Een blik in de getaltheorie

DR. J. H. VAN LINT

EEN BLIK IN DE GETALTHEORIE

N.V. UITGEVERS-MAATSCHAPPIJ
W. E. J. TJEENK WILLINK / ZWOLLE / 1959

EEN BLIK IN DE GETALTHEORIE

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING VAN HET AMBT VAN GEWOON HOOGLERAAR IN DE WISKUNDE AAN DE TECHNISCHE HOGESCHOOL TE EINDHOVEN OP VRIJDAG 20 NOVEMBER 1959

DOOR

Dr. J. H. VAN LINT

N.V. UITGEVERS-MAATSCHAPPIJ
W. E. J. TJEENK WILLINK / ZWOLLE / 1959

Mijne heren curatoren,
Mijne heren leden van de senaat en adviseurs,
Dames en heren leden van het wetenschappelijk, het administratief en het technisch personeel van deze hogeschool,
Dames en heren studenten,
en voorts Gij allen, die deze plechtigheid met Uw tegenwoordigheid vereert.

Zeer gewaardeerde toehoorders,

Een onopgelost wiskundig probleem wordt door iedere wiskundige met enthousiasme en vaak met ongerechtvaardigd optimisme aangepakt.

Ongrijpbaarheid en moeilijkheid zullen hem eerder stimuleren dan afschrikken. Vraagt men hem echter, te spreken over wàt hij doet en waaròm hij dat doet, dan slaat de schrik hem om het hart. Hij weet dat de aard van zijn vak en de vaak vijandige houding van de buitenwereld het gevaar niet denkbeeldig maken, dat zijn goedbedoelde poging, iets van de door hem beleefde vreugde duidelijk te maken, de toehoorder alleen overtuigt dat de wiskunde dor of de spreker niet goed wijs is.

Voor deze lastige opgave geplaatst, heb ik gewoontegetrouw eerst de beschikbare literatuur op dit gebied bestudeerd. Dit was gelukkig niet moeilijk, daar tientallen in de laatste jaren gehouden inaugurele redes van wiskundigen beschikbaar waren. Vele daarvan werden uitgesproken bij een ambtsaanvaarding aan een technische hogeschool. Het bleek dat de aan technische hogescholen verbonden wiskundigen zich vaak geroepen voelden hun aanwezigheid te rechtvaardigen door te wijzen op de diverse toepassingen die de wiskunde tegenwoordig vindt in alle mogelijke takken van wetenschap, ook die waar men het lange tijd zonder de wiskunde meende te kunnen stellen. Veel van de vooruitgang die de laatste jaren is gemaakt dankt men aan het beschikbaar zijn van een wiskundige theorie. De toelichting van enkele aspecten daarvan toont de nuttigheid van de spreker en zijn vak.

Het zal mij bijzonder lastig vallen de moeilijkheid op deze manier aan te pakken, daar ik volkomen overtuigd ben van de juistheid van de inmiddels beroemd geworden woorden, door DE BRUIJN in zijn inaugurele rede tot de studenten gesproken: „Wij drijven deze zaak voor ons plezier." In het verleden heb ik zelf wel eens verkondigd dat één van de mooiste eigenschappen die een wiskundige theorie kan hebben is, dat ze nergens in de praktijk kan worden toegepast. De wiskunde is een mooi gebouw dat nog steeds groter en hoger, of beter gezegd dieper wordt, en daaraan te mogen meebouwen schenkt veel bevrediging. Het is jammer dat dit gebouw zo weinig vensters heeft waardoor men naar binnen kan kijken, vooral voor diegenen die slechts willen zien wat met de inhoud kan worden gedaan. Het probleem werd nog groter bij het doorlezen van de inaugurele redes van enkele voorgangers op deze plaats. PEREMANS zegt immers „dat alle wiskunde toepasbaar is en vroeger of later ook werkelijk toegepast wordt", terwijl ALBLAS er op wijst dat de rechtvaardiging van de beoefening der wiskunde niet gevonden kan worden „in de onjuiste opvatting dat alle wiskunde eenmaal toegepaste wiskunde zal zijn."

Laat ik dus trachten in dit uur een indruk te geven van die tak van wiskunde waartoe ik mij het meest aangetrokken voel, namelijk de getaltheorie, en tevens proberen de beoefening daarvan te rechtvaardigen door het standpunt van PEREMANS te verdedigen. Nodig is het eigenlijk niet, daar ik mij zou kunnen beroepen op de woorden van één van de grootste wiskundigen aller tijden, C. F. GAUSS, die de wiskunde de koningin der wetenschappen en de getaltheorie de koningin van de wiskunde noemde. Het is daarnaast niet onaardig hier de woorden van een van de bekendste getaltheoretici van deze eeuw te citeren. In een rede voor de American Mathematical Society verklaarde G. H. HARDY dat "A month's intelligent instruction in the theory of numbers ought to be twice as instructive, twice as useful, and at least ten times as entertaining as the same amount of "calculus for engineers"."

We kunnen de getaltheorie verdelen in een aantal gebieden van analoge problemen. Als eerste gebied noemen we de multiplicatieve d.w.z. met vermenigvuldiging verband houdende getaltheorie, waartoe we rekenen problemen over deelbaarheidseigenschappen en dus ook de leer der priemgetallen.

De getaltheorie is een van de takken van de wiskunde waarvan de geschiedenis vrijwel zo ver terug gaat als de geschiedenis van de wiskunde als zodanig. In tegenstelling tot de andere reeds in de oudheid bedreven takken van wiskunde zoals bijvoorbeeld de meetkunde, had ze haar oorsprong niet in toepassingen. Zodra men zover was dat men kon tellen en rekenen, ontstond ook de getaltheorie. De meeste mensen zullen het prettig vinden te weten dat 3 maal 4 gelijk is aan 12, en zich er verder niet druk om maken. De wiskundig nieuwsgierige zal zich meteen afvragen of alle natuurlijke getallen, dat zijn positieve gehele getallen, evenals 12 geschreven kunnen worden als het produkt van twee kleinere natuurlijke getallen en spoedig ontdekken dat er behalve 1 nog een rij is van getallen die deze eigenschap niet hebben, namelijk 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... enz. Zo heeft hij de priemgetallen ontdekt. Het is dus begrijpelijk dat de leer der priemgetallen reeds zeer oud is. Ongeveer 300 voor Christus bewees EUCLIDES dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Eén van de belangrijkste bijdragen tot de leer van de verdeling der priemgetallen, het zogenaamde elementaire bewijs van de priemgetalstelling, werd in 1948 geleverd door A. SELBERG en P. ERDÖS. Meer dan 20 eeuwen zijn de priemgetallen fascinerend gebleven voor de vakman, maar ook voor vele leken. Enkele historisch belangrijke problemen wil ik hier noemen.

Men kan in één regel bewijzen dat $2^n - 1$ alleen dan een priemgetal kan zijn als n het ook is. De getallen $M_p = 2^p - 1$ die inderdaad priem zijn, zoals $3 = 2^2 - 1$, $7 = 2^3 - 1$, $31 = 2^5 - 1$, enz. heten priemgetallen van MERSENNE. Het is niet bekend of er oneindig veel priemgetallen van MERSENNE zijn. Zij houden verband met een veel ouder probleem uit de getaltheorie, namelijk het probleem der perfecte getallen. Een getal heet perfect, als het de som is van zijn echte delers. Zo zijn $6 = 1 + 2 + 3$ en $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ perfecte getallen. Deze getallen speelden een grote rol in de numerologie, een vroeger veel bedreven vak, waarin verband werd gezocht tussen voorwerpen of gebeurtenissen en getallen, en waarin aan die getallen een diepere betekenis werd gehecht. Het getal 13 heeft voor velen die betekenis nog. Natuurverschijnselen moesten zoveel mogelijk met perfecte getallen beschreven worden, daar de schepping wel perfect moest zijn. Daarom was de wereld in 6 dagen gemaakt en daarom draait de maan in 28 dagen om de aarde. EUCLIDES bewees dat getallen van de vorm $2^{p-1}M_p$ perfect zijn. EULER toonde aan dat alle even perfecte getallen zo zijn te schrijven. Veel meer heeft men nog niet kunnen bewijzen en een oneven perfect getal is nog nooit gevonden. In zijn boek over getaltheorie schreef BARLOW in 1811: "2^{30} M_{31} is the greatest perfect number that will ever be discovered, for, as they are merely curious without being useful it is not likely that any person will attempt to find one beyond it."

BARLOW heeft de belangstelling voor nutteloze problemen onderschat. Ik weet niet wat op het ogenblik het grootste bekende perfecte getal is.

Enkele jaren geleden was het 2^{3216} $(2^{3217} - 1)$ en nog steeds zoekt men naar grotere.

Al het werk dat op het gebied van de priemgetallen is gedaan, gestimuleerd door wetenschappelijke belangstelling of door talloze puzzels, lijkt nog steeds nutteloos. De stellingen die men zoekt zijn echter vaak zeer diep en slechts te bewijzen met behulp van wiskundige hulpmiddelen uit zeer uiteenlopende gebieden, waaronder de functietheorie een belangrijke plaats inneemt. Zeer vaak waren de getaltheoretici genoodzaakt deze hulpmiddelen eerst zelf te ontwikkelen en op die wijze leverden zij grote bijdragen tot wat men nuttige wiskunde kan noemen.

Laten we eens een fase van het onderzoek over deelbaarheidseigenschappen bekijken. We voeren eerst de functie $\varphi(n)$ in. $\varphi(n)$ is het aantal natuurlijke getallen kleiner dan *n* en onderling ondeelbaar met *n*. Zo zijn er 8 natuurlijke getallen kleiner dan 15 en onderling ondeelbaar met 15, nl. 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 en 14. Dus is $\varphi(15) = 8$. Is p een priemgetal, dan zijn de getallen $1, 2, \ldots p - 1$ alle met p onderling ondeelbaar en dus is $\varphi(p) = p\text{-}1$. We beginnen nu met een door FERMAT in 1640 in een brief aan FRENICLE DE BESSY medegedeelde stelling. Laat p een priemgetal zijn en a een niet door p deelbaar getal. Dan is $a^{p-1} - 1$ een veelvoud van p. Is bijvoorbeeld $p = 5$ en $a = 2$ dan is $a^{p-1} = 2^4 = 16$ en $16 - 1 = 15$ is een veelvoud van 5.

Deze stelling werd in 1736 door EULER bewezen en in 1760 gegeneraliseerd. EULER toonde aan dat als a en m onderling ondeelbaar zijn $a^{\varphi(m)} - 1$ door m deelbaar is. Kijken we nu naar het voorbeeld $m = 15$, waarvoor we vonden $\varphi(15) = 8$ en nemen we $a = 2$, dan is volgens de stelling van EULER $2^8 - 1$ door 15 deelbaar. Dit is juist, want $2^8 - 1 = 255 = 17 \times 15$. We zien echter dat $2^4 - 1 = 15$ ook door 15 deelbaar is. Hadden we in plaats van $a = 2$ een andere met 15 onderling deelbare a genomen, dan zou ook $a^4 - 1$ door 15 deelbaar geweest zijn. We hebben dus gezien dat, als we de getallen a, a^2, a^3, a^4, ... enz. door m delen, we in ieder geval bij $a^{\varphi(m)}$ de rest 1 overhouden, misschien zelfs voor een kleinere macht. Als men toch met dit probleem aan het spelen is, dan zoekt men ook nog even uit voor welke a het zo lang mogelijk duurt voor we 1 als rest tegenkomen en bij welke exponent dit dan het geval is. Zo is $\varphi(18) = 6$ en voor geschikte a dus $a^6 - 1$ door 18 deelbaar. Kiezen we $a = 7$ dan is $a^3 - 1$ reeds door 18 deelbaar, kiezen we $a = 5$ dan moeten we inderdaad tot a^6 doorgaan. Van deze dingen zijn tabellen gemaakt, evenals van het iets lastiger probleem, waarbij men eist dat het zo lang mogelijk duurt voor $a^n \pm 1$ door m deelbaar is. FERMAT, EULER en hun opvolgers hebben ongetwijfeld veel genoegen beleefd aan het vinden van deze resultaten en later heeft men ze vaak kunnen toepassen bij andere getaltheoretische problemen.

Laten we de getaltheorie nu verlaten en ons met meer praktische zaken bezighouden. Enige jaren geleden verscheen in de American Mathematical Monthly een artikel van H. P. LAWTHER van de Bell Telephone Company over het splitsen van telefoonkabels voor de interlokale dienst. De draden in zo'n kabel liggen in concentrische lagen. De kabel bestaat uit stukken van enkele honderden meters lengte die aan elkaar zijn gesplitst. Bij dit splitsen moet men de volgorde van de draden veranderen om interferentie en overspraak, waardoor men voor een ander bestemde gesprekken zou horen, zo veel mogelijk te vermijden. In het bijzonder is het gewenst dat 2 naast elkaar lopende draden van een stuk kabel in zo veel mogelijk van de volgende stukken niet naast elkaar lopen. Natuurlijk mag men om praktische redenen de regels voor het splitsen niet te ingewikkeld maken. Het is bijvoorbeeld redelijk, af te spreken dat tussen 2 draden die in een bepaald stuk kabel naast elkaar lopen, in het volgende stuk een vast, van te voren bepaald aantal draden ligt. Als we in elk stuk de draden nummeren van 1 tot en met n en bij het splitsen draad nummer 1 van een stuk vastmaken aan draad nummer 1 van het volgende stuk dan wordt nummer 2 van de eerste vastgemaakt aan nummer $1 + s$ van de volgende, 3 aan $1 + 2s$ enzovoorts. We moeten hierbij getallen groter dan n eerst reduceren, door een veelvoud van n af te trekken. Nummer $n + 1$ is dus hetzelfde als nummer 1. Gaan we nu over tot volgende stukken kabel, dan zien we dat een verlenging van de oorspronkelijke draad 1 steeds nummer 1 heeft, de oorspronkelijke nummer 2 achtereenvolgens als rangnummer heeft 2, $1 + s$, $1 + s^2$, $1 + s^3$ enzovoorts. We hadden geëist dat 2 naast elkaar lopende draden van een kabelstuk zo lang mogelijk bij elkaar uit de buurt bleven, hetgeen betekent dat hun nieuwe rangnummers zo lang mogelijk niet precies 1 verschillen. We zagen zojuist dat als de rangnummers eerst 1 verschillen, ze in de volgende stukken $s, s^2, s^3, \dots$ enz. verschillen; het is dus zaak er voor te zorgen dat de rest bij deling van $s, s^2, s^3, \dots$ door n zo lang mogelijk van $+1$ en -1 verschillend blijft. U ziet dat wij zijn teruggekeerd bij ons spelletje met getallen dat wellicht zinloos leek. De wiskunde, nodig om een handig splitssysteem voor de telefoonkabels op te maken, hoefde men niet meer uit te werken. Het probleem was al 200 jaar geleden aangepakt. De techniek heeft er voor gezorgd dat het kon worden toegepast.

Het volgende gebied van de getaltheorie waarover ik enige opmerkingen zou willen maken is de additieve getaltheorie, d.i. de leer van de voorstelling der getallen als een som. Hiervan zijn de problemen van WARING en GOLDBACH de beroemdste. Daar het onder andere de bedoeling is een indruk te geven van mijn eigen belangstelling, mag ik het vermoeden van GOLDBACH niet overslaan. Ik heb niet de illusie daar een toepassing van te kunnen geven, evenmin als ik de illusie heb het vermoeden te kunnen bewijzen. Van alle onopgeloste problemen vind ik het echter het meest fascinerende. Het probleem komt weer uit een brief, ditmaal van GOLDBACH aan EULER, geschreven in 1742. Wij hebben reeds de rij van priemgetallen: 2, 3, 5, 7, 11, 13,... genoemd. GOLDBACH beweert dat ieder even getal groter dan 2, te schrijven is als som van twee priemgetallen. Zo is bijvoorbeeld $12 = 7 + 5$, $14 = 11 + 3 = 7 + 7$. GOLDBACH kon dit niet bewijzen en het is nog steeds niemand gelukt dit te doen of het tegendeel aan te tonen, hoewel velen het hebben geprobeerd. We moeten echter wel opmerken dat een groot wiskundige als GAUSS kritiek had op dergelijke problemen. Toen men bij hem er op aandrong een poging te doen het vermoeden van FERMAT te bewijzen, liet hij duidelijk blijken dat hij het raden in de rekenkunde ongewenst vond en hij verkondigde, zelf willekeurig veel van zulke vermoedens te kunnen formuleren, die noch hij noch iemand anders zou kunnen bewijzen. U kunt zich echter wel voorstellen, dat een probleem dat zo eenvoudig is te formuleren als het vermoeden van GOLDBACH, iemand zeer kan boeien. Eén nut heeft het vermoeden in ieder geval gehad. Men heeft het al zeer vaak als voorbeeld kunnen gebruiken bij een rede over de wiskunde. Het is niet eerlijk dit als enige verdienste te noemen. De aantrekkingskracht van dit probleem, gedeeltelijk veroorzaakt door het onopgelost blijven, heeft veel bijgedragen tot de ontwikkeling van de algemene theorie van dergelijke problemen, dus de additieve getaltheorie. Hiertoe behoren ook de partitieproblemen. Een partitie van een positief geheel getal is een voorstelling van dat getal als som van een aantal positieve gehele getallen. Zo heeft $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ vijf partities. In het algemeen kan men vragen naar het aantal partities van n. De partities worden al wel toegepast onder andere bij groepentheoretische beschouwingen die in de quantummechanica een rol spelen.

De vele vermoedens die de getaltheorie kent, hebben nog op andere wijze bijgedragen tot de meer direct toepasbare wiskunde. Reeds vanaf hun ontstaan is men al deze problemen ook empirisch gaan onderzoeken. Hiertoe waren tafels van priemgetallen, van kwadraten, enz. nodig, welke vroeger gemaakt werden door nauwkeurige rekenaars met een onuitputtelijk geduld en waarvoor men thans de hulp van een rekenmachine inroept. Er zijn zelfs rekenmachines geconstrueerd alleen om een bepaald getaltheoretisch probleem aan te pakken. De ontwikkeling van de rekenmachines heeft een aantal in getaltheorie geïnteresseerde wiskundigen er toe gebracht zich te bekwamen in de numerieke wiskunde. Dat de stimulans van de getaltheorie nodig was, blijkt uit de woorden van de numericus JOHN TODD: "The profession of numerical analysis is not yet so desirable that it is taken up by choice; indeed although it is one of the oldest professions it is only now becoming respectable." Vanuit het oogpunt van de praktijk is het een geluk dat vele van deze mensen in de numerieke wiskunde blijven werken, daar dit gebied zich op het ogenblik snel ontwikkelt en het daarom gewenst is dat juist zuivere wiskundigen zich er voor interesseren, opdat ook in de te verwachten vraag naar docenten in dit vak kan worden voorzien. De betere en vooral snellere machines die in de laatste 20 jaren zijn ontwikkeld, hebben gedeeltelijk de moeite al beloond. Het reeds eerder genoemde grootste bekende perfecte getal werd bepaald op de SWAC door D. H. LEHMER, in tussenuurtjes waarin de machine niet voor belangrijker zaken werkzaam was. Bovendien is van enkele oude vermoedens de onjuistheid aangetoond, waarmee een einde gemaakt werd aan het vruchteloos zoeken naar een bewijs van deze vermoedens. De machine die een even getal vindt dat niet de som is van twee priemgetallen zal duizenden uren vruchteloos werken voorkomen. Ik hoop niet dat het een machine ooit zal lukken.

Een mooi voorbeeld van een zinloos spelletje dat men met getallen kan spelen is het volgende. Neem een getal van 2 cijfers bv. 71. Als we de volgorde van de cijfers omdraaien krijgen we het getal 17. Het verschil van deze twee getallen is 54. Draaien we dit om dan vinden we 45. Het verschil is nu 9 dat we schrijven als 09. Bij omdraaien vinden we 90. We kunnen dit proces steeds herhalen. Daar er maar 100 getallen zijn die we zo met twee cijfers schrijven, moeten we na een aantal stappen stuiten op een getal dat we al eerder gehad hebben, en de getallen die dan volgen zullen dezelfde zijn als die we de eerste keer als opvolgers vonden. Het proces is dus periodiek geworden. Men kan gemakkelijk inzien dat we voor getallen van 2 cijfers een periode van de lengte 5 krijgen waarin alle getallen veelvouden van 9 zijn, namelijk de paren $(54, 45) \rightarrow (09, 90) \rightarrow (81, 18) \rightarrow (63, 36) \rightarrow (27, 72) \rightarrow$ enz.

Een uitzondering is het geval dat we beginnen met een getal waarvan het omgedraaide hetzelfde getal is zodat we dus als eerste verschil 0 vinden, waarna we verder alleen 0 vinden. We kunnen de lengte van de periode dan 1 noemen. Blijkbaar wordt dit spelletje voldoende interessant gevonden, want het Wiskundig Genootschap schreef dit jaar als prijsvraag uit een onderzoek naar de vorm en de lengte van de periode die men bij het genoemde proces vindt, als met getallen van meer dan twee cijfers en in andere talstelsels dan het tientallige wordt gewerkt.

Zelfs voor dit soort resultaten heeft men toepassingen kunnen vinden. Ze blijken namelijk bruikbaar te zijn voor een betrouwbaarheidstest voor het rekenkundig orgaan van een elektronische rekenmachine. Van de te controleren bewerkingen maakt men een soortgelijk proces als we hier besproken hebben. Het vinden van geschikte beginvoorwaarden voor een periode van bepaalde lengte is dan een kwestie van getaltheorie. De inhoud van de registers van de machine zal periodiek terugkeren. Door een luidspreker aan te sluiten op één van de registers verkrijgt men dan een geluid van constante toonhoogte. Op deze wijze kan men een fout in de machine eenvoudig en onmiddellijk constateren, daar verandering in het voortgebrachte geluid zal optreden. Hoewel we hier dus niet een stuk dagelijks bruikbare wiskunde hebben genoemd, is het toch zeker toepasbaar en in ieder geval amusant.

Een gebied van de getaltheorie dat ik hier slechts even wil noemen is dat der diophantische vergelijkingen en diophantische approximaties. Een U allen bekend probleem uit dit gebied is het vinden van gehele getallen x, y, z waarvoor $x^2 + y^2 = z^2$. Tot dit gebied behoort het beroemde, onopgeloste probleem van FERMAT, te bewijzen dat de vergelijking $x^n + y^n = z^n$ voor $n > 2$ geen oplossing in positieve gehele x, y en z heeft. Ongetwijfeld is dit het probleem waarop de meeste amateur wiskundigen zich gestort hebben, vooral nadat in 1908 P. WOLFSKEHL, een Duits wiskundige, 100.000 Mark aan de Akademie der Wissenschaften in Göttingen schonk om uit te reiken aan diegene die de eerste oplossing van het probleem vond. Hoewel de prijs al lang niet meer bestaat, worden overal in de wereld de mathematische instituten nog steeds overstelpt met zogenaamde bewijzen van het probleem.

Een gebied dat men zelden in boeken over getaltheorie genoemd ziet is de kombinatoriek, hoewel men het toch wel tot de getaltheorie mag rekenen. Zo men wil kan men het echter ook algebra, of in bepaalde gevallen meetkunde noemen. Het lijkt mij geoorloofd er hier enige opmerkingen over te maken. Als onderwerp kies ik de zogenaamde grieks-latijnse vierkanten. Stel men heeft drie symbolen, bijvoorbeeld de cijfers 1, 2 en 3, en een vierkant dat is verdeeld in drie rijen van elk drie kleinere vierkantjes. Gevraagd wordt in elk van de negen vierkantjes één van de symbolen 1, 2 of 3 te plaatsen en wel zo, dat in elke horizontale rij en verticale rij (waarvoor we verder het woord kolom gebruiken) elk symbool precies één keer voorkomt. Dit is eenvoudig genoeg. In de eerste rij zet men 1, 2, 3; in de tweede rij 2, 3, 1 en in de derde rij 3, 1, 2. Het is duidelijk dat hetzelfde probleem voor n symbolen met een in n^2 vierkantjes verdeeld vierkant analoog kan worden opgelost en zelfs vele verschillende oplossingen zal hebben. Zo'n oplossing heet een latijns vierkant.

Wat gebeurt nu als we twee zulke vierkanten op elkaar leggen, of beter gezegd, als we achter de symbolen van een bepaald latijns vierkant de symbolen van een ander vierkant plaatsen? Voor het zojuist genoemde voorbeeld krijgen we dan in de vierkantjes getallen van twee cijfers, geschreven met de symbolen 1, 2 en 3 zoals 11, 12, 13, 21 enz. Er zijn precies negen van zulke getallen en het zou prettig zijn als deze getallen elk één keer voorkwamen in het grote vierkant. Als dit het geval is, noemen we de twee oorspronkelijke latijnse vierkanten orthogonaal en het gecombineerde vierkant een grieks-latijns vierkant. Deze naam heeft het te danken aan het feit dat men oorspronkelijk in de vierkanten griekse, respectievelijk latijnse letters plaatste. Een voorbeeld is

11	22	33
23	31	12
32	13	21

De som van de getallen in een rij of kolom is 66. Men kan dus op deze wijze magische vierkanten construeren. Het probleem een 6 × 6 grieks-latijns vierkant te construeren is bekend geworden als het probleem van de 36 officieren. Het was aan het hof van de Tsaar in de 18e eeuw dat iemand zich afvroeg of het mogelijk was 36 officieren van 6 verschillende rangen — van elke rang waren er zes officieren afkomstig uit 6 verschillende regimenten — zo in een vierkant van zes rijen en zes kolommen op te stellen, dat in elke rij en in elke kolom iedere rang en ieder regiment eenmaal voorkwam. Dat betekende niets anders dan het construeren van een 6 × 6 grieks-latijns vierkant. Het lukte niet en ook EULER, aan wie het probleem werd opgegeven kwam er niet uit. Door proberen toonde TARRY in 1901 aan dat er geen oplossing is. Men heeft zich veel met grieks-latijnse vierkanten beziggehouden en vooral methoden om deze vierkanten te construeren hebben veel aandacht gehad. Daar het construeren van een n × n grieks-latijns vierkant voor getallen n die precies één factor 2 bevatten zoals 6, 10 enz. steeds mislukte, werd het vermoeden uitgesproken dat ze niet bestaan. Ongeveer een half jaar geleden construeerden PARKER, BOSE en SHRIKHANDE een 10 × 10 grieks-latijns vierkant waardoor dit vermoeden weer uit de wereld geholpen was.

Als ik U nu laat zien dat ook deze theorie in de praktijk toegepast kan worden, is dat weer een voorbeeld van toepassing van wiskunde die is ontwikkeld, zonder dat men het idee had er ooit iets praktisch mee te kunnen doen.

In 1935 maakte R. A. FISHER in zijn boek "The design of experiments" voor het eerst reclame voor het systematisch ontwerpen van experimenteer-methoden in verband met de toepassing van de statistiek op de waarnemingen. Vooral na de oorlog heeft de theorie van experimental designs zich sterk ontwikkeld. Merkwaardig genoeg heeft ze veel veld gewonnen in de landbouw, maar naar mijn weten nog niet in de techniek. Het volgende voorbeeld geeft een idee van het ontwerpen van experimenten. Dat men op de resultaten statistiek kan toepassen is niet verbazingwekkend, want de statistiek is daarvoor gemaakt. Het voorbeeld, gegeven door H. M. DAVIES, beoogde een vergelijking voor zeven soorten benzine van het aantal kilometers dat men in een bepaalde auto kan rijden per liter benzine. Bij iedere test werd een traject van 30 km gereden waarin hellingen voorkwamen van verschillende steilheid, voldoende bochten en verdere normale vertragende factoren. Om te voorkomen dat bepaalde rijgewoonten van een chauffeur de vergelijking beinvloedden, werden zeven verschillende chauffeurs gebruikt, en om de invloed van de intensiteit van het andere verkeer zo veel mogelijk uit te schakelen, werd het traject op zeven verschillende tijden van de dag gereden en werd dit gedurende een week elke dag herhaald. De test moest men zo opzetten, dat iedere soort benzine één keer door iedere chauffeur werd gebruikt, elke dag één keer en één keer op alle zeven verschillende tijdstippen. In een schema ziet het er als volgt uit. Neem een vierkant verdeeld in 7×7 kleinere vierkantjes. Horizontaal worden de dagen geteld, verticaal de verschillende tijdstippen op een dag. Als we nu de chauffeurs C_1 tot en met C_7 noemen en de verschillende soorten benzine B_1 tot en met B_7, dan moeten deze symbolen zo in het vierkant geplaatst worden dat in iedere rij en kolom elke B_i en C_j één keer voorkomt en dat in het vierkant elk van de 49 mogelijke combinaties B_i C_j één keer voorkomt. Met andere woorden: het schema moet een 7×7 grieks-latijns vierkant zijn. Zo worden op het ogenblik grieks-latijnse vierkanten, en andere onderwerpen van de combinatorische wiskunde voor het samenstellen van experimenten gebruikt.

Reeds vele malen is mij gevraagd wat getaltheorie eigenlijk is en wat er voor genoegen aan te beleven is. Ik hoop dat ik er in geslaagd ben U daarvan een indruk te geven en dat het mij tevens gelukt is U te laten zien waarom ik mij aan de zijde van PEREMANS schaar bij de verdediging van de stelling, dat alle wiskunde eenmaal toegepaste wiskunde zal zijn. U zult mij dan niet nutteloos noemen als ik verder ga met dat zo fascinerende spel.

Aan Hare Majesteit de Koningin,

Wie het behaagd heeft mij te benoemen tot gewoon hoogleraar aan deze Technische Hogeschool, betuig ik mijn eerbiedige dank.

Mijne heren Curatoren,

Vele van mijn collega's hadden bij hun benoeming een lange en succesvolle wetenschappelijke loopbaan achter de rug. Hoewel dit bij mij niet het geval is hebt U mij toch willen voordragen voor deze benoeming. Ik dank U voor het vertrouwen dat U in mij hebt gesteld. Het is vanzelfsprekend dat ik mij tot het uiterste zal inspannen om dit vertrouwen niet te beschamen.

Mijne heren leden van de Senaat en Adviseurs,

Zoals ik reeds zei heb ik vele inaugurele redes van collegae bestudeerd. Het heeft mij daarom niet verbaasd dat ook ik mij al spoedig in Uw midden thuis voelde. Wel was ik verwonderd en vol bewondering toen ik zag welk een hoeveelheid werk U verzet om deze Technische Hogeschool op te bouwen. Gaarne zal ik met U dit werk voortzetten.

Dames en heren leden van de wetenschappelijke en administratieve staf van de groep wiskunde,

De aangename sfeer die U hebt weten te scheppen maakte het voor mij bijzonder prettig tot Uw groep toe te treden. Hopelijk zullen wij vele jaren kunnen samenwerken op het gebied van onderwijs en wetenschappelijk onderzoek. Het heeft mij verheugd bij velen van U belangstelling te hebben ontdekt voor het getaltheoretisch zo interessante priemgetal 41.

Dames en heren leden van de wetenschappelijke en administratieve staf van het Mathematisch Instituut in Utrecht,

De jaren die ik in Utrecht doorbracht, waarvan 6 jaar als medewerker van het Mathematisch Instituut, zijn de mooiste en wellicht belangrijkste jaren in mijn leven geweest. Hoewel ik mij Uw vrees voor Eindhovense collegae kan voorstellen hoop ik toch regelmatig in de oude vertrouwde omgeving te mogen terugkeren. Voor de gelegenheid die U mij gaf om aan Uw instituut te werken ben ik U, *Hooggeleerde Freudenthal,* bijzonder dankbaar.

Gaarne wil ik allen die hebben bijgedragen tot mijn wiskundige ontwikkeling daarvoor dankzeggen. Staat U mij toe slechts diegene te noemen die de grootste invloed heeft gehad. Zeer veel heb ik aan U, *Hooggeleerde Van der Blij,* te danken en zeer veel heb ik van U geleerd. U hebt mij het voorbeeld gegeven hoe een hoogleraar voor zijn studenten leermeester, raadgever en vriend kan zijn.

Aan de *Nederlandse Organisatie voor Zuiver Wetenschappelijk Onderzoek* ben ik dank verschuldigd voor de gelegenheid die zij mij heeft geboden in Nederland en ook een jaar in het buitenland wetenschappelijk werk te verrichten.

Dames en heren studenten,

Het is al weer enige tijd geleden dat wij kennis maakten. Eerst vandaag heeft U kunnen zien wat voor soort wiskundige thans Uw docent is. Sommigen hebben wellicht met verbazing, anderen met schrik gehoord dat ik plezier heb in de beoefening van de wiskunde. Tijdens mijn eigen studie heb ik echter ook vakken moeten bestuderen die mij weinig of niets interesseerden. Ik herinner mij dat de bestudering van zo'n vak desondanks aangenaam kon zijn, namelijk in die gevallen dat de problemen en hun behandeling op heldere wijze waren uiteengezet. Daardoor besef ik dat het uiterst belangrijk is de wiskunde die U bij de beoefening van Uw vak nodig hebt, zo duidelijk mogelijk voor te dragen. Uw hulp is daarbij onmisbaar, want alleen van U kan ik vernemen of ik duidelijk ben. Omgekeerd kunt U rekenen op mijn hulp en belangstelling bij Uw studie. De wetenschap dat het mijn overtuiging is dat ik niet ben aangesteld om te voorkomen dat U ingenieur wordt, maar om er voor te zorgen dat dit wel geschiedt moge U daarbij een steun zijn.

Dames en heren,

Ik dank U voor Uw aandacht.