

## Inleiding tot de theorie van modellen en modelwetten

**Citation for published version (APA):**

Vossers, G. (1966). Inleiding tot de theorie van modellen en modelwetten. In *Leergang: Modellen en schaalregels*, 18 en 19 januari 1966 KIVI.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1966

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

LEERGANG "MODELLEN EN SCHAALREGELS"

18 EN 19 JANUARI 1966

---

"INLEIDING TOT DE THEORIE VAN MODELLEN"  
EN MODELWETTEN

DOOR

PROF. DR. IR. G. VOSSERS

Koninklijk Instituut van Ingenieurs  
afdeling voor Werktuig- en Scheepsbouw  
Technische Hogeschool Eindhoven  
Afdeling der Werktuigbouwkunde

## Inleiding tot de theorie van modellen en modelwetten

G.Vossers.

### 1. Algemene inleiding.

Het onderwerp dat op deze leergang aan de orde gesteld wordt en waarvoor deze voordracht een inleiding tot de theorie dient te geven, is dermate gevariëerd, dat het nuttig is een ogenblik stil te staan bij het begrip model en modelwet.

Het nazoeken van de betekenis van het woord model in een woordenboek geeft wel interessante, maar niet voldoende informatie. We lezen daar

- voorbeeld dat een kunstenaar maakt uit leem of was en waarnaar een werk wordt uitgevoerd.
- voorbeeld waarnaar een kunstenaar werkt, i.h.b. iemand die voor een kunstenaar poseert als zodanig of die zijn of haar beroep daarvan maakt.
- voorbeeld, type van voorwerpen : de modellen van 1966 zijn uit.
- vaststaande, voorgeschreven vorm : een jas volgens model; buitenmodel.
- type, voorbeeld van iets : het model van een huisvader.
- nabootsing op kleine schaal.

Alleen de laatste betekenis heeft iets te maken met het onderwerp van deze leergang, maar we moeten ons realiseren dat het onderwerp uitgebreider is dan deze nabootsing op kleine schaal. Het begrip "model" vindt de laatste tijd ook ingang in de zin van

- afbeelding van een gebied van verschijnselen op een ander gebied van verschijnselen.

Zoals iedere afbeelding gebrekkig is, zo zullen ook deze modellen gebrekkig zijn en slechts een bepaald aspect afbeelden.

Laten we dit illustreren aan enkele modellen, die we van de Nederlandse Spoorwegen kunnen maken (Freudenthal (1961)):

- de ligging van de stations wordt afgebeeld op een kaart; de rails stellen we voor door een lijn; de kaart is een model van de geometrische relaties die er bestaan door de onderlinge ligging van de stations.
- het modeltreintje, waar het volwassen kind in ons mee speelt, beeldt meer af; het toont iets van de functie van het spoorwegsysteem.
- tenslotte is het spoorboekje een derde model van de Nederlandse Spoorwegen; het stelt het rijbedrijf voor en is een model van de weg - tijd relatie.

In de fysica wordt veel gebruik gemaakt van modellen om de werkelijkheid te beschrijven, c.q. te verklaren. Ik roep U in herinnering de verschillende atoommodellen, waar we de electronen ons voorstellen als ballen, die rond een kern cirkelen; de moderne kernfysica maakt gebruik van een model ontleend aan de hydrodynamica om de krachten in de kern te beschrijven (het zg. druppelmodel).

Het maken van afbeeldingen en modellen is een algemeen menselijke bezigheid en er kleven dan ook de bezwaren en gevaren aan die aan ons mensenwerk eigen zijn:

- er wordt een eenzijdig beeld van de werkelijkheid gegeven; de werkelijkheid wordt vervormd.
- de menselijke natuur is geneigd in eerste instantie de nadruk te leggen op lineaire verbanden, waardoor we moeite hebben de niet-lineaire verschijnselen adequaat af te beelden.
- wanneer een model succesvol blijkt te zijn, zijn we geneigd de vergelijking te ver door te voeren, ja zelfs zijn we in staat het model voor de werkelijkheid te substitueren. Faraday sprak zelfs over de tyrannie en verleiding van analogiën.

In de loop der jaren heeft men op verschillende manieren gepoogd enige methodiek in deze modelvorming te brengen.

Eén van de methoden is die van de dimensie-analyse, die door Bridgman en vele andere, voornamelijk Engelse en Amerikaanse onderzoekers, is ontwikkeld. Deze methode is gebaseerd op de hypothese dat de oplossing van een probleem uitgedrukt kan worden door een aantal dimensieloze uitdrukkingen, die ieder opgebouwd zijn uit de dimensievolle grootheden, die het verschijnsel karakteriseren. Nauwe relatie bestaat er tussen deze methode en de overwegingen, die leiden tot het invoeren van een eenhedenstelsel, dat gebruikt wordt om de fysische grootheden vast te leggen. Van de methode van de dimensie-analyse zullen we slechts enkele voorbeelden geven; over de eenhedenstelsels wilde ik in het geheel niet spreken in deze voordracht.

Een tweede methode, die gevolgd wordt bij de bestudering van de theorie van de modellen, is een analyse van de gelijkvormigheids-wetten, waaraan voldaan moet worden bij experimenten op verkleinde schaal - de echte schaalmodellen. Naast de evidente geometrische gelijkvormigheid, dient er ook een kinematische gelijkvormigheid en een dynamische gelijkvormigheid tussen het model en het prototype (de constructie op ware grootte) te zijn; indien er ook energietransport plaats vindt, kan men bovendien nog spreken van een energetische gelijkvormigheid. Bij het opstellen van de wetten van de dynamische gelijkvormigheid gaat men de krachten opzoeken, die een rol spelen in het probleem. Ieder van die krachten wordt uitgedrukt in de fysische grootheden die het probleem karakteriseren. Dynamische gelijkvormigheid treedt dan op indien de verhouding van telkens twee van deze krachten in het model gelijk is aan die bij het prototype. Van deze methode van de gelijkvormigheidsanalyse zullen we een aantal voorbeelden geven, zowel in de elasticiteitsleer als in de stromingsleer.

Een derde methode, die gebruikt wordt in de modelvorming, biedt het meeste perspectief. Hierbij wordt uitgegaan van de fundamentele vergelijkingen, meestal differentiaalvergelijkingen, die het probleem beschrijven.

Door deze vergelijkingen dimensieloos te maken door het invoeren van karakteristieke grootheden, zoals bijv. de lengte van het object, de aanstroomsnelheid, etc., krijgt men als het ware automatisch de dimensieloze uitdrukkingen, die in model en prototype gelijk genomen moeten worden, opdat de verschijnselen gelijkvormig zullen verlopen. Bovendien geeft het aldus ingevoerde mathematisch model de mogelijkheid om een analogie tussen twee verschillende gebieden te leggen: worden de verschijnselen in beide gebieden door hetzelfde mathematische model beschreven, dan kunnen het mathematisch model en de beide gebieden onderling als model van

elkaars gebied dienst doen. In de leer der analogiën heeft deze laatste genoemde ontwikkeling zeer ruime toepassing gevonden. Het hangt van de verschijnselen af, die men bestudeert, welke fundamentele vergelijkingen men aan deze beschouwing ten grondslag legt. Bij de continuum mechanica, die wij in elasticiteitsleer en stromingsleer toepassen, zal het in de regel voldoende zijn uit te gaan van de wetten van behoud van massa en van impuls.

Wanneer warmte-overdracht een rol speelt zal ook de wet van behoud van energie een aantal dimensieloze kengetallen opleveren. Beperken we ons tot de mechanica van een star lichaam, dan zijn de wetten van behoud van impuls en impulsmoment reeds voldoende.

Bovengenoemde drie methoden wil ik gaarne toelichten met behulp van een, voor velen Uwer wellicht triviaal voorbeeld: de beweging van een slinger onder invloed van de zwaartekracht (fig.1).

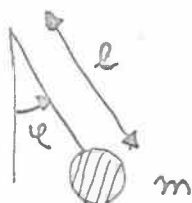


Fig.1

Volgens de methode van de dimensie-analyse sommen we de volgende grootheden op, die een rol spelen in dit probleem:

|                 |                            |
|-----------------|----------------------------|
| tijd            | : $t_1$ (sec)              |
| lengte          | : $l$ (m)                  |
| massa           | : $m$ (kg)                 |
| versnelling     |                            |
| zwaartekracht   | : $g$ ( $\text{ms}^{-2}$ ) |
| beginuitwijking | : $\varphi_0$              |

De uitwijking van de slinger  $\varphi$  zal een functie zijn van deze 5 grootheden

$$\varphi = \varphi(t_1, l, g, m, \varphi_0)$$

Dit verband kan geschreven worden als een qua dimensies homogene uitdrukking, waarin alle termen dezelfde dimensie bezetten. Er zijn 5 grootheden en 3 eenheden, waarin deze uitgedrukt worden ( $m$ ,  $kg$ ,  $s$ ), dus zijn er 2 onafhankelijk dimensieloze combinaties te vormen, nl:

$$\varphi_0, \frac{l}{gt_1^2}$$

, zodat

$$\varphi = \varphi\left(\varphi_0, \frac{l}{gt_1^2}\right)$$

De dimensie-analyse leert niets over een periodiek gedrag van deze slinger. Uit andere hoofde weten we dat en dan vinden we voor de periode van beweging  $T$

$$T = f\left(\sqrt{\frac{l}{g}}, \varphi_0\right)$$

Verdere informatie levert deze dimensie-analyse niet.

Gaan we volgens de tweede methode te werk, die van de gelijkvormigheidsanalyse, dan zoeken we voor dynamische gelijkvormigheid naar de krachten die op de massa werken. Dat zijn de traagheidskracht, evenredig met  $m l t_1^{-2}$ , en de zwaartekracht, evenredig met  $mg$ . Wil een kleine en een grote slinger zich gelijkvormig gedragen, dan zullen voor dynamische gelijkvormigheid de verhouding van deze

beide krachten voor model en prototype dezelfde moeten zijn, dus de parameter

$$\frac{m \ell t_1^{-2}}{mg} = \frac{\ell}{gt_1^2}$$

zal gelijk dienen te zijn. Voor geometrische gelijkvormigheid dienen ook de beginuitwijkingen gelijkvormig te zijn, d.w.z.  $\varphi_0$ , zodat de uitwijking van de slinger voorgesteld kan worden door

$$\varphi = \varphi(\varphi_0, \frac{\ell}{gt_1^2})$$

De gelijkvormigheidsanalyse komt dus tot hetzelfde resultaat als de dimensie-analyse.

Indien we tenslotte de derde methode gebruiken, dan schrijven we de differentiaalvergelijking voor de beweging van de slinger op

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin\varphi = 0 \quad \text{met beginvoorwaarden} \quad \left. \begin{array}{l} \varphi = \varphi_0 \\ \frac{d\varphi}{dt} = 0 \end{array} \right\} \text{ voor } t=0$$

Door het invoeren van een karakteristieke tijd  $t_1$ , maken we de tijd dimensieloos

$$\bar{t} = \frac{t}{t_1}, \quad \text{waarin } \bar{t} \text{ de dimensieloze tijd.}$$

Hiermede wordt de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2\varphi}{d\bar{t}^2} + \frac{gt_1^2}{\ell} \sin\varphi = 0$$

Deze differentiaalvergelijking kan men oplossen als functie van de dimensieloze grootheid  $\frac{gt_1^2}{\ell}$ ; de oplossing kan dienst doen voor alle slingers met gegeven waarde van deze grootheid.

Voor kleine uitwijking kunnen we lineariseren

$$\frac{d^2\varphi}{d\bar{t}^2} + \frac{gt_1^2}{\ell} \varphi = 0 \quad (1)$$

en kiezen we voor de karakteristieke tijd  $t_1$  de periode  $T$ , dan weten we dat een oplossing gevonden wordt voor (de eigenwaarde)

$$\frac{gT^2}{\ell} = 4\pi^2, \quad \text{d.w.z.} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

We kunnen aan de differentiaalvergelijking (1) direct de analogie demonstreren tussen de beweging van deze slinger en bijvoorbeeld de knik van een aan twee zijden opgelegde dunne balk onder axiale belasting (fig.2)



Voor de uitwijking y van deze balk geldt immers de volgende differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{F}{EI} y = 0 \quad , \text{waarin}$$

- F: axiale kracht (N)
- E: elasticiteitsmodulus (Nm<sup>-2</sup>)
- I: lineair traagheidsmoment (m<sup>4</sup>)

Deze vergelijking kan dimensieloos gemaakt worden met  $\bar{y} = \frac{y}{\delta}$ ,  $\bar{x} = \frac{x}{L}$  waarin delta de maximale uitwijking en L de lengte van de balk, zodat

$$\frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{x}^2} + \frac{FL^2}{EI} \bar{y} = 0 \quad (2)$$

De vergelijkingen (1) en (2) hebben dezelfde gedaante, indien de beide dimensieloze parameters  $\frac{gt_1^2}{l}$  en  $\frac{FL^2}{EI}$  aan elkaar gelijk zijn.

De uitwijking van de balk  $\bar{y}$  als functie van  $\bar{x}$ , kan dan gevonden worden uit de hoekverdraaiing  $\varphi$  van de slinger als functie van de tijd  $t$  en omgekeerd. In het bijzonder dient men voor volledige gelijkvormigheid te letten op gelijkvormige randvoorwaarden. Voor de balk geldt  $\bar{y}=0$  voor  $\bar{x}=0$  en  $\bar{x}=1$ . Kiezen we ook voor de slinger  $\varphi=0$  voor  $\bar{t}=0$  en  $\bar{t}=1$  en nemen we voor de karakteristieke tijd  $t_1$

de halve periode  $T/2$ , dan vinden we met  $\frac{gt_1^2}{l} = \pi^2$  nu voor de parameter  $\frac{FL^2}{EI} = \pi^2$ , hetgeen de Eulerse knikkraft voorstelt.

Voor deze waarde van de parameter zijn alle waarden van  $\bar{y}$  mogelijk, evenzo geldt ook voor de slinger dat bij beweging met de eigen periode alle waarden van de hoek  $\varphi$  mogelijk zijn (let op: vergelijkingen zijn gelineariseerd). De beweging van een slinger kan dus als model dienen voor de knik van een balk.

Wellicht heb ik reeds te lang bij dit eenvoudige voorbeeld stilgestaan; ik heb het echter bewust gedaan om te kunnen demonstreren hoe in dit geval, dat U allen bekend is, de genoemde methoden werken. Gezien de onderwerpen, die op deze leergang behandeld worden zal ik in het volgende een en ander toelichten aan twee gebieden van onderzoek - de elasticiteitsleer en de stromingsleer. Verschijnselen, waarbij warmte-overdracht en andere vormen van energie-uitwisseling optreden, blijven buiten beschouwing.

2. Toepassing in het gebied van de elasticiteitsleer.

In het gebied van de elasticiteitsleer zal ik slechts enkele voorbeelden behandelen met behulp van de methode van de gelijkvormigheidsanalyse.

We gaan daarbij uit van geometrisch gelijkvormige constructies, zodat slechts één lengte parameter een rol speelt. We schrijven op welke krachten bij een elastisch vervormde constructie een rol spelen. Dat zijn:

- inwendige elastische kracht, evenredig met:  $EL^2$
- zwaartekracht, evenredig met:  $\rho_0 g L^3$
- uitwendige belasting, voorgesteld door:  $F$
- traagheidskracht, voor harmonische beweging van de constructie met frequentie  $\omega$  evenredig met:  $\rho \omega^2 L^4$

- Hierin:
- $L$  : lengte (m)
  - $\rho_0$  : dichtheid materiaal ( $\text{kg m}^{-3}$ )
  - $\omega$  : frequentie ( $\text{s}^{-1}$ )

Met deze 4 krachten kunnen drie dimensieloze verhoudingen gevormd worden; betrekken we alle krachten op de inwendige elastische kracht, dan vinden we de volgende drie dimensieloze grootheden, die bij een elastisch vervormde constructie optreden:

$$\frac{F}{EL^2}, \quad \frac{\rho \omega^2 L^2}{E}, \quad \frac{\rho_0 g L}{E}$$

Bij de formulering van de elastische kracht hebben wij in het bovenstaande ons beperkt tot buiging en trek. Treedt ook afschuiving op, dan kunnen we de inwendige elastische schuifkracht evenredig stellen met  $GL^2$ , waarin  $G$  : glijdingsmodulus ( $\text{Nm}^{-2}$ ). Dan volgt nog een vierde dimensieloze grootheid, de verhouding  $G/E$ ; equivalent daarmee is het invoeren van de dwarscontractieverhouding  $\mu$ . Bij belasting van de constructie door momenten, is het noodzakelijk nog een vijfde dimensieloze grootheid in te voeren:  $M/EL^3$ , waarin  $M$  : uitwendig moment; dit levert in dit stadium geen nieuwe gezichtspunten op, zodat wij deze grootheid in het vervolg zullen weglaten.

Voor dynamische gelijkvormigheid van model en prototype van een elastische constructie moeten dus de 4 genoemde grootheden gelijk gekozen worden. In het algemeen kan men nu stellen dat de vervormingen, en daarmee de spanningen, een functie zullen zijn van deze grootheden:

$$\frac{\Delta L}{L} = f \left( \frac{F}{EL^2}, \quad \frac{\rho \omega^2 L^2}{E}, \quad \frac{\rho_0 g L}{E}, \quad \mu \right)$$

Het gelijktijdig voldoen aan deze vier grootheden zal in de meeste gevallen tot de conclusie leiden, dat we geen model kunnen vervaardigen. Over de afzonderlijke grootheden kunnen we de volgende gevolgtrekkingen maken:

- 1) Indien voor model en prototype hetzelfde materiaal gekozen wordt ( $E, \rho_0, \mu$  constant), dan moet de uitwendige belasting voor het verkrijgen van gelijke vervorming evenredig met  $L^2$  gekozen worden.



- 2) Indien voor model en prototype hetzelfde materiaal gekozen wordt en wij blijven op de aarde ( $g = \text{constant}$ ), is aan de eis

$$\frac{\rho_0 g L}{E} = \text{constant}$$

niet te voldoen. Voor constructies waar het eigen gewicht geen rol speelt, is dat geen bezwaar, want dan is de invloed van deze parameter te verwaarlozen. Indien het eigen gewicht wel van belang is, zal men proeven moeten doen bij een andere  $g$  of een ander materiaal moeten kiezen.

Indien men hetzelfde materiaal gebruikt, zal  $\frac{\rho_0 g L}{E}$  afnemen naarmate  $L$  afneemt, en zal ook de vervorming afnemen, naarmate de  $L$  afneemt. De constructie wordt dus sterker naarmate de afmetingen worden verkleind, hetgeen verder nader wordt besproken in de voordracht van Horowitz in deze leer-gang. Deze observatie was reeds bekend aan Galilei die in zijn "Dialogo betreffende twee nieuwe wetenschappen" opmerkt:

"Indien de afmeting van een lichaam wordt vermindert, zal de sterkte van dat lichaam niet afnemen in dezelfde verhouding; naarmate het lichaam kleiner is, zal zijn relatieve sterkte groter zijn. Daarom zal waarschijnlijk een kleine hond op zijn rug twee of drie honden van zijn eigen afmetingen kunnen dragen, maar ik geloof dat een paard zelfs niet één paard van zijn eigen afmetingen zou kunnen torsen".

- 3) Bij een periodieke belasting met frequentie  $\omega$ , zal voor model en prototype de grootheid

$$\frac{\rho_0 \omega^2 L^2}{E}$$

gelijk moeten zijn. De eigen frequentie van een constructie zal dus evenredig zijn met

$$\omega \approx \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

Indien weer hetzelfde materiaal voor model en prototype wordt gekozen, geldt

$$\omega \approx 1/L$$

hetgeen een algemene ervaring is, die we terugvinden bij de constructie van stemvorken, klokken van carillon, etc.

- 4) Indien de uitwendige belasting wordt veroorzaakt door stromingskrachten, kan deze kracht evenredig gesteld worden met

$$\rho L^2 V^2 \quad (\text{zie volgende paragraaf})$$

waarin  $\rho$  : dichtheid stromend medium ( $\text{kgm}^{-3}$ )  
 $V$  : snelheid van het stromend medium ( $\text{ms}^{-1}$ )

Daarmede wordt de parameter  $\frac{F}{EL^2}$  geschreven als:

$$\frac{\rho L^2 V^2}{EL^2} = \frac{\rho V^2}{E} = Ca$$

waarvoor men wel de naam van Cauchy gebruikt. Deze parameter stelt dus voor de verhouding van de uitwendige aero- (c.q. hydro-) dynamische belasting tot de inwendige elastische kracht. In de voordracht van Kolkman vindt men het getal van Cauchy in een iets andere gedaante, omdat daarin de veerconstante C is ingevoerd. Met  $C = EL$  wordt dan het getal van Cauchy

$$\frac{\rho V^2 L}{C}$$

Men definieert ook wel de reciproke waarde hiervan als getal van Cauchy, zoals door Kolkman is gedaan. We zullen straks het getal van Cauchy in een iets andere gedaante tegen komen, wanneer we het getal van Cauchy definieren voor de stromingsverschijnselen als de verhouding van de traagheidskrachten tot de elastische krachten in het stromende medium zelf.

Bij deze eenvoudige voorbeelden uit de elasticiteitsleer wil ik het hier laten. Het is duidelijk, dat over de nabootsing op modelschaal, vooral indien niet-lineair gedrag van materialen ter sprake komt, nog veel te zeggen zou zijn. Dit overschrijdt echter het karakter van deze inleiding.

### 3. Toepassing in het gebied van de stromingsleer.

We beginnen ook voor het formuleren van dimensieloze parameters in het gebied van de stromingsleer met een gelijkvormigheidsanalyse, waarbij de krachten worden nagegaan, die van belang zijn. We beschouwen daartoe de krachten, die op een vloeistofelementje werken:

- traagheidskrachten, die onderverdeeld worden in die voor instationaire en stationaire beweging. Voor instationaire beweging stellen wij deze evenredig met de massa van een vloeistofelementje ( $\rho L^3$ ) en met de versnelling. Door het invoeren van een snelheid ( $V$ ) en een tijd ( $T$ ), kan de versnelling geschreven worden als  $V T^{-1}$  en de instationaire traagheidskracht als

$$\frac{V}{T} \rho L^3$$

Bij stationaire beweging schrijven we de versnelling liever als een snelheidsverandering over een lengte afstand, dus  $V^2 L^{-1}$ , zodat de stationaire traagheidskracht geschreven wordt als

$$\rho V^2 L^2$$

- Viskeuze kracht, onder invloed van een dynamische viscositeit ( $\eta$ ) en snelheidsgradient ( $\frac{V}{L}$ ) werkt op een oppervlak een schuifkracht  $\eta V L$

- drukkracht - met een druk ( $p$ ) kan men de drukkracht evenredig stellen met  $pL^2$ .
- zwaartekracht - op een massa eenheid werkt de versnelling van de zwaartekracht, zodat de zwaartekracht evenredig is met  $\rho g L^3$ .
- capillaire kracht - met de coefficient voor de dynamische capillariteit ( $\gamma$ ), kan de oppervlaktetension voorgesteld worden door  $\gamma/L$  en de capillaire kracht is dus evenredig met  $\gamma L$ .

Beperken we ons tot deze 6 krachten, dan zijn 5 onderling onafhankelijke verhoudingen te schrijven, die als dimensieloze parameters het probleem karakteriseren. In totaal zijn 15 verschillende combinaties mogelijk, die in fig. 3 zijn weergegeven.

Dimensieloze parameters in de stromingsleer.

|                                                           | Stationaire traagheidskracht<br>( $\rho V^2 L^2$ ) | Instationaire traagheidskracht<br>( $\frac{V}{T} \rho L^3$ ) | Viskeuze kracht<br>$\eta V L$            | Drukkracht<br>$p L^2$                 | Zwaartekracht<br>$\rho g L^3$     | Cap. kracht<br>$\gamma L$                    |
|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|------------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------------------|
| Stationaire traagheidskracht<br>( $\rho V^2 L^2$ )        | -                                                  | $\frac{L}{VT}$<br>(Str)                                      | $\frac{\eta}{\rho V L}$<br>( $Re^{-1}$ ) | $\frac{p}{\rho V^2}$<br>( $Eu^{-1}$ ) | $\frac{gL}{V^2}$<br>( $Fr^{-1}$ ) | $\frac{\gamma}{\rho V^2 L}$<br>( $We^{-1}$ ) |
| Instation. traagheidskracht<br>( $\frac{V}{T} \rho L^3$ ) | -                                                  | -                                                            | $\frac{\eta T}{p L^2}$                   | $\frac{p T}{V L}$                     | $\frac{g T}{V}$                   | $\frac{\gamma T}{\rho V L^2}$                |
| Viskeuze kracht<br>( $\eta V L$ )                         | -                                                  | -                                                            | -                                        | $\frac{p L}{\eta V}$<br>( $Ca$ )      | $\frac{\rho g L^2}{\eta V}$       | $\frac{\gamma}{\eta V}$                      |
| Drukkracht<br>( $p L^2$ )                                 | -                                                  | -                                                            | -                                        | -                                     | $\frac{\rho g L}{p}$              | $\frac{\gamma}{p L}$                         |
| Zwaartekracht<br>( $\rho g L^3$ )                         | -                                                  | -                                                            | -                                        | -                                     | -                                 | $\frac{\gamma}{\rho g L^2}$<br>( $Bo^{-1}$ ) |
| Capillaire kracht<br>( $\gamma L$ )                       | -                                                  | -                                                            | -                                        | -                                     | -                                 | -                                            |

Fig.3.

De dimensieloze grootheden in de eerste rij van deze figuur (de getallen betrokken op de stationaire traagheidskrachten) hebben de meeste betekenis gekregen in de stromingsleer en zijn daarom met een naam verbonden:

Str =  $\frac{L}{VT}$  : getal van Strouhal. (De reciproke definitie van het getal van Strouhal wordt ook gebruikt)

Het getal van Strouhal is bij bovengenoemde afleiding te voorschijn gekomen als de verhouding van de twee soorten traagheidskrachten. Het is duidelijk dat men ook van de eis van kinematische gelijkvormigheid kan uitgaan, die tot hetzelfde resultaat leidt.

$$Re = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{V L}{\nu}$$

: getal van Reynolds, waarin  $\nu$  : de kinematische viscositeit.

$$Eu = \frac{\rho V^2}{p}$$

: getal van Euler. (soms wordt ook de reciproke definitie gebruikt).

$$Fr = \frac{V^2}{g L}$$

: getal van Froude (soms wordt ook deze uitdrukking met  $Fr^2$  aangeduid).

$$We = \frac{\rho V^2 L}{\gamma}$$

: getal van Weber (de reciproke uitdrukking is ook in gebruik; soms wordt deze uitdrukking met  $We^2$  aangeduid).

Van de overige combinaties hebben, voor zover bekend, alleen een naam gekregen de verhouding van de drukkracht tot de viskeuze kracht:

$$La = \frac{p L}{\eta V}$$

: getal van Lagrange, ook wel genoemd getal van Stokes

en de verhouding van de capillaire kracht tot de zwaartekracht:

$$Bo = \frac{\rho g L^2}{\gamma}$$

: getal van Bond

Het getal van Bond speelt bijvoorbeeld een rol bij de bestudering van de vorm van druppeltjes.

De behoefte aan dimensieloze getallen in de deelgebieden van de stromingsleer is in de loop der jaren zo groot gebleken, dat velerlei varianten op de in de tabel genoemde getallen zijn ingevoerd. Ik noem slechts enkele varianten:

- Strouhal: Indien de verschijnselen verlopen volgens een harmonische oscillatie met frequentie  $\omega$ , schrijft men wel  $\frac{\omega L}{V}$  -gereduceerde frequentie.

Bij roterende beweging met toerental  $n$  wordt veelal geschreven:

$\frac{V}{n L}$  - de snelheidsgraad bij de berekening van propellers.

In een roterend assenstelsel (hoeksnelheid  $\Omega$ ), wordt geschreven

$R = \frac{V}{L \Omega}$  : getal van Rossby.

- Reynolds: Bij stroming tussen twee concentrische cilindrs, waarbij één van de cilindrs draait met een toerental  $n$ , schrijft men voor de snelheid  $V = nL$ , waarmee men vindt

$$\frac{nL^2}{\nu} = Ta^{1/2} \quad ; Ta : \text{getal van Taylor.}$$

- Froude: Bij problemen met roeders, etc., voert men ook hier meestal het toerental in:

$$\frac{n^2 L}{g} \quad (\text{zie de voordracht in deze leergang van Reitsma}).$$

- Euler: In samendrukbare media vindt men voor de geluidssnelheid

$$c = \left( \gamma \frac{p}{\rho} \right)^{1/2}$$

waarin  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  (de verhouding van de soortelijke warmten van het medium).

Daarmede kan men voor het getal van Euler schrijven

$$Eu = \frac{\rho V^2}{p} = \frac{\gamma V^2}{c^2} = \gamma M^2 \quad , \text{ waarin}$$

$$M = \frac{V}{c} \quad : \text{getal van Mach.}$$

We kunnen ook aansluiting aan het reeds ingevoerde getal van Cauchy vinden, door de isentropische compressie modulus in te voeren

$$\bar{\epsilon}_s = \rho \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \rho c^2$$

waarmede men vindt:

$$M^2 = \frac{Eu}{\gamma} = \frac{\rho V^2}{\bar{\epsilon}_s} = Ca$$

In onsamendrukbare media heeft de absolute druk geen betekenis, zodat men meestal een drukverschil ten opzichte van een referentiedruk invoert. Daarmede wordt dit getal geschreven als

$$\frac{\rho V^2}{\Delta p} \quad \text{of} \quad \frac{\rho V^2}{p - p_0} \quad \text{In het bijzonder is}$$

deze vorm gebruikelijk bij verschijnselen van cavitatie in vloeistoffen. Weliswaar veronderstelt men de vloeistof onsamendrukbaar, maar indien de druk onder de dampspanning van het water komt, gaat de vloeistof tot belvorming over. Bij cavitatieverschijnselen gebruikt men dan

$$\frac{p - p_c}{\frac{1}{2} \rho V^2} = \sigma$$

waarin  $\sigma$  : cavitatiegetal; getal van Thoma (ook wel genoemd getal van Leroux).

Voor vloeistofpompen voert men in plaats van de snelheid, de opvoerhoogte (h) in, zodat daar het cavitatiegetal wordt

$$\frac{p - p_c}{\rho g h}$$

Het is illustratief om bij de afleiding van de dimensieloze grootheden in de stromingsleer niet alleen van de gelijkvormigheidsanalyse uit te gaan, maar ook de methode van het dimensieloos schrijven van de fundamentele vergelijkingen toe te passen. Indien we ons beperken tot de vergelijking van Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \text{grad } \underline{v} = - \text{grad } p + \rho \underline{g} + \eta \nabla^2 \underline{v} \quad \text{referentie grootheden}$$

vinden wij door invoering van dimensieloze grootheden

$$\bar{p} = \frac{p}{p_1} ; \quad \bar{v} = \frac{v}{V_1} ; \quad \bar{t} = \frac{t}{t_1} ; \quad \bar{p} = \frac{p}{p_1} ; \quad \bar{g} = \frac{g}{g_1} ; \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_1} ;$$

$$\overline{\text{grad}} = L_1 \text{grad} ; \quad \overline{\nabla^2} = L_1^2 \nabla^2$$

$$\underbrace{\frac{\rho_1 V_1}{t_1} \bar{p} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}}}_{\text{instat. traagh. krachten}} + \underbrace{\frac{\rho_1 V_1^2}{L_1} \bar{p} \bar{v} \cdot \overline{\text{grad}} \bar{v}}_{\text{stat. traagh. krachten}} = - \underbrace{\frac{p_1}{L_1} \overline{\text{grad}} \bar{p}}_{\text{drukkrachten}} + \underbrace{\rho_1 g_1 \bar{p} \bar{g}}_{\text{zwaartekracht}} + \underbrace{\frac{\eta_1 V_1}{L_1^2} \bar{\eta} \overline{\nabla^2} \bar{v}}_{\text{viskeuze krachten}}$$

Delen wij door de stationaire traagheidskrachten, dan wordt de vergelijking

$$\frac{L_1}{V_1 t_1} \bar{p} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{p} \bar{v} \cdot \overline{\text{grad}} \bar{v} = - \frac{p_1}{\rho_1 V_1^2} \overline{\text{grad}} \bar{p} + \frac{g_1 L_1}{V_1^2} \bar{p} \bar{g} + \frac{\eta_1}{\rho_1 V_1 L_1} \bar{\eta} \overline{\nabla^2} \bar{v}$$

of

$$\text{Str} \bar{p} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{p} \bar{v} \cdot \overline{\text{grad}} \bar{v} = - \frac{1}{Eu} \overline{\text{grad}} \bar{p} + \frac{1}{Fr} \bar{p} \bar{g} + \frac{1}{Re} \bar{\eta} \overline{\nabla^2} \bar{v}$$

, zodat wederom dezelfde dimensieloze grootheden verschijnen als in de eerste rij van fig. 3. (Het getal van Weber is hier uiteraard niet bij, omdat wij daarvoor de voorwaarden aan de rand van het gebied moeten formuleren).

Als eerste conclusie volgt hieruit, dat wanneer de verschijnselen in model en prototype dynamisch gelijkvormig moeten verlopen, de getallen van Strouhal, Euler, Froude en Reynolds voor model en prototype dezelfde waarde dienen te bezitten.

In de tweede plaats kunnen wij een aantal gevolgtrekkingen maken over de invloed van deze dimensieloze getallen op de stromingsverschijnselen. Indien bijvoorbeeld het getal van Strouhal een zeer kleine waarde heeft, kan de eerste term verwaarloosd worden ten opzichte van de andere termen en spelen de instationaire effecten een ondergeschikte rol. Evenzeer weten wij dat bij een grote waarde van het getal van Reynolds de viskeuze krachten te verwaarlozen zijn en ook deze term weggelaten kan worden. Toch moeten we daarmee oppassen, want vlak langs de wand zijn de snelheidsgradienten zeer groot, zodat de laatste term toch weer mee gaat doen (het grenslaag concept); bovendien moeten we altijd oppassen indien van een differentiaalvergelijking de hoogste orde term weggelaten wordt, omdat we dan essentiële verschijnselen over het hoofd kunnen zien.

Wanneer bij het maken van modellen altijd aan alle bovenge-

noemde getallen voldaan zou moeten worden, zou de conclusie luiden dat dit onmogelijk is en zou het onderwerp snel afgehandeld kunnen worden. We zullen dus steeds slechts gedeeltelijk gelijkvormigheid kunnen verkrijgen en daarom kan slechts met een goed fysisch inzicht in het relevante vakgebied bepaald worden welke getallen men kan verwaarlozen. De volgende lezingen zullen hiervan voorbeelden behandelen; in deze inleiding zal ik slechts enkele onderwerpen summier behandelen.

- Krachten en momenten op lichamen.

Indien in de stroming lichamen bewegen, die krachten c.q. momenten op de stroming uitoefenen, zal men ook deze fysische grootheden bij een gelijkvormigheidsbeschouwing dimensieloos dienen te schrijven. In de regel kiest men hiervoor de stationaire traagheidskracht, zodat de volgende dimensieloze grootheden verschijnen:

$$\frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 L^2} \quad \text{en} \quad \frac{M}{\frac{1}{2}\rho V^2 L^3}$$

waarin F : kracht en M : moment. Men noemt dit wel de vergelijkingswet van Newton. Men moet hier echter voorzichtig mee zijn, want deze dimensieloze grootheden zullen niet constant zijn, maar functies van de ingevoerde dimensieloze getallen. Bijvoorbeeld voor de kracht

$$\frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 L^2} = C_F (Re, Str, Fr, Eu, We)$$

Indien men weet, dat de getallen van Eu en We geen rol spelen, krijgt men bijvoorbeeld voor het gedrag van een propeller onder water, waarbij men voor de kinematische gelijkvormigheid in plaats van het getal van Str de snelheidsgraad  $\frac{V}{nL}$  schrijft, voor de stuwkracht

$$\frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 L^2} = C_F \left( \frac{VL}{\nu}, \frac{V}{nL}, \frac{V^2}{gL} \right) \quad \text{of ook wel:} \quad \frac{F}{\frac{1}{2}\rho n^2 L^4} = C_F \left( \frac{VL}{\nu}, \frac{V}{nL}, \frac{V^2}{gL} \right)$$

Ook dit is nog een te hoge eis, want men kan niet tegelijk aan de voorschriften  $VL = \text{constant}$  en  $\frac{V^2}{L} = \text{constant}$  (bij hetzelfde medium op deze aarde) voldoen. In de regel kiest men het getal van Re zo groot, dat de invloed daarvan te verwaarlozen is, zodat overblijft

$$\frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 L^2} = C_F \left( \frac{V^2}{gL}, \frac{V}{nL} \right)$$

Indien bij model en prototype de getallen  $\frac{V^2}{gL}$  en  $\frac{V}{nL}$  dezelfde waarde hebben, volgt uit deze formule dat de stuwkracht evenredig is met  $L^3$ .

Wanneer de invloed van het getal van Froude te verwaarlozen is (enige afstand onder het wateroppervlak of bij luchtschroef), dan alleen te voldoen aan

$$\frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 L^2} = C_F \left( \frac{V}{nL} \right)$$

en de stuwkracht is evenredig met  $V^2 L^2$

- Viskeuze stroming door een dunne spleet (smering).

Bij de stationaire stroming van een viskeus medium door een dunne spleet, spelen in eerste instantie alleen de drukkracht en de viskeuze kracht een rol. De totale kracht die daarvoor op de wanden van een wrijvingslager wordt uitgeoefend, maakt men dan ook niet dimensieloos met  $\frac{1}{2} \rho V^2 L^2$ , zoals in het vorige voorbeeld, maar met de viskeuze kracht  $\eta VL$ :

$$\frac{F}{\eta VL}$$

In de regel voert men de gemiddelde druk  $p_{gem}$  in ( $F = p_{gem} L^2$ ; bovendien schrijft men in plaats van de snelheid het toerental ( $V = nL$ ) en voert men nog een dimensieloze spleetverhouding in  $\frac{\Delta r}{r}$ , dan krijgt men als dimensieloze representatie van de drukkracht de uitdrukking

$$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 \frac{p_{gem}}{\eta n}$$

hetgeen men ook wel het getal van Sommerfeld noemt.

- Roterende pompen.

Bij roterende stromingsmachines drukt men de geleverde drukverhoging in de regel uit in een opvoerhoogte ( $h$ ); een dimensieloze voorstelling hiervan verkrijgt men met behulp van het getal van Froude en  $V = nL$  in de gedaante

$$\frac{gh}{n^2 L^2}$$

Ook deze opvoerhoogte zal weer een functie zijn van het getal van Reynolds (geschreven als  $\frac{\rho n L^2}{\eta}$ ) en van een kinematische

grootheid, aequivalent aan de snelheidsgraad van een propeller  $\frac{V}{nL}$ , die we nu schrijven als  $\frac{VL^2}{nL^3} = \frac{q}{nL^3}$ , waarin  $q$  de volumestroom voorstelt en het cavitatiegetal  $\sigma$ . Men vindt dus voor onsamendrukbare media:

$$\frac{gh}{n^2 L^2} = f\left(\frac{\rho n L^2}{\eta}, \frac{q}{nL^3}, \sigma\right)$$

en dito voor het vermogen

$$\frac{P}{\rho n^3 L^5} = f\left(\frac{\rho n L^2}{\eta}, \frac{q}{nL^3}, \sigma\right)$$

In de regel verwaarloost men de invloed van het getal van Reynolds, en blijft men buiten het gebied van cavitatie, dan

$$\frac{gh}{n^2 L^2} = f\left(\frac{q}{nL^3}\right)$$

$$\frac{P}{\rho n^3 L^5} = f\left(\frac{q}{nL^3}\right)$$



Literatuur.

4. G.Birkhoff (1950/55) - Hydrodynamics, a study in logic, fact and similitude - New York.  
H.Freudenthal - editor - (1961) - The concept and the role of the model in mathematics and natural and social sciences - Dordrecht.  
A.A.Gukhman (1965) - Introduction to the theory of similarity - New York.  
S.J.Kline (1965) - Similitude and approximation theory - New York.  
H.L.Langhaar (1951) - Dimensional analysis and theory of models - New York.  
G.Murphy (1950) - Similitude in engineering - New York.  
G.Murphy, D.J.Shippy & H.L.Luo (1963) - Engineering analogies - Ames.  
R.C.Pankhurst (1964) - Dimensional analysis and scale factors - London.  
L.I.Sedov (1959) - Similarity and dimensional methods in mechanics - London.

Eindhoven, januari 1966.