

Partial Synchronization in Cartesian Product Networks of Coupled Nonlinear Systems Without/with Delays

Citation for published version (APA):

Oguchi, T., Nijmeijer, H., Murguia Rendon, C. G., & Oomen, W. A. W. A. (2013). Partial Synchronization in Cartesian Product Networks of Coupled Nonlinear Systems Without/with Delays. In *56th Japan Joint Automatic Control* (pp. 1237-1242). T. Oguchi.

Document status and date:

Published: 01/01/2013

Document Version:

Publisher's PDF, also known as Version of Record (includes final page, issue and volume numbers)

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

631 (遅延)結合非線形システムの直積ネットワークにおける部分同期

○小口俊樹(首都大学東京) Willard Oomen (Eindhoven Univ. of Tech.)
Carlos Murguia (Eindhoven Univ. of Tech.) Henk Nijmeijer (Eindhoven Univ. of Tech.)

Partial Synchronization in Cartesian Product Networks of Coupled Nonlinear Systems without/with Delays

*T. Oguchi (Tokyo Metropolitan Univ.), W. Oomen (Eindhoven Univ. of Tech.)
C. Murguia (Eindhoven Univ. of Tech.) and H. Nijmeijer (Eindhoven Univ. of Tech.)

Abstract– This paper considers the synchronization problem in the Cartesian product networks of chaotic systems without/with delays in the couplings. By scaling the synchronization condition for two identical systems with bidirectional delayed coupling with respect to the coupling strength, we can estimate conditions for full/partial synchronization in networks of coupled systems. In this report, we show that full/partial synchronization patterns in the Cartesian product networks of two network systems can be estimated by the same approach. The validity of the estimated synchronization conditions is tested by numerical simulations and experiments with electric circuits.

Key Words: Chaos synchronization, Networks, Time-delays, The Cartesian product

1 はじめに

近年、結合系における同期現象¹⁾の研究は、応用物理や数理生物学だけでなく、システムの情報ネットワーク化に伴い工学分野においても非常に関心が高まっている。制御工学においては、同期現象はオブサーバ理論や状態予測器設計のほか、マルチエージェントシステムにおけるコンセンサス問題やフォーメーション問題とも深く関係している。伝送遅延などのむだ時間を結合に含む遅延拡散結合によるネットワークシステムは現実的な問題設定であるだけでなく、遅延がない状況では観察できない部分同期パターンが発生することも知られている³⁾。遅延結合によるカオス系の同期問題を考える際、誤差ダイナミクスの安定性に帰着させて同期条件を求めることができるが、Lyapunov-Krasovskii 汎関数アプローチを用いた場合、その高い保守性により部分同期のための条件を導出することは困難である。著者らは、ネットワーク構造を表すグラフラブラシアン固有値に着目し、二つの同一システムが遅延を含む双方向結合で結合されている場合の同期条件をスケールリングすることにより、任意の遅延結合系の完全同期、部分同期の同期条件が導出可能であることをLur'e系に対して明らかにしてきた^{2,3)}。同様の方法は、強準受動性を有するシステムを対象に対して成り立つことが独立に示されている^{4,5)}。中村・小口⁶⁾は、このスケールリングに基づく同期条件の導出方法を用いて、強準受動性を有するシステムがなす二つのネットワークの直積ネットワークにおける同期条件を検討した。

本報告では、この方法をより複雑なシステムに適用し、その推定法の妥当性を数値シミュレーションにより検証している。さらに、等価な回路を用いた実験により、推定に従い、完全同期や部分同期が発生することを示す。

2 非線形ネットワーク系の完全/部分同期

ここでは、次式で表される N 個の同一なシステムからなるネットワークシステムを考える。

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + f(x_i) + Bu_i(t) \\ y_i(t) = Cx_i(t) \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $x_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i, y_i \in \mathbb{R}$ であり、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は十分滑らかな関数であるとする。また、各システムは強準受動的であり、 $CB > 0$ であるとする。各システムの入力 u_i は

$$u_i(t) = - \sum_{j=1}^N k_{ij}(y_j(t-\ell) - y_i(t-\ell)) \quad (2)$$

で与えられ、ネットワークを構成するものとし、 $k_{ij} \geq 0$ はサブシステム (i, j) 間に結合があるならば、 $k_{ij} = k$ 、結合がないならば $k_{ij} = 0$ とする。ただし、結合は双方向結合であるとする。また、 $\ell \geq 0$ はむだ時間を表し、 $\ell = 0$ ならば遅延がないことを意味する。各システムへの入力からなる入力ベクトル $u(t) = [u_1(t) \cdots u_N(t)]^T$ は

$$u(t) = -k(L(\mathcal{G}) \otimes C)x(t-\ell)$$

と記述でき、システム全体のダイナミクスは

$$\dot{x}(t) = (I_N \otimes A)x(t) + F(x) - k(I_N \otimes B)(L(\mathcal{G}) \otimes C)x(t-\ell) \quad (3)$$

となる。ここで、 \otimes はクロネッカー積を表し、 $F(x)$ は

$$F(x) = [f(x_1)^T \cdots f(x_N)^T]^T,$$

$L(\mathcal{G})$ はネットワーク構造を表すグラフ \mathcal{G} のグラフラブラシアンであり、次数行列 $D(\mathcal{G})$ と隣接行列 $A(\mathcal{G})$ を用いて $L(\mathcal{G}) = D(\mathcal{G}) - A(\mathcal{G})$ で定義される。本稿を通じて、構成されるネットワークは連結グラフであるとする。

このとき、システムの同期は次のように定義される。

定義 2.1 システム Σ_i, Σ_j について, $\|\varphi_i - \varphi_j\|_C \leq r$ を満たす任意の初期条件 φ_1, φ_j に対し, 解軌道が $t \rightarrow \infty$ のとき $\|x_i(t) - x_j(t)\| \rightarrow 0$ となる正数 r が存在するならば, システム Σ_i と Σ_j は同期するという. ここで, $\|\varphi\|_C := \max_{-\ell \leq \theta \leq 0} \|\varphi(\theta)\|$ である.

ここでは, ネットワークを構成する任意のシステム Σ_i, Σ_j について上述の定義が成り立つときをネットワークシステムの完全同期, ネットワークを構成する一部のシステムが同期する場合を部分同期と呼ぶ.

このようなネットワークシステムの同期条件とグラフラプラシアンとの関係について, 遅延のない結合の場合, すなわち $\ell = 0$ のとき, 次の予想が成り立つことが知られている.

Wu-Chua の予想 ⁷⁾ m_1 個のサブシステムからなるネットワークシステム G_1 と m_2 個のサブシステムからなるネットワークシステム G_2 を考える. このとき G_1 がある結合強度 α_1 で完全同期するとき, $\alpha_1 \lambda_2(G_1) = \alpha_2 \lambda_2(G_2)$ を満たす α_2 でシステム G_2 は完全同期する. ここで, $\lambda_2(G_i)$ は G_i のグラフラプラシアンの非零の最小固有値を表す.

この予想は, 一般には真ではないが, サブシステムが準受動性⁸⁾を持つならば真となることが知られている. これを遅延を含む結合に拡張したものが, スケーリングに基づく同期条件の推定法^{2,3,4,5)}になる.

$N = 2$ の場合を考える. このとき, $L(K_2)$ は

$$L(K_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

であり, 座標変換 $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ e_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes I_n x(t)$ により,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{e}_{12}(t) \end{bmatrix} &= (I_2 \otimes A) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ e_{12}(t) \end{bmatrix} + \Psi(x_1, e_{12}) \\ &\quad - k \begin{bmatrix} 0 & BC \\ 0 & 2BC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-\ell) \\ e_{12}(t-\ell) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

ただし,

$$\Psi(x_1, e_{12}) = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_1) - f(x_1 - e_{12}) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \psi(x_1, e_{12}) \end{bmatrix}$$

であり, $\dot{e}_{12} = Ae_{12}(t) + \psi(x_1, e_{12}) - 2kBCe_{12}(t-\ell)$ の原点が漸近安定となるとき, 二つの結合システムは同期を生じる. また, そのときの対 (k, ℓ) の集合を \mathcal{S} とする.

次に N 個の完全グラフネットワークを考える. 同様に座標変換を

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ e(t) \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & & -1 \end{bmatrix} \otimes I_n \right) x(t) \\ &:= (M_0 \otimes I_n)x(t), \end{aligned} \quad (5)$$

を適用することにより

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} &= (I_N \otimes A_0) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \Psi(x_1, e) \\ &\quad - k \begin{bmatrix} 0 & a_{12}BC & \cdots & a_{1N}BC \\ 0 & ML(K_N)M^+ \otimes BC & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ e(t-\tau) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる. ただし,

$$e(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) - x_2(t) \\ \vdots \\ x_1(t) - x_N(t) \end{bmatrix} = (M \otimes I_n)x(t)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N}$$

$$M^+ = \begin{bmatrix} 0 & & & \mathbf{0} \\ -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & & & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$$

であり,

$$\Psi = [f(x_1)^T \quad \psi^T(x_1, e_{12}) \quad \cdots \quad \psi^T(x_1, e_{1N})]^T$$

a_{1j} は隣接行列 A の $(1, j)$ 要素である. ここで,

$$ML(K_N)M^+ = \text{diag}(N, \dots, N)$$

となるため, $e(t)$ のダイナミクスはブロック対角化されており, $N-1$ 個の同一のダイナミクス

$$\dot{e}_{1j} = Ae_{1j}(t) + \psi(x_1, e_{1j}) - \bar{k}BCe_{1j}(t-\ell)$$

に分割されることがわかる. ただし, \bar{k} はサブシステム数 N によりスケールされた結合強度を表し, $\bar{k} = \lambda_2(K_N)k = Nk$ である. したがって, $(\frac{Nk}{2}, \ell) \in \mathcal{S}$ であるならば, N 個の完全グラフネットワークは完全同期することがわかる. このように, $N=2$ の場合の同期条件 \mathcal{S} をゲインに関してスケールすることで, N 個のネットワークシステムの同期条件を推定することができる.

完全グラフの場合, グラフラプラシアンの固有値は, 0 と N (重複度 $N-1$) であるため, \mathcal{S} をスケールした領域は 1 つしか現れない. しかしながら, 一般のグラフ構造においては, グラフラプラシアンの非零固有値は複数の値を取りうる. そのような場合においてネットワークの部分同期が生じうる.

ネットワークの構造が完全グラフでない場合, $ML(\mathcal{G})M^+$ に対して $P^{-1}ML(\mathcal{G})M^+P = \text{diag}(\lambda_2, \dots, \lambda_N)$ とする正則行列 P が常に存在する. ここで, λ_i は $L(\mathcal{G})$ の固有値であり, $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ である. $\psi(x_1, e)$ を $e=0$ の周りで線形近似し, 座標変換 $e = (P \otimes I_n)\bar{e}$ によりすることにより, 同期誤差ダイナミクスはブロック対角化され, それぞれの固有値に対応した $N-1$ 個のダイナミクスに分割できる.

$$\Sigma'_i : \dot{\bar{e}}_i(t) = A\bar{e}_i(t) + \psi'(x_1)\bar{e}_i(t) - \lambda_{i+1}kBC\bar{e}_i(t-\ell) \quad (6)$$

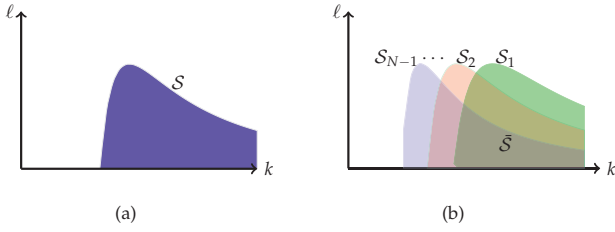


Fig. 1: Scaling method :(a) Synchronization condition for $N = 2$, and (b) the estimated synchronization condition for N coupled systems.

ただし, $i = 1, \dots, N-1$. 各 Σ_i^l の原点が漸近安定となる対 (k, ℓ) の集合を S_i とすると, S_i は

$$S_i = \{(k, \ell) | (\frac{\lambda_{i+1}k}{2}, \ell) \in S\}$$

として, $N = 2$ の同期条件をゲインに関して $2/\lambda_{i+1}$ 倍スケールリングすることで推定できる. さらに, $\bar{S} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} S_i \neq \emptyset$ (ただし, \mathcal{I} は添字集合 $\mathcal{I} = \{1, \dots, N-1\}$) であるならば, $(k, \ell) \in \bar{S}$ において同期誤差ダイナミクスは原点に収束し, 完全同期, すなわち

$$x_1 = x_2 = \dots = x_N$$

が実現される.

一方, $N-1$ 個の同期誤差ダイナミクス (6) のうちの $M (< N-1)$ 個のダイナミクスの添字集合を \mathcal{I}_M とおく. すなわち, $\mathcal{I}_M \subset \mathcal{I}$ であり, $|\mathcal{I}_M| = M$ である. ここで, $\bigcap_{i \in \mathcal{I}_M} S_i \neq \emptyset$ と仮定すると, $(k, \tau) \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}_M} S_i$ であるならば, $\bar{e}^i = 0$ ($i \in \mathcal{I}_M$) は漸近安定であり, これは次の M 個の連立方程式が成り立つことを意味する.

$$\bar{e}^i = (\mu_i^T \otimes I_n)x(t) = 0 \text{ for } i \in \mathcal{I}_M \quad (7)$$

ただし, μ_i はグラフラプラシアン $L(\mathcal{G})$ の固有値 λ_i に対応する固有ベクトルである. したがって, 式 (7) の解が, ある $j, k \in \mathcal{I}$ に対して $x_j(t) = x_k(t)$ の形で与えられるならば, システム i と j は部分同期を生じることとなる.

3 直積ネットワークにおける同期条件

本稿では, 二つのそれぞれ双方向結合で構成されるネットワークの直積ネットワークにおける同期問題を考える. そこで, まず直積ネットワークを導入する.

今, (1) 式と拡散結合 (2) で構成されるネットワークシステムを, ネットワーク上のサブシステムをノード, 結合をエッジで表したグラフで表現する. すなわち, グラフ \mathcal{G} は, サブシステムをノードとするノードの集合 V と結合関係を表すエッジの集合 E の順序対 $\mathcal{G} = (V, E)$ で表す. いま, 二つのグラフ $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1)$ と $\mathcal{G}_2 = (V_2, E_2)$ の直積を $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \square \mathcal{G}_2$ と表す. このとき, 直積グラフ \mathcal{G} は, $V(\mathcal{G}) = V_1 \times V_2$ をノード集合として持つ. また, $V(\mathcal{G})$ の二つのノード (v_1, v_2) と (v'_1, v'_2) が隣接しているためには, $v_1 = v'_1$ かつ $(v_2, v'_2) \in E_2$ であるか, $v_2 = v'_2$ かつ $(v_1, v'_1) \in E_1$ であるかのいずれかの場合となる.

二つのグラフ \mathcal{G}_1 と \mathcal{G}_2 それぞれのグラフラプラシアンと, それらの直積グラフのグラフラプラシアンとは,

次の関係を満たす.

$$\begin{aligned} L(\mathcal{G}_1 \square \mathcal{G}_2) &= L(\mathcal{G}_1) \otimes I_m + I_n \otimes L(\mathcal{G}_2) \\ &= L(\mathcal{G}_1) \oplus L(\mathcal{G}_2) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし, \mathcal{G}_1 と \mathcal{G}_2 のノード数は, それぞれ n, m であり, \oplus は二つのグラフラプラシアンのクロネッカー和を表している.

直積グラフの固有値と固有ベクトルについて, 次の結果が知られている.

定理 1 ¹⁰⁾ \mathcal{G}_1 と \mathcal{G}_2 はそれぞれ n ノード, m ノードからなるグラフであるとする. さらに, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ と $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ はそれぞれ $L(\mathcal{G}_1)$ と $L(\mathcal{G}_2)$ の固有値であり, 対応する固有ベクトルはそれぞれ u^1, u^2, \dots, u^n と v^1, v^2, \dots, v^m であるとする. このとき, 直積グラフ $L(\mathcal{G}_1 \square \mathcal{G}_2)$ は固有値 $\lambda_i + \mu_j$ とその対応する固有ベクトル

$$u^i \otimes v^j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

を持つ.

これより, $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{G}_1 \square \mathcal{G}_2)$ の非零最小固有値は

$$\lambda_2(L(\mathcal{G}_1 \square \mathcal{G}_2)) = \min(\lambda_2(L(\mathcal{G}_1)), \lambda_2(L(\mathcal{G}_2)))$$

となることが分かる.

このことから, 二つのネットワークシステムの直積ネットワークにおける同期条件は, 元の二つのネットワークにおけるグラフラプラシアンの固有値からスケールリング法を用いることで推定することができる. いま, 二つのネットワークシステムのグラフ構造が $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ で与えられるとき, 各システムへの入力はそれぞれ次式で与えられるとする.

$$\begin{cases} u_i(t) = -k_1 L(\mathcal{G}_1) \{y_i(t-\ell) - y_j(t-\ell)\} & \text{for } \mathcal{G}_1 \\ u_i(t) = -k_2 L(\mathcal{G}_2) \{y_i(t-\ell) - y_j(t-\ell)\} & \text{for } \mathcal{G}_2 \end{cases}$$

このとき, $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ の直積ネットワークシステムは,

$$\dot{x} = (I_{nm} \otimes A)x(t) + F(x) \quad (9)$$

$$- ((k_1 L(\mathcal{G}_1) \otimes k_2 L(\mathcal{G}_2)) \otimes BC)x(t-\ell) \quad (10)$$

となる. ただし,

$$x^T = [x_{(1,1)}^T, \dots, x_{(1,m)}^T, \dots, x_{(n,1)}^T, \dots, x_{(n,m)}^T]$$

である.

前節で述べたスケールリング法を用いることで, 同期条件を求めるためには, 二つの双方向結合の場合の同期条件 \mathcal{S}_{K_2} を用いて

$$\mathcal{S}_{(i,j)}(\mathcal{G}) = \{(k_1, k_2, \ell) | (\frac{k_1 \lambda_i + k_2 \mu_j}{2}, \ell) \in \mathcal{S}_{K_2}\} \quad (11)$$

を求め, $\bigcap_{i,j} \mathcal{S}_{(i,j)}$ により完全同期領域を求めることができる.

4 例題

以下では、ネットワーク上の各システムとして次式で与えられる Hindmarsh-Rose ニューロンシステム

$$\begin{cases} \dot{y}_i(t) = -y_i^3(t) + 3y_i^2(t) + z_{i,1}(t) - z_{i,2}(t) + a + u_i(t) \\ \dot{z}_{i,1}(t) = 1 - 5y_i^2(t) - z_{i,1}(t) \\ \dot{z}_{i,2}(t) = b(4(y_i(t) + c) - z_{i,2}(t)) \end{cases} \quad (12)$$

ただし、 $a = 3.25, b = 0.005, c = 1.618$, を考え、完全同期、部分同期について検討する。

このシステムに対して、Fig. 2に示す単純化 sandglass network \mathcal{G}_1 と ノード数 2 の完全グラフ K_2 との直積グラフネットワークを考える。

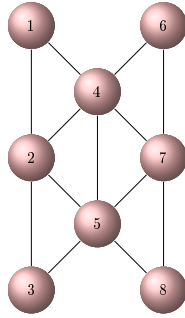


Fig. 2: Simplified Sandglass Network

ただし、拡散結合は

$$\begin{cases} u_i(t) = -k_1 L(\mathcal{G}_1) \{y_i(t-\ell) - y_j(t-\ell)\} & \text{for } \mathcal{G}_1 \\ u_i(t) = -k_2 L(K_2) \{y_i(t-\ell) - y_j(t-\ell)\} & \text{for } K_2 \end{cases}$$

で与えるものとする。

はじめに K_2 グラフの同期条件を数値シミュレーションにより求めると、Fig.3 のように求められる。なお、この同期条件は各 (k, ℓ) に対して初期値をランダムに与えて各 30 回シミュレーションを行い、確率 1 で同期が達成された各 k の値に対する最大むだ時間を表している。この結果を用いて、(11) 式を用いて直積ネットワークの同期条件を推定する。ここでは、 $\ell = 0$ の場合を示す。これは完全同期については、Wu-Chua 予想に基づく結果となる。

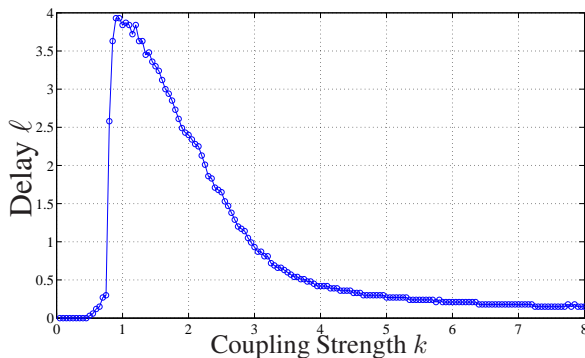


Fig. 3: Synchronization region for $N = 2$

4.1 同期条件の推定と数値シミュレーション

まず、 \mathcal{G}_1 のネットワークで生じる同期現象について考えると、 \mathcal{G}_1 のグラフラプラシアン

$$L(\mathcal{G}_1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

は次の固有値を持つ。

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, \lambda_2 = 3 - \sqrt{3}, \lambda_3 = 4 - \sqrt{6}, \lambda_4 = 2, \\ \lambda_5 &= 4, \lambda_6 = 3 + \sqrt{3}, \lambda_7 = 6, \lambda_8 = 4 + \sqrt{6} \end{aligned}$$

対応する固有ベクトルに基づく条件式 (7) から、Fig. 5 における

- $k \geq \frac{2\bar{k}}{\lambda_2}$ で完全同期、
- $\frac{2\bar{k}}{\lambda_2} > k \geq \frac{2\bar{k}}{\lambda_3}$ において

$$x_1 = x_3 \neq x_4 = x_5 \neq x_6 = x_8 \neq x_2 \neq x_7 \quad (14)$$

となる部分同期

が表れることが推定できる。ここで、 \bar{k} は K_2 において同期を生じる最小結合強度を表し、 $\bar{k} = 0.52$ である。

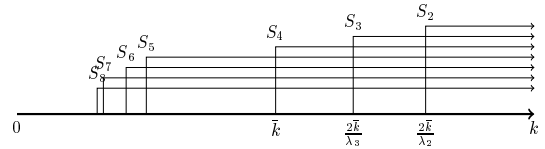


Fig. 4: Synchronization region for \mathcal{G}_1

この結果から、直積ネットワーク $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \square K_2$ の同期分岐線図は Fig. 5 のように推定される。

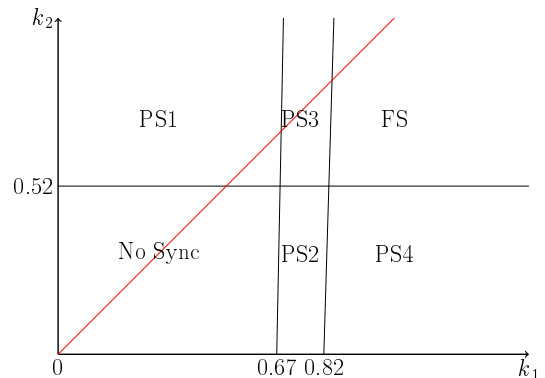


Fig. 5: Synchronization bifurcation diagram for $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \square K_2$

それぞれ現れる部分同期のパターン PS1, PS3, PS4 は Figs. 6-8 に示す通りである。

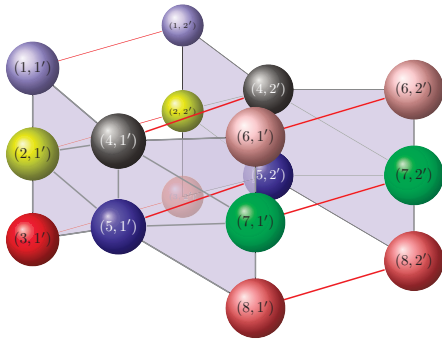


Fig. 6: Partial synchronization pattern :PS1

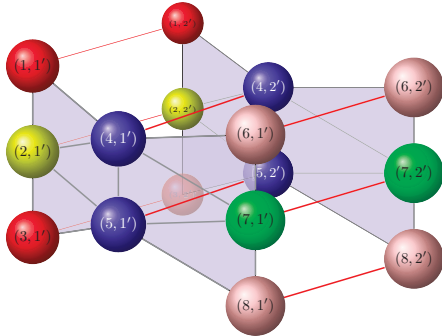


Fig. 7: Partial synchronization pattern :PS3

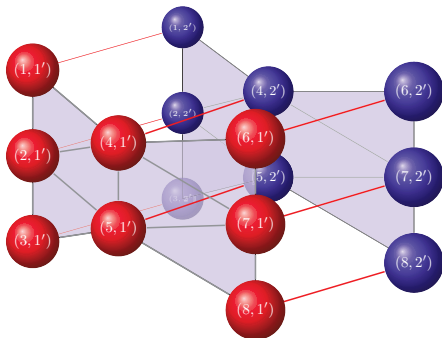


Fig. 8: Partial synchronization pattern :PS4

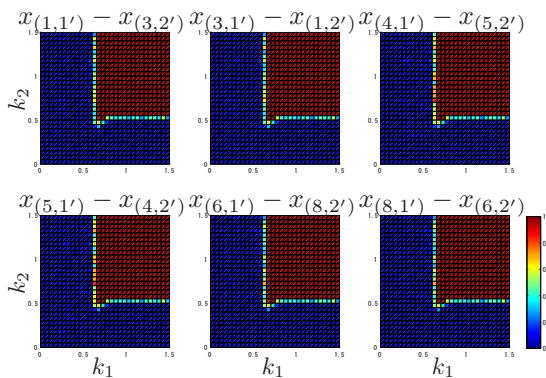


Fig. 9: Success rate of synchronization between systems related with PS3

数値シミュレーションにより、部分同期 PS3,PS4, 完全同期に関する同期誤差を各 (k_1, k_2) に対して求めた結果を Figs. 9-11 に示す. 各点に対して初期値をランダムに与え 20 回のシミュレーションを行い、各誤差が 0 になる確率を色で表している. 部分同期 PS3,PS4 を示す領域が推定した境界から外側に膨らんだ形で領域が広がっていることがわかる.

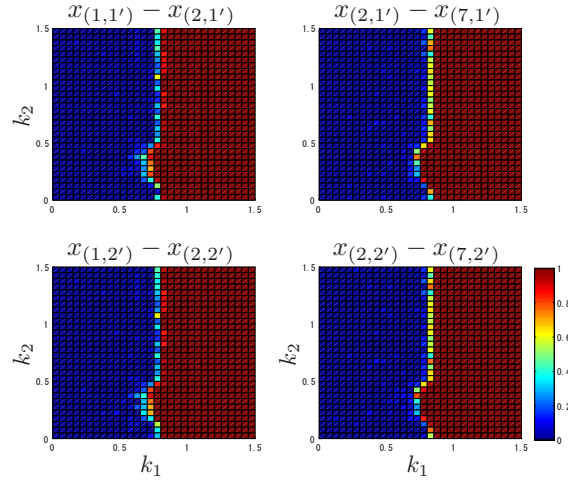


Fig. 10: Success rate of synchronization between systems related with PS4

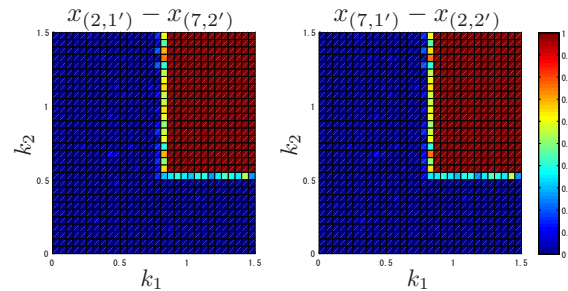


Fig. 11: Success rate of synchronization between systems related with FS

4.2 実験結果

前節までに述べた二つの直積ネットワークの同期条件の妥当性を前述の Hindmarsh-Rose ニューロンモデルに等価な回路を用いた実験により検証を行う. Eindhoven 工科大で設計した Fig. 12 に示す 1 つのニューロンモデルと等価な回路を複数用いて実験を行った (Fig. 13).



Fig. 12: An Electric Hindmarsh-Rose neuron

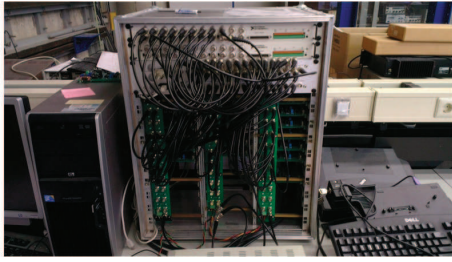


Fig. 13: Experimental setup of electric neuron network system

結合強度 $(k_1, k_2) = (1.0, 0.6)$ としたとき, Fig. 14 に示すようにすべての状態が同期をしていることが分かる. Fig. 15 は $(k_1, k_2) = (1.0, 0.5)$ としたときの実験結果である. G_1 の面がそれぞれ同期しているが, 二つの G_1 の対応するシステム間での同期は観察されない. したがって, 部分同期 PS4 が発生していることが分かる. 回路実験の場合, 回路毎のパラメータの僅かな差が存

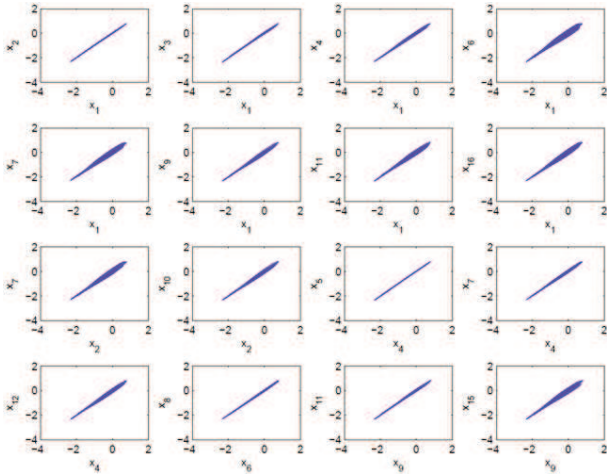


Fig. 14: Full Synchronization observed in Experiment

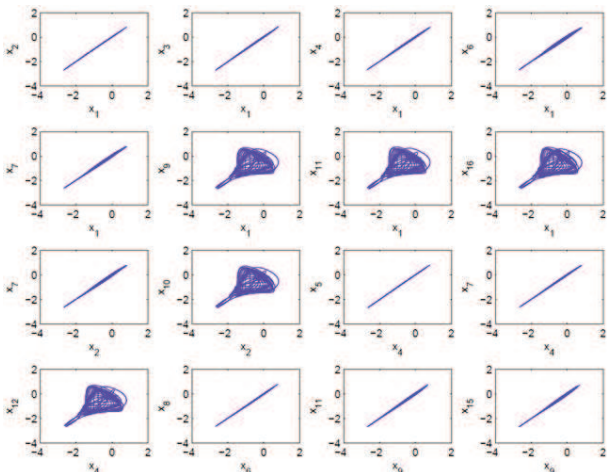


Fig. 15: Partial Synchronization PS4 observed in Experiment

在する, また $N = 2$ のときの同期を示す最小結合強度 \bar{k} の値が数値シミュレーションの結果と僅かに差があるが, k_1 を固定して k_2 の値を変化させることで, 完

全同期から部分同期 PS4 への遷移が観察できている.

5 おわりに

本報告では, 直積ネットワークにおける部分同期条件のスケーリングに基づく推定方法について, 数値シミュレーションと回路を用いた実験により, その推定法の妥当性について検証を行った. 完全同期については, 数値シミュレーションによる検証の結果, ほぼ同一の同期条件をスケーリング法により推定できることがわかる. 一方, 部分同期については, 実際に数値実験で得られた同期条件は推定条件を包含した形となっている. これは部分同期においては, 同期をしない他のシステムからの結合が常に外部入力として加わるため, 部分同期の状態は必ずしも結合がない状態とは一致しないためであると考えられる. 同期誤差ダイナミクスの安定性ととも各システムの挙動を合わせて検討する必要がある. また, 本研究では数値シミュレーションだけでなく, 等価回路を用いた実験を行い, 結合強度を変化させることにより完全同期から部分同期へ推移する様子を確認した.

謝辞

本研究の一部は, 日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (C) 23560537 の助成を受けた.

参考文献

- 1) S. Strogatz, SYNC-The Emerging Science of Spontaneous Order, Penguin (2004)
- 2) T. Mimura and T. Oguchi, Synchronization and topology in networks of Lur'e systems with delay couplings, *Proc. of ENOC 2012*, Rome, Italy (2011)
- 3) T. Mimura and T. Oguchi, Partial synchronization of Lur'e type nonlinear systems with delay couplings, *Proc. of 3rd IFAC Chaos*, Cancún, Mexico (2012)
- 4) E. Steur, Synchronous behavior in networks of coupled systems- with applications to neuronal dynamics, PhD dissertation, Eindhoven University of Technology (2011)
- 5) E. Steur, T. Oguchi, C. van Leeuwen, and H. Nijmeijer, Partial Synchronization in diffusively time-delay coupled oscillator networks, *Chaos (American Institute of Physics)*, Vol. 22, No. 4, 047204 (2012)
- 6) 中村, 小口. 拡散遅延結合による直積ネットワークシステムの同期条件, 第 55 回自動制御連合講演会, 京都, pp.1332-1335 (2012)
- 7) C.W. Wu. Synchronization in Complex Networks of Non-linear Dynamical Systems, World Scientific (2007)
- 8) A. Pogromsky, G. Santoboni and H. Nijmeijer, Partial synchronization: from symmetry toward stability, *Physica D*, **172**(1-4), 65/87 (2002)
- 9) E. Steur and H. Nijmeijer, Synchronization in networks of diffusively time-delay coupled (semi-)passive systems, *IEEE Trans. Circ. Syst. I*, **58**-6, 1358/1371 (2011)
- 10) M. Mesbashi and M. Egerstedt, Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks, Princeton Univ. Press (2010)