform naar f convergeren. Ik doel hier op het bewijs gegeven door de Russische wiskundige S. N. Bernstein [17]. De bijbehorende polynomen dragen zijn naam, Bernstein-polynomen. Na Bernstein zijn vele wiskundigen onder de bekoring van deze polynomen gekomen en er zijn talloze publikaties aan gewijd. Dit niet in het minst onder invloed van een boek dat door G. G. Lorentz [18] over dit onderwerp is geschreven. Daar wordt ook aangegeven in welke andere gebieden van de wiskunde deze polynomen een rol spelen.

Vanuit praktisch standpunt bekeken zijn Bernstein-polynomen niet zo waardevol. Om een aanvaardbare approximatie te verkrijgen, moet men vaak een Bernstein-polynoom van té hoge graad nemen. Een indicatie hiervoor is het feit dat geen enkel element uit de rij van de Bernstein-polynomen, toegevoegd aan een algebraïsch polynoom van de tweede graad, overeenstemt met deze functie. Aan de andere kant worden bepaalde eigenschappen van de functie bij de approximatie door middel van deze polynomen geconserveerd. Zo is bijvoorbeeld het Bernstein-polynoom van een convexe functie weer convex [19]. Een dergelijk gedrag kan van belang zijn als bij het approximatieproces nevenvoorwaarden worden gesteld.

Waar zo veel bewijzen van de approximatiestelling van Weierstrass zijn gegeven, kan het nuttig zijn ze aan een onderzoek te onderwerpen met het doel gemeenschappelijke kenmerken te ontdekken. De situatie is in grote lijnen aldus. Aan de beschouwde functie wordt een rij van algebraïsche polynomen toegevoegd die uniform op het gehele interval naar de functie convergeren. De toevoeging geschiedt door een operator. Een analyse van deze operatoren laat zien dat ze in de meeste gevallen lineair en positief zijn. Positiviteit betekent hier dat aan een niet-negatieve functie een functie met dezelfde eigenschap wordt toegevoegd. Bij het onderzoek van de rol die lineaire positieve operatoren in de approximatietheorie spelen, moet hier in het bijzonder de naam van P. P. Korovkin [20] worden genoemd. Een van de aantrekkelijkste resultaten uit zijn theorie houdt in, dat men de uniforme approximatie voor de beelden van een rij van lineaire positieve operatoren slechts hoeft na te gaan voor een drietal geschikt gekozen elementen uit de ruimte C[a,b]. Is de uitkomst bevredigend, dan kan dezelfde conclusie worden getrokken voor alle functies uit C[a,b]. Bernstein-operatoren zijn lineair en positief.

Ik geef nu een iets andere formulering van het resultaat van Weierstrass. Daartoe eerst de volgende definitie. Een deelverzameling in een genormeerde lineaire ruimte wordt volledig genoemd, wanneer elk element uit de genormeerde lineaire ruimte benaderd kan worden met elke gewenste graad van nauwkeurigheid door een lineair compositum van elementen uit deze deelverzameling. De stelling van Weierstrass houdt in dat de verzameling $P = \{1,x,x^2,\dots\}$ volledig is in de ruimte C[0,1]. Een interessante vraag is nu welke deelverzamelingen van P eveneens volledig zijn in C[0,1]. De stelling van C. Müntz [21] geeft hierop het antwoord. Het element 1 in de verzameling P kan zeker niet worden gemist, daar anders een functie uit C[0,1], die ongelijk aan nul is in het linker eindpunt van het eenheidsinterval, niet willekeurig dicht kan worden benaderd. Maar verder is er voldoende vrijheid; Müntz bewees namelijk dat de verzameling $\{1,x^{p_1},x^{p_2},\dots\}$ dan en slechts dan volledig is in C[0,1], wanneer de som van de reciproke waarden van de exponenten $p_1,p_2,\dots$ divergent is. Als bijzonder geval volgt dat voor de exponenten de rij van de priemgetallen kan worden genomen, echter niet de rij der kwadraten van de natuurlijke getallen.

We hebben gezien dat bij een willekeurige functie f uit de ruimte C[a,b] een beste polynoomapproximatie t_n kan worden gevonden in de klasse van alle algebraïsche polynomen met graad $\leqslant$ n. De afstand tussen f en t_n op het interval [a,b] hebben we met $E_n(f)$ aangegeven. Volgens de approximatiestelling van Weierstrass gaat de rij $\{E_n(f)\}$ naar nul als n naar oneindig gaat. Dit is dus reeds een partiëel antwoord op de vijfde vraag, die ik bij het algemene approximatieprobleem van continue functies met behulp van algebraïsche polynomen heb gesteld. Maar we willen meer weten, namelijk hoe snel de rij $\{E_n(f)\}$ naar nul gaat, afhankelijk van de eigenschappen van de gekozen functie f. Dit is een centraal vraagstuk in de approximatietheorie.

Fundamentele resultaten met betrekking tot dit probleem werden bereikt door de Amerikaanse wiskundige D. Jackson in zijn in 1911 verschenen proefschrift [22]. Deze bekroonde dissertatie werd geschreven onder leiding van E. Landau. In het voorwoord van zijn boek "The Theory of Approximation" verhaalt Jackson [23] hoe de keuze van het onderwerp tot stand kwam. Landau doet hem bij zijn eerste bezoek een aantal suggesties aan de hand over onderwerpen in de analyse en de getallentheorie, die voor het bewerken van een proefschrift geschikt zijn. Als Jackson na enige dagen terugkomt en meedeelt dat zijn keuze is gevallen op het probleem hoe nauwkeurig een gegeven continue functie kan worden benaderd door een polynoom van een bepaalde graad, dan is de reactie van Landau: „Das ist ein schönes Thema, ich beneide Sie um das Thema . . . Nein, ich beneide Sie nicht, aber es ist ein wunderschönes Thema".

Bij de formulering van zijn resultaten maakt Jackson gebruik van de continuïteitsmodulus van een functie. Dit begrip is door De La Vallée Poussin geïntroduceerd en deze grootheid treedt in vele foutschattingen op. De continuïteitsmodulus $\omega(f;\delta)$ van een gegeven functie f geeft aan hoe groot de absolute waarde van het verschil tussen twee functiewaarden hoogstens kan zijn, als hun argumenten niet meer dan δ verschillen. Voor een continue functie is de snelheid waarmee $\omega(f;\delta)$ naar nul convergeert als δ naar nul gaat, een maat voor de gladheid van de functie op het betrokken interval.

De bewijzen voor de stellingen van Jackson worden in het algemeen eerst geleverd voor de approximatie van continue periodieke functies met periode 2π met behulp van trigonometrische polynomen. De transformatie naar het algebraïsche geval kan dan gemakkelijk worden uitgevoerd. De inhoud van een van de stellingen van Jackson is: voor een willekeurige functie f uit C[a,b] wordt een bovengrens voor de grootheid $E_n(f)$ gegeven door het produkt van een, hier nu niet ter zake doende, constante en de continuïteitsmodulus van f met argument n^{-1}. Deze schatting kan, gelet op de gehele ruimte C[a,b], ook niet worden verbeterd. Dit volgt bijvoorbeeld uit een onderzoek van de beste approximatie binnen de klasse P_n voor de functie, welke op het interval [−1,1] gegeven wordt door $f(x) = |x|$. Dit is een resultaat van Bernstein [24].

De vraag ligt voor de hand, hoe het zojuist genoemde resultaat van Jackson verbeterd kan worden wanneer de functie op het interval [a,b] een aantal keren differentieerbaar is. Ook dit probleem is opgelost door Jackson. Wanneer de functie f op het interval [a,b] p keer continu differentieerbaar is, dan geldt dat de grootheid $E_n(f)$, afgezien van een constante, niet groter is dan het produkt van n^{-p} en de continuïteitsmodulus van de p-de afgeleide van f; het argument van deze continuïteitsmodulus gaat weer naar nul als n naar oneindig gaat. Ook dit resultaat kan in het algemeen niet worden verbeterd.

Jackson's resultaten laten ons zien dat uit de structuureigenschappen van de functie informatie kan worden verkregen over de kwaliteit van de beste approximatie. In wat Jackson een van de belangrijkste artikelen noemt die over approximatietheorie zijn geschreven, behandelt Bernstein [24] onder meer het omgekeerde probleem. Het gaat er dan dus om uit de snelheid waarmee de rij $\{E_n(f)\}$ naar nul gaat, conclusies te trekken over de continuïteits- en differentieerbaarheidseigenschappen [25] van f.

Waarde toehoorders,

In het voorgaande is uitsluitend gesproken over het benaderen van continue functies met behulp van algebraïsche polynomen, waarbij het door Chebyshev ingevoerde afstandsbegrip werd gehanteerd. Deze theorie kan bogen op een groot aantal resultaten. We hebben bijvoorbeeld gezien dat een willekeurige continue functie, gedefinieerd op een gesloten interval, met elke gewenste nauwkeurigheid benaderd kan worden door een algebraïsch polynoom. Maar de graad van het polynoom dat we nodig hebben, kan natuurlijk zeer hoog zijn. Dit is een ernstig nadeel. Door te werken met het polynoom van beste approximatie kunnen we, met behoud van dezelfde nauwkeurigheid, de graad waarschijnlijk verlagen. Maar de bepaling van de beste approximatie is in het algemeen geen eenvoudige zaak. Weten we dat de te benaderen functie differentieerbaar is, dan is het beste approximatiepolynoom bovendien van weinig waarde voor het vinden van een benadering voor de eerste afgeleide van de beschouwde functie, daar dit polynoom om de functie oscilleert. Dit geeft aanleiding tot grote afwijkingen in eerste, en indien ze bestaan, hogere afgeleiden.

Nog een andere mogelijkheid is de functie te benaderen met interpolatiepolynomen van Lagrange, waarbij we steeds meer knooppunten nemen en de graad van het polynoom dus steeds hoger wordt. Maar ook dit proces is niet zonder gevaar, want hoe we ook de knooppunten over het interval [a,b] verdelen, er bestaat altijd een functie in de ruimte C[a,b] waarvoor de rij van Lagrange-polynomen in een bepaald punt van het interval [a,b] divergeert. Dit is de inhoud van een stelling van G. Faber [26].

Er kan echter een andere weg gevolgd worden; dit leidt tot de zogenaamde strooklat-approximatie ("spline approximation"). Gedurende de rest van deze les zou ik graag enkele opmerkingen over dit onderwerp willen maken. Het idee is het interval [a,b] in een aantal kleinere intervallen te verdelen; de eindpunten van de deelintervallen worden de knooppunten genoemd. Op elk van deze intervallen wordt als benadering een polynoom genomen van een lage graad. De verdeling van het interval [a,b] wordt nu steeds meer verfijnd en wel zodanig dat de lengte van het grootste deelinterval naar nul gaat. Gedurende het proces is de graad van de benaderingspolynomen vast en voor alle deelintervallen hetzelfde. Men kan bijvoorbeeld als approximatie voor f op elk deelinterval een lineaire functie nemen, die in de knooppunten dezelfde waarde aanneemt als de functie f. Er ontstaat als benadering dan een gebroken lijn; dit is een eenvoudig voorbeeld van een strooklatfunctie. In dit approximatieproces treedt, bij steeds fijnere verdeling van het interval, uniforme convergentie naar de beschouwde functie op.

Voor bepaalde doeleinden kan het echter een nadeel zijn, dat de eerste afgeleide van deze strooklatfunctie in de knooppunten een sprong vertoont. Daarom neemt men liever op elke deelinterval een polynoom van een iets hogere graad als benadering. Bij een willekeurige keuze van de knooppunten op het interval [a,b] blijkt het nu mogelijk te zijn op elk deelinterval een polynoom van de derde graad te vinden, dat in de knooppunten dezelfde waarde heeft als de functie f en dat verder op het gehele interval [a,b] een continue eerste en tweede afgeleide heeft. Het samenstel van deze interpolatiepolynomen is een ander voorbeeld van een strooklatfunctie; dit type is in de literatuur het meest uitgebreid beschreven en ik zal mij dan ook hiertoe beperken.

Een woord over het ontstaan van strooklatfuncties en waarom er zoveel aandacht aan wordt besteed, is hier op zijn plaats. Het komt nog al eens voor dat men voor het probleem staat een vloeiende kromme te leggen door een aantal voorgeschreven punten. Als bijvoorbeeld een technisch tekenaar in zijn werk een dergelijk vraagstuk tegenkomt, werkt hij wel met een buigzame dunne lat. Door op verschillende plaatsen stukken lood op de lat te leggen kan hij de lat zo gebogen houden, dat een kromme ontstaat die door de vastgestelde punten gaat. De kunst is nu de gewichten zo op de lat te plaatsen dat de steunpuntsreacties klein zijn ten opzichte van de aanwezige wrijvingskracht. Het vloeiend verloop van de curve wordt gecontroleerd door hier en daar een gewicht op te tillen en te zien of de lat verschuift. Naast deze omschrijving kan men ook de volgende formulering geven: er wordt naar een stand van de lat gezocht die door de voorgeschreven punten gaat en waarbij de potentiële energie van de lat minimaal is. Het beschreven procedé wordt stroken genoemd. Stroken wordt nog steeds toegepast in de scheepsbouw en de vliegtuigbouw. Het mathematische analogon van deze vernuftige werkwijze zijn de strooklatfuncties.

Strooklatfuncties als een nieuwe klasse van benaderingsfuncties werden in 1946 geïntroduceerd door I. J. Schoenberg [27]. Hun belang ligt vooral in het feit dat voor een grote variëteit verdelingen van het interval [a,b] uniforme convergentie naar de te benaderen functie optreedt, dat strooklatfuncties betrekkelijk eenvoudig te berekenen zijn en verder dat ze bruikbaar zijn in talrijke toepassingen. Is de beschouwde functie bovendien een aantal keren differentieerbaar, dan leveren de afgeleiden van de strooklatfunctie goede benaderingen: er treedt simultane convergentie naar de afgeleiden van de functie op. Ik merk nog op dat meerdimensionale strooklatfuncties kunnen dienen bij de berekening van automobielprofielen en scheepsoppervlakken.

Strooklatfuncties hebben verschillende minimumeigenschappen [28]; een ervan wil ik hier noemen. Als een willekeurige functie f uit de ruimte C[a,b] is gegeven en bovendien een willekeurige verdeling van het interval [a,b], dan is van alle tweemaal continu differentieerbare functies, die in de gegeven knooppunten van het interval dezelfde waarde hebben als de functie f, de interpolerende strooklatfunctie het element waarvoor de integraal van het kwadraat van de tweede afgeleide, genomen tussen de grenzen a en b, zo klein mogelijk is. Ik wil op dit punt herinneren aan de essentie van het stroken, namelijk een stand van de lat te vinden die door de vastgelegde punten gaat en waarbij de potentiële energie van de lat minimaal is. Aangezien de zojuist genoemde integraal gezien kan worden als een gelineariseerde approximatie voor deze potentiële energie, komt het er dus op neer dat de lat de vorm aanneemt van de grafiek van een strooklatfunctie. De plaatsen waar de stukken lood op de lat zijn gelegd, fungeren hierbij als de knooppunten.

Een ogenblik geleden is opgemerkt dat convergentie optreedt van de strooklatfuncties naar een willekeurig element van de ruimte C[a,b] voor de meeste typen verdelingen van het interval [a,b]. Een interessant vraagstuk is: wat is de invloed van de gekozen verdeling op het gedrag van de strooklatfuncties? Bij een bepaalde rij verdelingen van het interval, met de eigenschap dat de lengte van het grootste deelinterval naar nul gaat, blijkt het mogelijk te zijn een continue functie te vinden waarvoor in een bepaald punt van het interval divergentie van de bijbehorende strooklatfuncties optreedt. Dit is een resultaat uit 1967 [29] en beantwoordt een vraag van Schoenberg. De reden voor dit verschijnsel ligt in het volgende. De overgang van de functie f uit C[a,b] naar de interpolerende strooklatfunctie geschiedt door een operator. Het is van belang na te gaan hoe de norm van deze operator afhangt van de verdeling van de knooppunten over het interval [a,b]. Voor bepaalde rijen verdelingen blijkt nu dat deze norm willekeurig groot wordt [30]. Een stelling uit de functionaalanalyse verzekert dan het bestaan van een continue functie, waarvoor in een bepaald punt van het interval de strooklatfuncties zullen divergeren.

Zeer gewaardeerde toehoorders,

In deze les zijn slechts twee onderwerpen uit de approximatietheorie aan de orde geweest. Uitvoerig is ingegaan op het benaderen van continue functies met behulp van algebraïsche polynomen in de zin van Chebyshev. De reden hiervoor is dat deze theorie representatief is voor de vraagstukken die in het algemeen in de approximatietheorie een rol spelen. Dan is verder aandacht besteed aan het benaderen met strooklatfuncties. Dit gebied bevindt zich nog in volle ontwikkeling.

Het spreekt vanzelf dat in dit uur veel ongezegd moest blijven. Zo is bijvoorbeeld niet gesproken over de rationale approximatietheorie. Toch is het misschien nu mogelijk om tot een plaatsbepaling van de approximatietheorie te komen binnen de wiskunde. In overeenstemming met de methodiek van het vak zouden we kunnen zeggen dat zij tussen de numerieke wiskunde en de functionaalanalyse in ligt. Juist door deze verwantschap is de approximatietheorie een zeer aantrekkelijk gebied en biedt zij wiskundigen van velerlei richting mogelijkheden tot onderzoek.

Aan het begin van deze les heb ik gezegd dat het niet onplezierig behoeft te zijn om weer eens kennis te nemen van grotendeels bekende stof. Ik weet niet hoevelen van U, na het aanhoren van dit exposé, deze mening nog kunnen onderschrijven. Natuurlijk hoop ik dat er onder U niet teveel zijn, die alles al wisten wat ik verteld heb. Maar het was toch ook de eerste les?

Ik dank U voor Uw aandacht.

Noten

1) Gegevens over de levensloop van Chebyshev vindt men in het artikel „Notice Biographique" van C. A. Posse, opgenomen in Chebyshev, P. L., Oeuvres II, St. Petersburg, 1899, p. 1-6. Een herdruk van Chebyshev's verzameld werk is in 1962 verschenen bij Chelsea Publ. Co., New York.
2) Chebyshev, P. L., Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions. Oeuvres I, St. Petersburg, 1899, p. 273-378.
3) Fox, L., and I. B. Parker, Chebyshev polynomials in numerical analysis. Oxford Univ. Press, London, 1968.
4) Lanczos, C., Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions. J. Math. Phys. 17, 123-199 (1938).
5) Kirchberger, P., Über Tchebychefsche Annäherungsmethoden. Math. Ann. 57, 509-540 (1903). Dit artikel is een samenvatting van het in 1902 verschenen proefschrift van de auteur, geschreven onder leiding van D. Hilbert.
6) Het bewijs, dat het strikt genormeerd zijn van de genormeerde lineaire ruimte een voldoende voorwaarde is voor de eenduidigheid van de beste benadering, wordt toegeschreven aan M. G. Krein. Zie voor het bewijs: Achieser, N. I., Theory of approximation. Frederick Ungar Publ. Co., New York, 1956, p. 11-12. Dat het strikt genormeerd zijn van de ruimte ook noodzakelijk is, vindt men bewezen in Hirschfeld, R. A., On best approximations in normed vector spaces. Nieuw Arch. v. Wiskunde (3) 6, 41-51 (1958).
7) Borel, E., Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes. Gauthier-Villars, Paris, 1905, p. 85.
8) Stel $g_0,\ldots,g_n$ behoren tot $C[0,1]$ en zijn lineair onafhankelijk. Beschouw
$$\lambda_0 g_0(x) + \ldots + \lambda_n g_n(x),$$
waarbij tenminste een van de reële coëfficiënten λ_i $(i = 0,\ldots,n)$ verschillend is van nul. Als elke aldus te vormen lineaire combinatie niet meer dan n verschillende nulpunten heeft op het interval $[0,1]$, dan wordt het stelsel $g_0,\ldots,g_n$ een Chebyshev-systeem genoemd op $[0,1]$.
9) Haar, A., Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen. Math. Ann. 78, 294-311 (1918).
10) Zie bijvoorbeeld Cheney, E. W., Introduction to approximation theory. McGraw-Hill, New York, 1966, p. 87-88.
11) Vergelijk Cheney, E. W., a.w., p. 95-100. Een behandeling van de algorithmen van Remez vindt men ook in Meinardus, G., Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung. Springer-Verlag, Berlin, 1964, p. 98-110.
12) Weierstrass, K., Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen. Sitz.-Ber. Akad. d. Wiss. Berlin, 633-639 u. 789-805 (1885). Zie voor een levensbeschrijving van Weierstrass (1815-1897) het boek van Bell, E. T., Men of mathematics. Simon and Schuster, New York, 1961, p. 406-432.
13) Vergelijk De La Vallée Poussin, C. J., Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Gauthier-Villars, Paris, 1919. Het werk is bij dezelfde uitgever herdrukt in 1952; zie de blz. 5-6 van deze druk. Voor enkele gegevens over De La Vallée Poussin (1866-1962) kan men terecht bij Favard, J.,

Hommage à Charles de La Vallée Poussin. Dit biografische artikel is opgenomen in: On approximation theory, Proceedings of the conference at Oberwolfach, 1963. Birkhäuser Verlag, Basel, 1964, p. 1-3.

14) Lebesgue, H., Sur l'approximation des fonctions. Bull. Sci. Math. (2) **22**, 278-287 (1898).

15) Landau, E., Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion. Rendiconti Circ. Math. Palermo **25**, 337-345 (1908).

16) De La Vallée Poussin, C. J., Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier. Bull. Acad. de Belgique **3**, 193-254 (1908).

17) Bernstein, S. N., Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul de probabilités. Comm. Soc. Math. Kharkov (2) **13**, 1-2 (1912). Gegevens over Bernstein (1880-   ) en een beschrijving van zijn wetenschappelijk werk vindt men in een artikel, geschreven door V. L. Goncharov en A. N. Kolmogorov ter gelegenheid van zijn zestigste verjaardag. Zie hiervoor Izv. Akad. Nauk, ser. Math. **4**, 249-260 (1940); vergelijk ook Izv. Akad. Nauk, ser. Math. **14**, 193-198 (1950). Een volledige lijst van Bernstein's publikaties tot en met het jaar 1949 is in deze twee artikelen opgenomen.

18) Lorentz, G. G., Bernstein polynomials. Univ. of Toronto Press, Toronto, 1953.

19) Vergelijk Lorentz, G. G., a.w., p. 23.

20) Korovkin, P. P., Linear operators and approximation theory. Hind. Publ. Co., Delhi, 1960, p. 14.

21) Müntz, Ch., Über den Approximationssatz von Weierstrass. Festschr. H. A. Schwarz, Springer-Verlag, Berlin, 1914, p. 303-312.

22) Jackson, D., Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. Diss. u. Preisschr., Göttingen, 1911. Biografische gegevens over Jackson en een bespreking van zijn wetenschappelijk werk vindt men in het levensbericht "Dunham Jackson 1888-1946" van W. L. Hart, verschenen in Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 847-860 (1948).

23) Jackson, D., The theory of approximation. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. **11**, New York, 1930.

24) Bernstein, S. N., Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné. Mémoire l'Acad. Royale de Belgique (2) 4, 1-103 (1912). Dit artikel werd door de Koninklijke Belgische Akademie van Wetenschappen bekroond met een gouden medaille.

25) Een van de resultaten van Bernstein luidt aldus: als voor een functie f uit de ruimte C[a,b] de grootheid $E_n(f)$ voor elk natuurlijk getal n kleiner is dan het produkt van een constante en $n^{-\alpha}$, waarbij α een reëel getal is uit het interval (0,1), dan voldoet de functie f in elk segment, dat geheel in het interval (a,b) ligt, aan een Lipschitz-voorwaarde met exponent α. Deze stelling is het complement van het eerstgenoemde resultaat van Jackson, daar er een nauw verband bestaat tussen de continuïteitsmodulus van f en het voldoen aan een Lipschitz-voorwaarde.
Ik wil nog een opmerking maken over de samenhang tussen deze stelling van Bernstein en het complementaire resultaat van Jackson. Als de functie f voldoet aan een Lipschitz-voorwaarde met exponent 1, dan geldt dat de rij

$\{E_n(f)\}$ naar nul gaat als n^{-1}; dit is een gevolg van de resultaten van Jackson. In de stelling van Bernstein is het geval $\alpha = 1$ echter uitgezonderd. Dit niet zonder reden, daar er functies bestaan waarvoor de rij $\{E_n(f)\}$ naar nul convergeert als n^{-1}, maar die niet aan een Lipschitz-voorwaarde met exponent 1 voldoen. Een volledige karakterisering van de functieklasse, waarvan de elementen f de eigenschap hebben dat de rij $\{E_n(f)\}$ zich gedraagt als n^{-1}, is gegeven door A. Zygmund. (Zygmund, A., Smooth functions. Duke Math. J. **12**, 47-76 (1945)).

26) Faber, G., Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen. Jahresber. der Deutsche Math.-Verein. **23**, 192-210 (1914).

27) Schoenberg, I. J., Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Quart. Appl. Math. **4**, 44-99 and 112-141 (1946).

28) Holladay, J. C., Smoothest curve approximation. Math. tables and other aids to comput. **11**, 233-243 (1957).

29) Nord, S., Approximation properties of the spline fit. Nord. Tidskr. Informations-Behandling (BIT) **7**, 132-144 (1967).

30) Cheney, E. W., and F. Schurer, A note on the operators arising in spline approximation. J. App. Theory (1) **1**, 94-102 (1968).