

Toepassing van een actieve vering op een half-car model van een truck-oplegger combinatie, waarbij beperkte toestandsterugkoppeling wordt gebruikt

Citation for published version (APA):

Wal, van de, M. M. J. (1992). *Toepassing van een actieve vering op een half-car model van een truck-oplegger combinatie, waarbij beperkte toestandsterugkoppeling wordt gebruikt*. (DCT rapporten; Vol. 1992.038). Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1992

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Toepassing van een actieve voertuigvering op een half-car model van een truck-oplegger combinatie, waarbij beperkte toestandsterugkoppeling wordt gebruikt.

Marc van de Wal

Rapport nr.: WFW.92.038

**Toepassing van een actieve vering op een half-car
model van een truck-oplegger combinatie, waarbij
beperkte toestandsterugkoppeling wordt gebruikt.**

auteur: Marc van de Wal

stagebegeleider: Rudolf Huisman

Eindhoven, april 1992

VAKGROEP FUNDAMENTELE WERKTUIGKUNDE
FACULTEIT WERKTUIGBOUWKUNDE
TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Samenvatting

In dit verslag worden de prestaties van twee actieve en één passieve vering, toegepast op een half-car model van een truck-oplegger combinatie, vergeleken. De beide actieve veersystemen zijn gebaseerd op toestandsterugkoppeling; volledige, respectievelijk beperkte toestandsterugkoppeling. Bij het ontwerp van de terugkoppelmatrix is de tijdvertraging, welke optreedt tussen excitatie van de voor- respectievelijk achterwielen, in het voertuigmodel opgenomen, daar uit de literatuur blijkt dat dit grote voordelen biedt voor het dynamisch gedrag. Omdat volledige toestandsterugkoppeling in de praktijk veelal moeilijk te realiseren blijkt, is bekeken of het mogelijk is om het dynamisch gedrag van het beperkt teruggekoppelde systeem gelijkwaardig te krijgen. Daarbij is vooral het maximaliseren van het comfort in ogenschouw genomen.

Met behulp van MATLAB zijn simulaties uitgevoerd met de drie systemen, bij verschillende wegdekverlopen. Het blijkt dat het gedrag van elk der systemen zeer sterk afhankelijk is van het vermogensspectrum van het wegdeksignaal. Beide actieve systemen vertonen ten opzichte van het passieve systeem in het algemeen een sterke reductie van amplitudes in de veerwegen aan de achterkant van de truck en een sterke vermindering in dompversnelling, wat een verhoging van het comfort betekent.

Er is een beperkt teruggekoppeld systeem gevonden dat in de praktijk, dat wil zeggen voor wegdeksignalen waarvan het vermogensspectrum beperkt blijft tot lage frequenties, qua comfort gemiddeld net zo goed is als het volledig teruggekoppelde systeem en zeker beter voldoet dan het passieve systeem. Dit hoge comfort gaat echter ten koste van andere te regelen grootheden; zo gaat bij bepaalde wegdeksignalen het contact tussen de achterwielen en het wegdek tijdelijk verloren, wat bij het passieve systeem niet het geval is. Het toepassen van de betreffende terugkoppelmatrix levert in de praktijk dus niet louter voordelen.

Inhoudsopgave

Samenvatting	1
Symbolenlijst	4
1. Inleiding	6
2. Modelling	8
2.1 Inleiding	8
2.2 Het wegdeksignaal	9
2.3 Het voertuigmodel	11
2.3.1 Het actief geveerde systeem	11
2.3.2 Het passief geveerde systeem	14
3. De regelstrategie	16
3.1 Inleiding	16
3.2 De algemene, optimale, continue regelwet	16
3.3 Volledige toestandsterugkoppeling	18
3.4 Beperkte toestandsterugkoppeling	19
3.5 Simulaties	22
4. Twee methoden ter verbetering van de beperkte toestandsterugkoppeling	24
4.1 Inleiding	24
4.2 Gewogen least squares op de volledige terugkoppelmatrix	24
4.3 Gewogen least squares op de uitgangen	26

5. Vergelijking van het passieve, het volledige teruggekoppelde en het beperkt teruggekoppelde systeem	29
5.1 Inleiding	29
5.2 De afgeronde stap als wegdeksignaal	29
5.3 De rounde pulse als wegdeksignaal	30
5.4 De overdrachten naar de dompversnelling	31
6. Conclusies	32
7. Aanbevelingen	33
Literatuur	34
Bijlagen	35
A. Terugkoppelmatrices en polen van de diverse systemen	35
B. Beperkingen van de Padé-approximatie	37
C. Grenzen van de bandindrukkingen en veerwegen	39
D. Reductie van de impliciete relatie voor L tot een expliciete	40
E. De weegmatrices	42
F. Gelijkstelling van het volledig teruggekoppelde systeem met het passieve systeem	44
G. De afgeronde stap	47
H. Simulaties behorende bij paragraaf 5.3	48
I. Afleiding van de weegmatrix W	51
J. Figuren bij paragraaf 4.2	52
K. Pieken van de te regelen grootheden als functie van twissel, a en b	54
L. Figuren bij paragraaf 4.3	57
M. Simulaties behorende bij paragraaf 5.2	59
N. De rounded pulse	62
O. Figuren bij paragraaf 5.3	63
P. Overdrachten van het passieve systeem en beide actieve systemen naar de dompversnelling	67
Q. Programmatuur	68

Symbolenlijst

t	tijd	[s]
f	frequentie	[Hz]
$k_{tf}, k_{sf}, k_{tr}, k_{sr}$	veerconstanten	[N/m]
b_{sf}, b_{sr}	dempingsconstanten	[Ns/m]
J	massatraagheid	[kgm ²]
M_t, M_c, m_t, m_r	massa's	[kg]
a, b, c	geometrische grootheden	[m]
f_{61}, f_{62}	model-constanten	[kg ⁻¹]
f_{81}, f_{82}	model-constanten	[kg ⁻¹ m]
v	voorwaartse snelheid	[m/s]
D_e	delay	[s]
$q_{tr}, q_{tr}, q_{af}, q_{ar}, q_{cf}, q_{cr}, q_m$	verplaatsingen	[m]
$\dot{q}_{af}, \dot{q}_{ar}, \dot{q}_{cf}, \dot{q}_{cr}$	snelheden	[m/s]
$\ddot{q}_{af}, \ddot{q}_{ar}, \ddot{q}_{cf}, \ddot{q}_{cr}, \ddot{q}_m$	versnellingen	[m/s ²]
$\Delta_{tf}, \Delta_{tr}, \Delta_{sf}, \Delta_{sr}$	relatieve verplaatsingen	[m]
$\dot{\Delta}_{sf}, \dot{\Delta}_{sr}$	relatieve snelheden	[m/s]
ϕ	hoekverdraaiing	[rad]
$\ddot{\phi}$	hoekversnelling	[rad/s ²]
v_1, v_2	excitatie signalen wegdek	[m/s]
f_{sf}, f_{sr}	actuatoorkrachten	[N]
η	toestandskolom v.d. Padé-approximatie	
A_n	systemmatrix v.d. Padé-approximatie	
B_n	ingangsmatrix v.d. Padé-approximatie	
C_n	uitgangsmatrix v.d. Padé-approximatie	
a_0, a_1, a_2, a_3	coëfficiënten bij de Padé-approximatie	
x	toestandskolom	
y	geregelde uitgangskolom	
z	gemeten uitgangskolom	
u	kolom met actuatoorkrachten	[N]
v	kolom met wegdeksignalen	[m/s]
A	systemmatrix	

B	ingangsmatrix	
E	verstoringmatrix	
C	uitgangsmatrix	
D	doorkoppelmatrix	
M	meetbaarheidsmatrix	
L	terugkoppelmatrix	
T	"terugkoppelmatrix" van het passieve systeem	
Q,R,W	weegmatrices	
$q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, r_1, r_2$	weegfactoren	
β	Lagrange multiplicator	
χ	autocorrelatiematrix	
\mathcal{F}	verzameling van stabiliserende beperkte terugkoppelmatrices	
θ	grootte van de iteratiestap	
α	numerieke dempingsfactor	
J	Jacobiaan, integraalcriterium	
l, t	kolom met elementen uit de terugkoppelmatrices	
q	kolom met weegfactoren	
twissel, T	tijdstippen	[s]
w	weegfunctie	
a, b	exponent-coëfficiënten van w	
h, fs	parameters bij de afgeronde stap	
Zmax, fa	parameters bij de rounded pulse	

1. Inleiding

In de hedendaagse industrie wordt steeds weer gestreefd naar verbetering van de prestaties van wegvoertuigen, onder andere met betrekking tot het veersysteem. De taak van dit veersysteem is een drievoudige. Ten eerste het dragen van de voertuigbody. Ten tweede het zorg dragen voor het comfort van de passagiers. En als laatste het zorgen voor een goede wegligging van het voertuig. Nu blijken deze laatste twee taken te leiden tot tegenstrijdige ontwerpeisen, immers: een hoog comfort wordt bereikt door een slappe vering en lage demping, een goede wegligging kan daarentegen worden gerealiseerd door een stugge vering en een hoge demping. Wanneer besloten wordt om een voertuig uit te rusten met een klassieke, passieve vering, dient er dan ook een compromis te worden gesloten tussen wegligging en comfort. Daarbij dienen de beschikbare veerwegen als randvoorwaarden, die niet overschreden mogen worden.

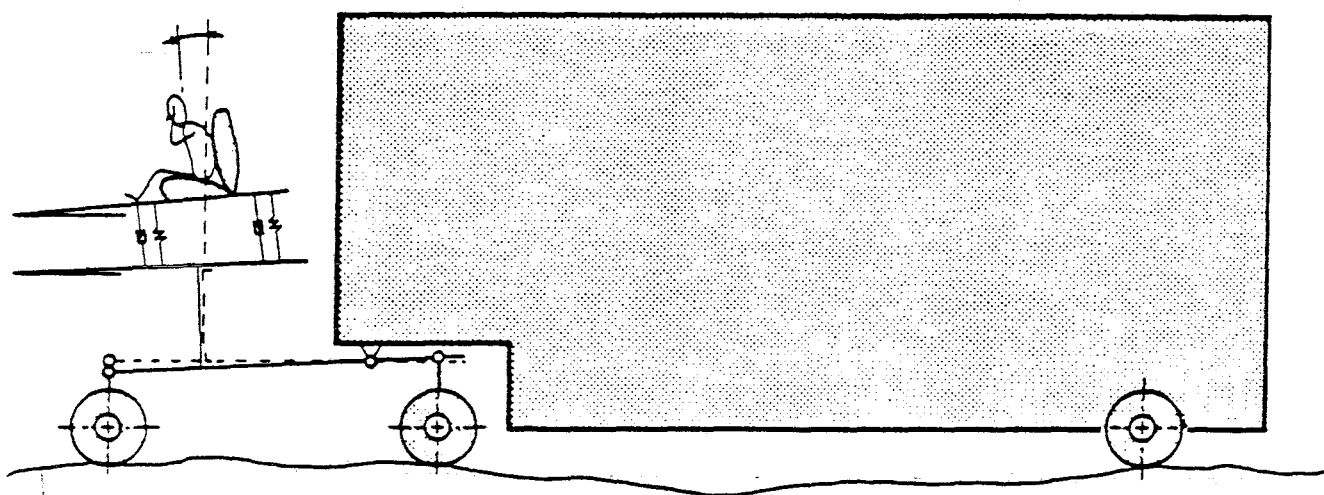
In tegenstelling tot passieve vering, waarbij gebruik wordt gemaakt van een vaste veer-demper combinatie, wordt bij actieve vering gebruik gemaakt van actuatoren. Het gebruik van actuatoren heeft het grote voordeel, dat de dynamica van het voertuig aangepast kan worden aan bijvoorbeeld de snelheid waarmee gereden wordt, het verloop van het wegdek en veranderende wegligging- en comforteisen.

De krachten die de actuatoren moeten leveren worden bepaald door terugkoppeling van meetbare of reconstrueerbare grootheden. Uit voorgaande onderzoeken is gebleken, dat het toevoeren van informatie over het wegdekverloop (preview) aan de actuator, tot zeer goede resultaten betreffende het dynamisch gedrag leidt. In dit verslag komt een benadering van de wegdekinformatie ter beschikking via een Padé-approximatie. Wanneer wordt teruggekoppeld over een toestandskolom waarin deze benadering is opgenomen, wordt in dit betoog gesproken over volledige toestandsterugkoppeling.

In de praktijk blijkt het echter zeer moeilijk te beschikken over deze informatie. Als alternatief voor volledige toestandsterugkoppeling kan beperkte toestandsterugkoppeling gehanteerd worden, waarbij slechts teruggekoppeld wordt over makkelijk meetbare grootheden. Uit [1] blijkt nu dat zowel bij volledige als beperkte toestandsterugkoppeling, een significante verbetering te bereiken is, wanneer bij het ontwerp van de regelwet de tijdvertraging tussen de aanstoting van de voor- respectievelijk de achterwielen in rekening wordt gebracht. Dit is te realiseren door bij het ontwerp van de regelwet de Padé-approximatie in het voertuigmodel op te nemen.

Het doel van dit onderzoek is nu het vergelijken van de prestaties bij passieve vering, actieve vering met volledige toestandsterugkoppeling en actieve vering met beperkte

toestandsterugkoppeling, alle drie toegepast op een eenvoudig half-car model van een truck-oplegger combinatie. Zowel de actieve vering met volledige als de actieve vering met beperkte toestandsterugkoppeling, worden ontworpen met inachtneming van de reeds genoemde tijdvertraging. Er zal vooral aandacht worden besteed aan het zo goed mogelijk gelijk krijgen van de prestaties van het beperkt teruggekoppelde systeem aan die van het volledig teruggekoppelde systeem. Met name de pieken in de dompversnelling dienen te worden geminimaliseerd, daar deze door de chauffeur van een trekker-oplegger combinatie (figuur 1.1) als zeer hinderlijk worden ervaren.



Figuur 1.1: De dompbeweging van de truck.

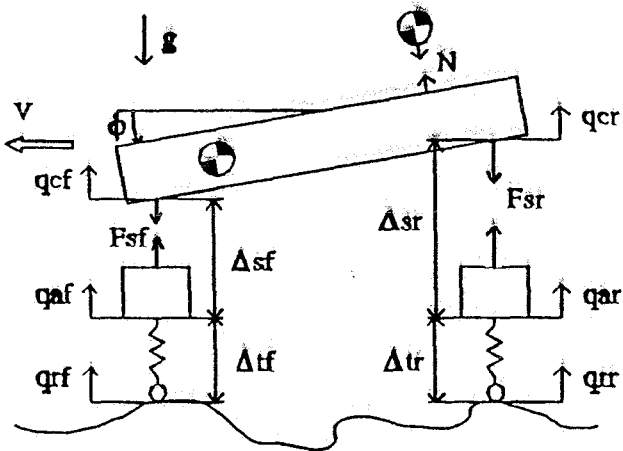
Er worden drie methoden besproken om te komen tot een beperkte terugkoppelmatrix. De eerste methode is gebaseerd op minimalisatie van een integraalcriterium, waarbij de te regelen uitgangen even zwaar worden gewogen als bij afleiding van de volledige terugkoppelmatrix het geval is (paragraaf 3.4). Een tweede methode is gebaseerd op het zo goed mogelijk gelijk krijgen van de dominante polen van het beperkt teruggekoppelde systeem aan de dominante polen van het volledige teruggekoppelde systeem (paragraaf 4.2). De derde methode om te komen tot een beperkte terugkoppelmatrix wordt besproken in paragraaf 4.3 en berust op het zo goed mogelijk gelijk krijgen (in least squares zin) van de uitgangen van het beperkt teruggekoppelde systeem aan de uitgangen van het volledig teruggekoppelde systeem.

2. Modelling

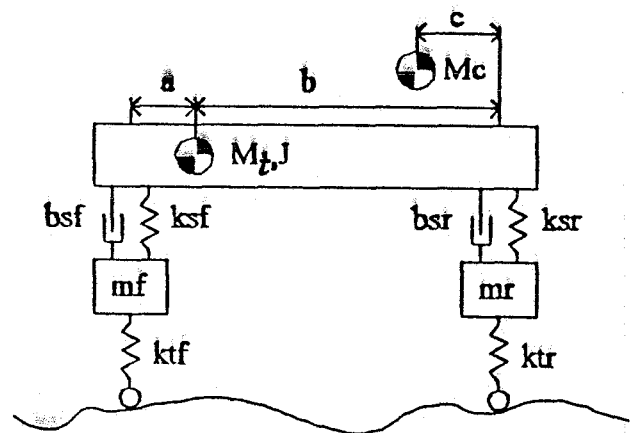
2.1 Inleiding

Figuur 2.1.1.a en 2.1.1.b geven het eenvoudige half-car model van de truck-oplegger combinatie weer bij respectievelijk actieve vering en passieve vering. In tabel 2.1.1 staan de numerieke waarden vermeld voor de van belang zijnde parameters.

In dit hoofdstuk komen achtereenvolgens aan de orde de modellering van het wegdek en de modellering van het voertuig bij passieve en actieve vering.



Figuur 2.1.1.a: Het actieve model.



Figuur 2.1.1.b.: Het passieve model.

parameter	waarde	eenheid	parameter	waarde	eenheid
k_{tf}	2.200.000	N/m	M_t	4.778	kg
k_{sf}	690.000	N/m	M_c	13.268	kg
k_{tr}	4.400.000	N/m	m_f	815	kg
k_{sr}	520.000	N/m	m_r	1.439	kg
b_{sf}	35.000	Nsec/m	a	0,518	m
b_{sr}	35.000	Nsec/m	b	2,732	m
J	9.090	kgm ²	c	0,593	m

Tabel 2.1.1

2.2 Het wegdeksignaal

De voorwielen van de truck worden aangestoten door het wegdeksignaal $q_{fr}(t)$. De achterwielen worden tegelijkertijd aangestoten door het signaal $q_{rr}(t)$ (zie figuur 2.1.1.a). Als de snelheid v van de truck constant is, dan is het signaal $q_{rr}(t)$ op een tijdvertraging D_e ($=[a+b]/v$) na, gelijk aan het signaal $q_{fr}(t)$.

Er wordt nu aangenomen dat het wegdek gemodelleerd mag worden als geïntegreerde witte ruis [2]. In dat geval geldt: $\dot{q}_{fr}(t)=v1(t)$ en $\dot{q}_{rr}(t)=v2(t)=v1(t-D_e)$.

De functies $v1(t)$ en $v2(t)$ zijn dus witte ruissignalen, waarbij:

$$E[v1(t_2) \cdot v1(t_1)] = \lambda \cdot v \cdot \delta(t_2 - t_1) \quad (2.2.1)$$

$$S_{v1v1}(f) = \lambda \cdot v \quad (2.2.2)$$

Met λ de wegruwheidsconstante en $S_{v1v1}(f)$ de spectrale vermogensdichtheid.

Zoals in de inleiding reeds opgemerkt is, is het gewenst om in het ontwerp van de regelwet informatie mee te nemen over de tijdvertraging D_e tussen voor- en achterwielexcitatie.

Hans Muijderman heeft in zijn stage [2] gekeken naar een lineair, dynamisch systeem, dat zo goed mogelijk de relatie weergeeft tussen de signalen $v1(t)$ en $v2(t)=v1(t-D_e)$. In [2] wordt aangetoond, dat een vierde orde Padé-approximatie voor een dode tijd een goed compromis is tussen nauwkeurigheid van de benadering en praktische toepasbaarheid. Aangezien de voertuigmodellen in het onderzoek van Muijderman en in dit onderzoek gelijkwaardig zijn, zal ook hier gebruik worden gemaakt van een vierde orde Padé-approximatie.

N.B.: Het modelleren van het wegdek als gefilterde witte ruis zou een realistischer weergave zijn, omdat in dat geval de spectrale vermogensdichtheid $S_{v1v1}(f)$ constant is bij lagere frequenties en afvalt bij hogere frequenties, wat voor praktische wegdekken ook het geval is [1]. Er dient dan echter opnieuw onderzocht te worden wat een geschikte orde voor de Padé-benadering is en daarvoor ontbreekt in dit onderzoek de tijd.

De toestandsbeschrijving voor de vierde orde Padé-approximatie ziet er als volgt uit:

$$\dot{\eta}(t) = A_n \eta(t) + B_n v1(t) \quad (2.2.3)$$

$$v1(t-D_e) = C_n \eta(t) + v1(t) \quad (2.2.4)$$

met:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix}; \quad B_n = \begin{bmatrix} -2a_3 \\ 2a_3^2 \\ -2a_1 - 2a_3^3 + 2a_2a_3 \\ 4a_1a_3 - 4a_2a_3^2 + 2a_3^4 \end{bmatrix};$$

$$C_n = [1 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$a_0 = 1072/D_e^4; \quad a_1 = 536/D_e^3; \quad a_2 = 120/D_e^2; \quad a_3 = 13.55/D_e$$

en:

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} vI(t-D_e) - vI(t) \\ \dot{v}1(t-D_e) - \dot{v}1(t) + 2a_3vI(t) \\ \ddot{v}1(t-D_e) - \ddot{v}1(t) + 2a_3\dot{v}1(t) - 2a_3^2vI(t) \\ (2a_1 + 2a_3^3 - 2a_2a_3)vI(t) + \ddot{\dot{v}}1(t-D_e) - \ddot{\dot{v}}1(t) + 2a_3\ddot{v}1(t) - 2a_3^2\dot{v}1(t) \end{bmatrix}$$

Het zal later blijken dat bij de actieve vering met volledige toestandsterugkoppeling $\eta(t)$ een deel is van de toestandsvector. Er wordt dus teruggekoppeld over $\eta(t)$.

Nu kleeft er aan het gebruik van de Padé-approximatie het nadeel dat deze slechts nauwkeurig is voor signalen $v1(t)$ met een beperkte frequentie-inhoud. Wanneer dus een wegdeksignaal $v1(t)$ optreedt met veel vermogen bij hoge frequenties (bijvoorbeeld een stap) zal de uitgang van de Padé-approximatie $v1(t-D_e)$ geen nauwkeurige representatie zijn van het werkelijke wegdeksignaal aan de achterzijde. Kortom, voor bepaalde wegdekken kunnen er problemen optreden bij de actieve vering met volledige toestandsterugkoppeling. In bijlage B wordt het bovenstaande summier inzichtelijk toegelicht.

2.3. Het voertuigmodel

2.3.1. Het actief geveerde systeem

De bewegingsvergelijkingen van het actief geveerde systeem (figuur 2.1.1.a), waarbij de zwaartekracht is weggelaten daar het dynamisch gedrag rond de statisch ingeveerde stand van het voertuig wordt geanalyseerd, luiden als volgt:

$$\ddot{q}_{af} = -\frac{k_{ff}}{m_f}q_{af} + \frac{f_{sf}}{m_f} + \frac{k_{rf}}{m_f}q_{rf} \quad (2.3.1.1)$$

$$\ddot{q}_{ar} = -\frac{k_{rr}}{m_r}q_{ar} + \frac{f_{sr}}{m_r} + \frac{k_{rf}}{m_r}q_{rf} \quad (2.3.1.2)$$

$$\ddot{q}_{cf} = (f_{61} - af_{81})f_{sf} + (f_{62} - af_{82})f_{sr} \quad (2.3.1.3)$$

$$\ddot{q}_{cr} = (f_{61} + bf_{81})f_{sf} + (f_{62} + bf_{82})f_{sr} \quad (2.3.1.4)$$

waarbij:

$$f_{61} = \frac{-(a+b-c)(b-c)M_c - J}{MJ + (M(b-c)^2 + J)M_c} ; f_{62} = \frac{c(b-c)M_c - J}{MJ + (M(b-c)^2 + J)M_c}$$

$$f_{81} = \frac{(a+b-c)M_c + aM}{MJ + (M(b-c)^2 + J)M_c} ; f_{82} = \frac{-cM_c - bM}{MJ + (M(b-c)^2 + J)M_c}$$

Als uitgebreide toestandskolom wordt nu genomen: $x^T(t) = [x_w^T(t) ; \eta^T(t)]$ met:

$$x_w^T(t) = [(q_{af} - q_{rf})(t); (q_{cf} - q_{rf})(t); (q_{ar} - q_{rf})(t); (q_{cr} - q_{rf})(t); \dot{q}_{af}(t); \dot{q}_{cf}(t); \dot{q}_{ar}(t); \dot{q}_{cr}(t)].$$

Als kolom met actuatoorkrachten wordt genomen: $u(t) = [f_{sf}(t) ; f_{sr}(t)]$. Met behulp van (2.2.3) en (2.3.1.1) tot en met (2.3.1.4) kan nu de volgende systeemvergelijking worden afgeleid:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_w(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B1 \\ B2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} E1 \\ E2 \end{bmatrix} vI(t) ; \begin{bmatrix} x_w(t_0) \\ \eta(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_w \\ \eta \end{bmatrix}_0 \quad (2.3.1.5)$$

waarbij:

$$A11 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_f/m_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_v/m_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; A12 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

A21 = 4*8 nulmatrix ; A22 = A_n ;

$$B1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/m_f & (f_{61}-af_{81}) & 0 & (f_{61}+bf_{81}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (f_{62}-af_{82}) & 1/m_r & (f_{62}+bf_{82}) \end{bmatrix} ; B2 = 4*2nulmatrix ;$$

E1^T = [-1 -1 -1 -1 0 0 0 0] ; E2 = B_n

N.B.: Met klem dient opgemerkt te worden dat (2.3.1.5) geen exacte beschrijving is van het systeem, omdat de Padé-approximatie nu eenmaal niet exact is. Deze beschrijving wordt dan ook alleen gebruikt om de terugkoppelwet, waarbij rekening wordt gehouden met het reeds genoemde delay D_e, te bepalen. De werkelijke systeembeschrijving is als volgt:

$$\dot{x}_w(t) = A_{11}x_w(t) + B_1u(t) + E_wv(t) ; x_w(t_0) = (x_w)_o \quad (2.3.1.6)$$

met:

$$E_w^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; v(t) = \begin{bmatrix} v1(t) \\ v2(t) \end{bmatrix}$$

Om een zo goed mogelijke wegligging en een zo hoog mogelijk comfort te waarborgen, dient de regeling een aantal grootheden binnen de perken te houden, te weten:

- de dynamische bandindrukking voor Δ_{lf}
- de dynamische bandindrukking achter Δ_{lr}
- de relatieve veerweg voor Δ_{sf}
- de relatieve veerweg achter Δ_{sr}
- de verticale versnelling van het chassis \ddot{q}_m in het zwaartepunt
- de dampversnelling van het chassis $\ddot{\phi}$

Deze zes grootheden vormen samen de te regelen uitgangskolom $y^T(t)$:

$$y^T(t) = [\Delta_{lf}(t) ; \Delta_{lr}(t) ; \Delta_{sf}(t) ; \Delta_{sr}(t) ; \ddot{q}_m(t) ; \ddot{\phi}(t)]$$

Deze kolom is te schrijven als een lineaire combinatie van de toestandskolom en de kolom met actuatorkrachten en wel als volgt:

$$y(t) = [C1 \ C2] \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + Du(t) \quad (2.3.1.7)$$

waarbij:

$$C1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad C2 = 6 \times 4 \text{ nulmatrix} ;$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & f_{61} & f_{81} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{62} & f_{82} \end{bmatrix}$$

Tenslotte kan nog een kolom met meetbare grootheden als lineaire combinaties van toestandsgrootheden gedefinieerd worden:

$$z(t) = Mx(t) \quad (2.3.1.8)$$

Samenvattend: het systeem met actieve vering kan beschreven worden door de volgende vergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + EvI(t) & ; & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ z(t) = Mx(t) \end{cases} \quad (2.3.1.9)$$

waarbij:

$$A = \begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} B1 \\ B2 \end{bmatrix} ; \quad E = \begin{bmatrix} E1 \\ E2 \end{bmatrix} ; \quad C = [C1 \quad C2]$$

2.3.2 Het passief geveerde systeem

De systeemvergelijking en uitgangsvergelijking van het passief geveerde systeem (figuur 2.1.1.b) zijn makkelijk af te leiden uit de vergelijkingen (2.3.1.5) en (2.3.1.7) In het passieve geval worden de actuators vervangen door vaste veer-demper combinaties, zodat nu voor de kolom $u(t)$ kan worden geschreven:

$$u(t) = [T1 \quad T2] \begin{bmatrix} x_w(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \quad (2.3.2.1)$$

waarbij:

$$T1 = \begin{bmatrix} -k_{sf} & k_{sf} & 0 & 0 & -b_{sf} & b_{sf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{sr} & k_{sr} & 0 & 0 & -b_{sr} & b_{sr} \end{bmatrix} ; \quad T2 = 2 \times 4 \text{ nulmatrix}$$

Waarvoor vergelijking (2.3.1.5) overgaat in:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_w(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A11+BIT1 & A12+BIT2 \\ A21 & A22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E1 \\ E2 \end{bmatrix} vI(t) ; \quad \begin{bmatrix} x_w(t_0) \\ \eta(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_w \\ \eta \end{bmatrix}_0 \quad (2.3.2.2)$$

en vergelijking (2.3.1.7) overgaat in:

$$y(t) = \begin{bmatrix} C1+DT1 & C2+DT2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \quad (2.3.2.3)$$

De Padé-approximatie is bij het passieve systeem niet aan de orde; het passieve systeem is slechts in de vorm van vergelijking (2.3.2.2) en (2.3.2.3) geschreven, om het gemakkelijk te kunnen vergelijken met het actieve systeem. Dit zal nuttig blijken in paragraaf 3.3.

De werkelijke toestands- en uitgangsvergelijking voor het passieve systeem ontstaan door de Padé-approximatie buiten beschouwing te laten en luiden als volgt:

$$\begin{cases} \dot{x}_w(t) = A_{pw}x_w(t) + E_w v(t) \\ y(t) = C_{pw}x_w(t) \end{cases} \quad (2.3.2.4)$$

met:

$$A_{pw} = A11+B1T1 \quad \text{en} \quad C_{pw} = C1+DT1$$

De polen van het passieve systeem zijn te vinden in bijlage A.

3. De regelstrategie

3.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt allereerst de optimale regelwet voor het algemene, lineaire, constante systeem van vergelijking (2.3.1.9) opgesteld. Daarna zal een onderscheid worden gemaakt tussen beperkte toestandsterugkoppeling en volledige toestandsterugkoppeling. Tenslotte worden de resultaten bekeken voor zowel beperkte als volledige toestandsterugkoppeling, met een "afgeronde stap" als wegdeksignaal.

3.2 De algemene, optimale, continue regelwet

Het systeem van vergelijking (2.3.1.9) zal worden geregeld door lineaire terugkoppeling over de meetbare grootheden:

$$u(t) = -L(t)z(t) \quad (3.2.1)$$

$$\text{ofwel: } u(t) = -L(t)Mx(t) \quad (3.2.2)$$

De primaire eis die aan de regelaar moet worden gesteld is dat de polen van het teruggekoppelde systeem, dus de eigenwaarden van de matrix $(A-BL(t)M)$, in het linkerhalfvlak liggen. Wanneer de rang van de meetbaarheidsmatrix M niet gelijk is aan het aantal toestandsgrootheden in de kolom x , is poolplaatsing onmogelijk. Bovendien is het niet voor elke M mogelijk om het teruggekoppelde systeem stabiel te krijgen. Dit dient voor iedere M apart bekeken te worden. Voordat een optimale regelwet kan worden afgeleid, dient eerst de doelstelling van de regeling te worden geformuleerd. De regeling zal er ten eerste voor moeten zorgen dat de dynamische bandindrukkingen binnen de perken blijven (zie [bijlage C](#) voor afleiding van deze grenswaarden) om een goed contact met het wegdek te waarborgen. Bovendien mogen de wielverplaatsingen ten opzichte van de voertuigbody zowel aan de voor- als aan de achterkant niet zodanig groot zijn, dat de beschikbare veerruimten worden overschreden (grenswaarden: zie [bijlage C](#)). Tenslotte moet de regeling ervoor zorgen dat de verticale versnelling en de dompversnelling van het chassis niet te grote waarden aannemen, zodat een goed comfort gewaarborgd is. Deze laatste eis betekent in feite het beperkt houden van de actuatorkrachten, immers uit vergelijking (2.3.1.7) volgt:

$$\ddot{q}_m = f_{61}f_{sr} + f_{62}f_{sr} \quad (3.2.3)$$

$$\ddot{\phi} = f_{81}f_{sr} + f_{82}f_{sr} \quad (3.2.4)$$

Kortom, de grootheden in de kolom $y(t)$ en de kolom $u(t)$ dienen binnen de perken te blijven. Wiskundig kan deze doelstelling als volgt worden geformuleerd:

Een optimale regelwet zorgt ervoor dat de kostenfunctie J , gedefinieerd door:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (3.2.5)$$

met:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_6 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad ; \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \succ 0$$

wordt geminimaliseerd.

In [3] wordt de optimale regelwet afgeleid voor het systeem (2.3.1.9) en $u(t)$ volgens (3.2.2) en wel voor een oneindig regelinterval ($t_0=0$; $t_f=\infty$), waardoor de terugkoppelmatrix $L(t)$ niet meer tijdsafhankelijk is.

Uit [3, bijlage C] blijkt dat de optimale terugkoppelmatrix L gegeven wordt door de impliciete relatie:

$$L = (D^T Q D + R)^{-1} (D^T Q C + B^T \beta) \chi M^T (M \chi M^T)^{-1} \quad (3.2.6)$$

met als nevenvoorwaarden de Lyapunow vergelijkingen:

$$\beta(A - BLM) + (A - BLM)^T \beta + (C - DLM)^T Q (C - DLM) + M^T L^T R L M = 0 \quad (3.2.7)$$

$$\chi(A - BLM)^T + (A - BLM)\chi + EWE^T + X_0 = 0 \quad (3.2.8)$$

waarbij:

- * β : de functie van Lagrange-multiplicator vervult [3, bijlage C]
- * χ : de positief definitieve autocorrelatiematrix van het wegdeksignaal is [3, bijlage C]
- * $X_0 = x(0) \cdot x^T(0)$. In dit onderzoek wordt steeds $x(0)=0$ genomen, daar de beginvoorwaarden onbekend zijn; $x(0)=0$ geeft de rust-toestand weer.
- * W : scalar die de intensiteit van de impulsfunctie weergeeft. Bij het ontwerpen van de regelaar wordt het excitatiesignaal (afgeleide van het wegdeksignaal) standaard verondersteld. Hier wordt

nu de impuls gebruikt. De op deze manier ontworpen regelaar wordt verondersteld voor alle andere excitatiesignalen eveneens goed te werken. Voor details hieromtrent wordt verwezen naar [3].

Omdat de relatie voor L impliciet is, moet L numeriek met behulp van een iteratief proces worden opgelost. Hierop zal in paragraaf 3.4 nader worden ingegaan.

3.3 Volledige toestandsterugkoppeling

Wanneer de volledige toestand bekend is door metingen en/of reconstructie, kan de volledige toestandskolom worden teruggekoppeld. In de praktijk zorgt dit voor grote problemen. Met behulp van zeer geavanceerde meetapparatuur is het misschien mogelijk om de grootheden $x_w(t)$ direct te meten. De grootheden $\eta(t)$ behorende bij de Padé-approximatie, kunnen echter in geen geval direct worden gemeten. Reconstructie is ook niet mogelijk, omdat $\eta(t)$ het niet-observeerbare deel van de toestandsvector vertegenwoordigt. De kolom $\eta(t)$ moet dus met een snelle rekenmachine berekend worden uit de moeilijk te meten $v_1(t)$. Zoals reeds eerder is opgemerkt, wordt $\eta(t)$ zeer onnauwkeurig bij hoogfrequente $v_1(t)$, zodat in dat geval problemen zullen optreden bij de volledige toestandsterugkoppeling. Daar wegdeksignalen in het algemeen laagfrequent zijn, worden in de praktijk echter niet al te grote moeilijkheden verwacht.

Bij volledige toestandsterugkoppeling neemt de meetbaarheidsmatrix M de gedaante van eenheidsmatrix aan. Daarmee reduceert vergelijking (3.2.6) tot:

$$L = V^{-1}(D^TQC + B^T\beta) \quad (3.3.1)$$

met β de oplossing van de Riccati vergelijking:

$$F^T\beta + \beta F + G - \beta H\beta = 0 \quad (3.3.2)$$

en $V = D^TQD + R$; $V > 0$; $V = V^T$

$$F = A - BV^{-1}D^TQC$$

$$G = C^T(Q - QDV^{-1}DQ)C$$

$$H = BV^{-1}B^T$$

Voor een afleiding van bovenstaande wordt verwezen naar bijlage D.

De oplossing β voor de Riccati vergelijking (3.3.2) bestaat, is uniek en semi-positief definitief als het paar (F, B) stabiliseerbaar en het paar (F, C) detecteerbaar is. Dit is hier het geval, want alle

onregelbare modes van F zijn reeds stabiel (voorwaarde voor stabiliseerbaarheid) en alle instabiele modes van F zijn observeerbaar (voorwaarde voor detecteerbaarheid). Dit blijkt uit berekeningen met MATLAB.

Om tot een volledige terugkoppelmatrix te komen, moet nog een keuze gemaakt worden voor de parameters in de weegmatrices Q en R (paragraaf 3.2). Die keuzes luiden als volgt:

$$q_1=10e13 ; q_2=10e13 ; q_3=10e12 ; q_4=10e12 ; q_5=0 ; q_6=0$$

$$r_1=1 ; r_2=1$$

Voor q_5 en q_6 is nadrukkelijk de waarde nul gekozen, omdat \ddot{q}_m en $\ddot{\phi}$ ook al indirect gewogen worden door r_1 en r_2 . In bijlage E wordt dit nader toegelicht. De met de vergelijkingen (3.3.1) en (3.3.2) gevonden terugkoppelmatrix L_{vol} en de polen van het volledig teruggekoppelde systeem zijn te vinden in bijlage A.

Wanneer $L_{vol} = -[T_1 \ T_2]$ (zie vergelijking (2.3.2.1)) is de dynamica van het volledig teruggekoppelde systeem precies gelijk aan de dynamica van het passieve systeem.

De volgende vraag is nu gerezen: Welke keuzes voor Q en R dienen te worden gedaan, zodat de optimale regelwet de terugkoppelmatrix $L_{vol} = -[T_1 \ T_2]$ levert? In bijlage F wordt een methode beschreven die op deze vraag een antwoord probeert te geven, wat overigens helaas niet is gelukt.

3.4 Beperkte toestandsterugkoppeling

Zoals al eerder is opgemerkt, is het in de praktijk erg moeilijk en duur om te beschikken over de gehele toestandskolom. Beperkte toestandsterugkoppeling is dan een goedkoper alternatief. In het geval dat hier zal worden bekeken, zijn de volgende grootheden te meten:

$\Delta_{sf} ; \Delta_{sr} ; \dot{\Delta}_{sf} ; \dot{\Delta}_{sr}$, dus de relatieve verplaatsingen en snelheden van de assen ten opzichte van het chassis.

De meetbaarheidsmatrix M neemt nu de volgende gedaante aan:

$$M = [M_1 \ M_2]$$

met:

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_2 = 4 \times 4 \text{ nulmatrix}$$

Uit de literatuur is bekend dat, wanneer het paar (A,B) stabiliseerbaar is en het paar (A,M) detecteerbaar is, er altijd een dynamische, stabiliserende regelaar te vinden is [4]. Bij statische terugkoppeling, zoals hier het geval is, is echter niet gegarandeerd dat er een statische, stabiliserende regelaar te vinden is. Dit dient per geval te worden bekeken.

Aangezien er beperkte terugkoppelmatrices te verzinnen zijn (bijvoorbeeld $L = L_{vol} \cdot M^T$) die ervoor zorgen dat de eigenwaarden van de teruggekoppelde systeemmatrix A-BLM in het linkerhalfvlak liggen, blijkt er voor dit geval een niet-lege verzameling \mathcal{F} van stabiliserende beperkte terugkoppelmatrices te bestaan.

De optimale beperkte terugkoppelmatrix L_{bep} dient iteratief te worden opgelost uit de vergelijkingen (3.2.6), (3.2.7) en (3.2.8). Hierbij hebben de vergelijkingen (3.2.7) en (3.2.8) de vorm van Lyapunov vergelijkingen:

$$\beta(A-BLM) + (A-BLM)^T \beta + (C-DLM)^T Q (C-DLM) + M^T L^T R L M = 0 \quad (3.2.7)$$

$$\chi(A-BLM)^T + (A-BLM) \chi + EWE^T + X_0 = 0 \quad (3.2.8)$$

Uit de algemene oplosbaarheidstheorie van Lyapunov vergelijkingen volgt dat deze vergelijkingen een unieke oplossing hebben, wanneer A-BLM asymptotisch stabiel is [5]. In [3] wordt bovendien geëist dat β en χ positief definitief zijn, waardoor in bovenstaande vergelijkingen moet gelden:

$$1) \text{ real}\{\text{eig}(A-BLM)\} < 0 \quad (3.4.1)$$

$$2) -\{(C-DLM)^T Q (C-DLM) + M^T L^T R L M\} > 0 \quad (3.4.2)$$

$$3) -\{EWE^T + X_0\} > 0 \quad (3.4.3)$$

Gedurende de iteratieloop moet steeds aan deze drie voorwaarden zijn voldaan om een oplossing voor (3.2.7) en (3.2.8) te waarborgen.

In [6] wordt aangetoond dat wanneer er een niet-lege verzameling \mathcal{F} van stabiliserende beperkte

terugkoppelmatrices bestaat, er een terugkoppelmatrix L_{bep} te vinden is in \mathcal{F} , die het integraalcriterium (3.2.5) minimaliseert.

In [6] wordt tevens een iteratief algoritme beschreven; het duale Levine-Athans algoritme. Uitgaande van een stabiliserende beginschatting voor L_{bep} (noodzakelijk!), zou dit algoritme gedurende elke iteratiestap i een stabiliserende beperkte terugkoppelmatrix $L_{bep}(i)$ leveren. De waarde van het integraalcriterium J zou tijdens de iteratie monotoon dalen en de convergentie van het algoritme zou zeer hoog zijn.

Wanneer dit algoritme wordt toegepast bij het systeem dat in dit onderzoek wordt beschouwd, blijken er tijdens de iteratie grote moeilijkheden op te treden; het algoritme levert na een aantal stappen een beperkte terugkoppelmatrix die niet in \mathcal{F} ligt, ofwel: het teruggekoppelde systeem wordt instabiel. Eenmaal in het instabiele gebied gekomen, divergeert het algoritme. Dit is opmerkelijk, daar de auteur van [6] nog geen voorbeelden is tegengekomen waarbij het algoritme niet werkt. Er is daarom gezocht naar een ander iteratie-algoritme.

Een werkend, zij het langzaam convergerend, algoritme is gevonden in de vorm van een successieve substitutie met een iteratieslag afhankelijke parameter $\theta(i)$. De van belang zijnde vergelijkingen bij de iteratie zijn hieronder nogmaals weergegeven:

$$L = (D^T Q D + R)^{-1} (D^T Q C + B^T \beta) \chi M^T (M \chi M^T)^{-1} \quad (3.2.6)$$

$$\beta (A - BLM) + (A - BLM)^T \beta + (C - DLM)^T Q (C - DLM) + M^T L^T R L M = 0 \quad (3.2.7)$$

$$\chi (A - BLM)^T + (A - BLM) \chi + EWE^T + X_0 = 0 \quad (3.2.8)$$

Het algoritme gaat als volgt:

1) Er wordt gestart met een stabiliserende beperkte terugkoppelmatrix $L_{bep}(0)$, bijvoorbeeld

$$L_{bep}(0) = L_{vol} \cdot M^T \quad (3.4.4)$$

Voor elke stap i wordt nu het volgende gedaan:

2) Bereken $\chi(i)$ uit 3.2.8 met behulp van $L_{bep}(i)$.

3) Bereken $\beta(i)$ uit 3.2.7 met behulp van $L_{bep}(i)$ en $\chi(i)$.

4) Bereken $L_{ster}(i)$ uit 3.2.6 met behulp van $\beta(i)$ en $\chi(i)$.

5) Bereken $L_{bep}(i+1)$ met behulp van:

$$L_{bep}(i+1) = L_{bep}(i) + \theta(i) \cdot [L_{ster}(i) - L_{bep}(i)] \quad (3.4.5)$$

6) Herhaal vanaf 2) zolang geldt:

$$\|L_{ster}(i) - L_{bep}(i)\|_{\infty} > 0.01 \cdot \|L_{bep}(i)\|_{\infty} \quad (3.4.6)$$

Om te voorkomen dat het algoritme een niet-stabiliserende $L_{bep}(i)$ uitrekent, dient de parameter

$\theta(i)$ gedurende de iteratie aangepast te worden. Er wordt gestart met $\theta(0)=0.1$. Zodra de waarde van het integraalcriterium J toeneemt, dient θ te worden gehalveerd, waarna de iteratie wordt voortgezet. Zou θ niet worden gehalveerd, dan treedt divergentie op en rekent het algoritme een $L_{bep}(i)$ uit die niet tot \mathcal{F} behoort. De beschreven methode convergeert vrijwel altijd, zij het zeer langzaam. Voor verdere details wordt verwezen naar bijlage Q, programma "tkmatrix".

Wanneer bij de afleiding van de beperkte terugkoppelmatrix dezelfde weegmatrices Q en R worden gekozen als in het geval van volledige toestandsterugkoppeling, worden in beide gevallen dezelfde eisen gesteld aan de uitgangskolom $y(t)$ en de kolom met actuatorkrachten $u(t)$. Het hierboven beschreven algoritme zal dan ook een zodanige terugkoppelmatrix L_{bep} leveren, dat het dynamisch gedrag van het beperkt teruggekoppeld systeem het meeste lijkt op dat van het volledig teruggekoppeld systeem in de zin van het integraalcriterium 3.2.5.

De gevonden terugkoppelmatrix L_{bep} en de polen van het beperkt teruggekoppeld systeem zijn te vinden in bijlage A. Een bespreking van simulaties met het passieve systeem en beide actieve systemen (met dezelfde weegmatrices!) is te vinden in de volgende paragraaf.

3.5 Simulaties

In deze paragraaf worden de resultaten van simulaties met het passieve, het volledig teruggekoppelde en het beperkt teruggekoppelde systeem geanalyseerd. Het beschouwde wegdeksignaal is een afgeronde stap, waarvan de hoogte zodanig is gekozen dat de veerweg achter bij het passieve systeem tegen de ondergrens zit. Betreffende afgeronde stap is bovendien zodanig, dat de afgeleide van het wegdeksignaal, $v_1(t)$, geen al te grote energie-inhoud heeft bij hoge frequenties. Dit om al te grote problemen bij de volledige toestandsterugkoppeling te voorkomen (bijlage G).

In bijlage H, figuren H.1 tot en met H.6, zijn de responsies van de te regelen grootheden weergegeven. De volgende punten vallen daarbij op:

- Het volledig en beperkt teruggekoppelde systeem dempen voor alle uitgangen sneller uit dan het passieve systeem .
- Alle drie de systemen blijven binnen de grenswaarden.
- In figuur H.2 en H.3 is duidelijk te zien dat bij de actieve systemen al een regelactie plaatsvindt, voordat het achterwiel daadwerkelijk wordt aangestoten. Dit is de verdienste van

het meenemen van de dode tijd in het ontwerp van de regelaar.

- Uit figuur H.2 blijkt dat de beperkte toestandsterugkoppeling de grootste positieve piek heeft, waardoor het contact tussen wegdek en achterwiel tijdelijk minder goed is.
- Uit figuur H.4 blijkt dat de beide actieve systemen een grote verbetering geven voor de veerweg achter: de amplitudes zijn een stuk kleiner en de demping een stuk groter.
- Uit de figuren H.1 en H.3 blijkt dat de responsies aan de voorzijde bij het volledig teruggekoppelde systeem het beste zijn. De responsies van het beperkt teruggekoppelde systeem en het passieve systeem zijn gelijkwaardig, maar beide systemen zijn minder goed dan het volledig teruggekoppelde systeem.
- Met betrekking tot de verticale versnelling (figuur H.5) blijkt dat beide actieve veringen sterk aan elkaar gewaagd zijn. Beide systemen vertonen kleinere amplitudes dan het passieve systeem.
- Uit figuur H.6 blijkt dat door toepassing van een actief veersysteem de pieken in de dompversnelling sterk worden gereduceerd, waardoor een hoger comfort verkregen wordt.

De algemene conclusie is nu dat bij betreffende afgeronde stap het volledig teruggekoppelde systeem het beste werkt: het vertoont de laagste pieken en de grootste demping. Het beperkt teruggekoppelde systeem werkt iets minder goed dan het volledig teruggekoppelde systeem, maar vertoont voor alle uitgangen, met uitzondering van de bandindrukking achter, een betere responsie dan het passieve systeem. Met name het verminderen van de dompversnellingen door toepassing van de beperkte toestandsterugkoppeling, leidt tot de conclusie dat deze vorm van terugkoppeling wel degelijk perspectieven biedt. In het volgende hoofdstuk wordt getracht het beperkt teruggekoppelde systeem te verbeteren.

4 Twee methoden ter verbetering van de beperkte toestandsterugkoppeling

4.1 Inleiding

Uit de resultaten van paragraaf 3.5 bleek al dat beperkte toestandsterugkoppeling een verbetering gaf ten opzichte van het passief geveerde systeem, met name wat betreft de dompversnelling. Het volledig teruggekoppelde systeem bleek echter nóg beter te werken.

In dit hoofdstuk zal nu worden onderzocht of het mogelijk is het gedrag van het beperkt teruggekoppelde systeem beter overeen te laten stemmen met dat van het volledig teruggekoppelde systeem. Het verminderen van de dompversnelling, dus het verhogen van het comfort, heeft daarbij de hoogste prioriteit; de andere te regelen grootheden worden beschouwd als randvoorwaarden waarvan de grenzen niet mogen worden overschreden. In de paragrafen 4.2 en 4.3 worden achtereenvolgens twee methoden besproken, waarmee getracht wordt dit te bewerkstelligen.

4.2 Gewogen least squares op de volledige terugkoppelmatrix

De systeemmatrix van het volledig teruggekoppelde systeem A_{vol} , respectievelijk van het beperkt teruggekoppelde systeem A_{bep} , zien er als volgt uit:

$$A_{vol} = A - BL_{vol} \quad (4.2.1)$$

$$A_{bep} = A - BL_{bep}M \quad (4.2.2)$$

De dynamica van beide systemen is hetzelfde wanneer geldt $A_{vol} = A_{bep}$, dus wanneer:

$$L_{vol} = L_{bep}M \quad (4.2.3)$$

Er is echter geen enkele L_{bep} te vinden waarvoor (4.2.3) geldt: de meetbaarheidsmatrix M is immers niet inverteerbaar. Het dynamisch gedrag van het beperkt teruggekoppelde systeem kan dus nooit gelijk worden gemaakt aan het gedrag van het volledig teruggekoppelde systeem; er is hoogstens een zekere benadering mogelijk.

De gedachte ter bepaling van de beste beperkte terugkoppelmatrix is nu als volgt: wanneer de dominante polen van het beperkt teruggekoppelde systeem sterk overeen komen met die van het volledig teruggekoppelde systeem, leidt dit tot een sterk gelijke dynamica van beide systemen.

Een benaderingsoplossing voor dit probleem kan worden verkregen door toepassing van een

gewogen least squares methode: de elementen van $Lvol$ die sterk bepalend zijn voor de dominante polen van het teruggekoppelde systeem worden daarbij hoog gewogen.

Om te komen tot een gewogen least squares benadering voor de beperkte terugkoppelmatrix moet nu achtereenvolgens het volgende worden gedaan:

- 1) Transponeer de matrices links en rechts van het gelijk-teken in vergelijking (4.2.3):

$$Lvol^T = M^T Lbep^T \quad (4.2.4)$$

- 2) Zet de kolommen van $Lvol^T$ onder elkaar in de kolom $lvol$ (dimensie 24×1).
- 3) Zet de kolommen van $Lbep^T$ onder elkaar in de kolom $lbep$ (dimensie 8×1).
- 4) Voer de meetbaarheidsmatrix M^* in waarvoor geldt:

$$M^* = \begin{bmatrix} M^T & 0_{12 \times 4} \\ 0_{12 \times 4} & M^T \end{bmatrix} \quad (\text{dimensie } 24 \times 8)$$

- 5) Schrijf vergelijking (4.2.4) om tot:

$$lvol = M^* \cdot lbep. \quad (4.2.5)$$

- 6) Voer een 24×24 diagonale weegmatrix W in, waarmee vergelijking (4.2.5) verandert in:

$$W \cdot lvol = W \cdot M^* \cdot lbep \quad (4.2.6)$$

Het afleiden van W wordt nader toegelicht in bijlage I.

- 7) Uit (4.2.6) is voor $lbep$ een benaderingsoplossing $lbep_{gewogen}$ te verkrijgen:

$$lbep_{gewogen} = (M^{*T} W^T W M^*)^{-1} M^{*T} W^T W \cdot lvol \quad (4.2.7)$$

- 8) Herschik de elementen in $lbep_{gewogen}$, zodat de uiteindelijke 2×4 terugkoppelmatrix $Lbep_{gewogen}$ ontstaat.

In bijlage A is deze terugkoppelmatrix weergegeven. Tevens zijn de bijbehorende polen van het teruggekoppelde systeem vermeld. Het blijkt dat de dominante polen van het systeem met $Lbep_{gewogen}$ meer lijken op de dominante polen van het volledig teruggekoppelde systeem, dan de polen van het systeem met de eerder gevonden terugkoppelmatrix $Lbep$ (zie bijlage A).

Er is een simulatie uitgevoerd met de terugkoppelmatrix $Lbep_{gewogen}$, waarbij de eerder vermelde afgeronde stap als excitatiesignaal diende. De resultaten voor de dompversnelling zijn weergegeven in bijlage J, figuur J.1.

Het blijkt dat het beperkt teruggekoppelde systeem met $Lbep_{gewogen}$ veel grotere amplitudes teweegbrengt en lagere demping heeft dan het passieve systeem. Wanneer de overdrachten naar de dompversnelling voor het volledig teruggekoppelde en het beperkt teruggekoppelde systeem

met L_{bep} gewogen, voor een excitatie aan de voor- respectievelijk achterwielen, met elkaar worden vergeleken, blijkt de versterking in het van belang zijnde frequentiegebied (0 tot 15 Hz) bij het beperkt teruggekoppelde systeem dan ook veel hoger te liggen dan bij het volledig teruggekoppelde systeem (bijlage J, figuur J.2 en J.3).

Er kan dan ook worden geconcludeerd, dat met de gewogen least squares methode op de volledige terugkoppelmatrix, niet het gewenste resultaat kan worden behaald in het van belang zijnde frequentiegebied.

4.3 Gewogen least squares op de uitgangen

In deze paragraaf wordt een tweede methode besproken ter verbetering van de beperkte toestandsterugkoppeling. De basisgedachte achter deze methode is de volgende: voer een simulatie uit met het volledig teruggekoppelde systeem en probeer vervolgens door middel van een least squares methode op de te regelen uitgangen van het volledig teruggekoppelde systeem een beperkte terugkoppelmatrix te vinden, waarbij de te regelen uitgangen van het beperkt teruggekoppelde systeem zo goed mogelijk overeenstemmen met die van het volledig teruggekoppeld systeem.

Er wordt een simulatie uitgevoerd met de reeds eerder gebruikte stap als wegdeksignaal. MATLAB berekent daarbij een $6 \times N$ matrix y_{vol} met geregelde uitgangen en een $12 \times N$ matrix x_{vol} met toestanden, beide met betrekking tot het volledig teruggekoppelde systeem. Hierbij is $N=90$ het aantal discrete tijdstippen binen het bekeken tijdsinterval $[0, T=1]$.

Voor het volledig teruggekoppelde systeem geldt:

$$y_{vol} = (C - DL_{vol})x_{vol} \quad (4.3.1)$$

Voor het beperkt teruggekoppelde systeem geldt:

$$y_{bep} = (C - DL_{bep}M)x_{bep} \quad (4.3.2)$$

Er moet nu gezocht worden naar een terugkoppelmatrix L_{bep} die er voor zorgt dat y_{bep} en y_{vol} zo goed mogelijk overeenstemmen. Ofwel: er dient een benaderingsoplossing voor L_{bep} gevonden te worden uit de vergelijking:

$$y_{vol} = (C - DL_{bep}M)x_{vol} \quad (4.3.3)$$

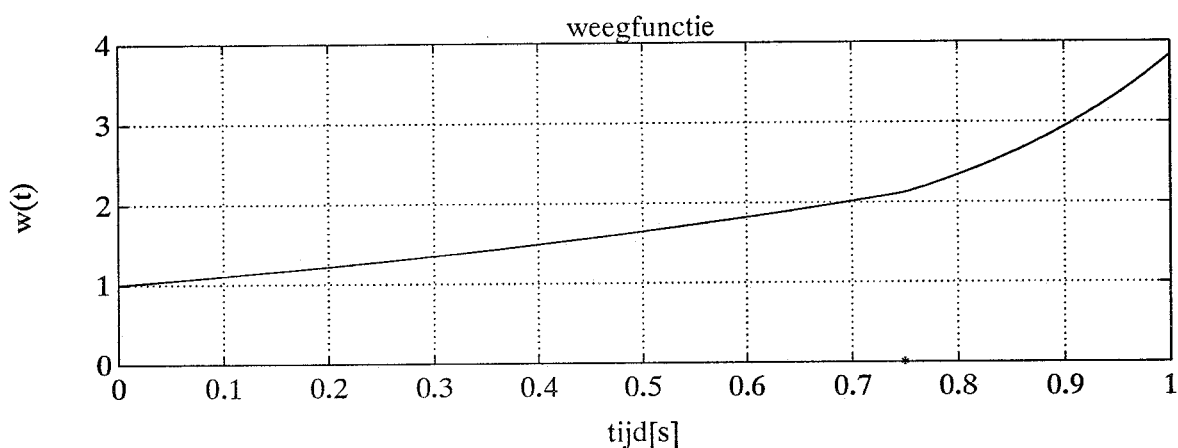
De beste benadering in least squares zin luidt dan:

$$L_{bep} = -(D^T D)^{-1} D^T (y_{vol} - Cx_{vol})x_{vol}^T M^T (Mx_{vol} \cdot x_{vol}^T M^T)^{-1} \quad (4.3.4)$$

Deze L_{bep} blijkt echter aanleiding te geven tot instabiele polen!

Een oplossing voor dit probleem wordt gevonden door het invoeren van een weegfunctie $w(t)$, die de te regelen uitgangen naar het einde van het tijdsinterval toe een hoger gewicht toekent, waardoor het beperkt teruggekoppelde systeem als het ware wordt gedwongen om (evenals het volledig teruggekoppeld systeem) uit te dempen.

Een geschikte weegfunctie blijkt de combinatie van twee e-machten volgens figuur 4.3.1.



figuur 4.3.1: Weegfunctie $w(t)$

$$w(t) = e^{at} \text{ voor } t \in [0, \text{twissel}] ; w(t) = (e^{a \cdot \text{twissel}} - 1) + e^{b \cdot (t - \text{twissel})} \text{ voor } t \in (\text{twissel}, T]$$

(in deze figuur: $\text{twissel} = 0.75$; $T = 1$)

Weegfunctie $w(t)$ wordt bepaald door eveneens N discrete tijdstippen. Deze N elementen vormen samen de elementen van de diagonaalmatrix W ($N \times N$). Door vergelijking (4.3.1) links en rechts van het gelijk-teken te transponeren en voor te vermenigvuldigen met W wordt aan de te regelen uitgangen op elk discreet tijdstip een bepaald gewicht $w(t)$ toegekend. De volgende vergelijking ontstaat dan:

$$W y_{vol}^T = W x_{vol}^T (C - D L_{bep} M)^T \quad (4.3.5)$$

De beste benadering voor L_{bep} in gewogen least squares zin luidt nu:

$$L_{bep} = - (D^T D)^{-1} D^T (y_{vol} - C x_{vol}) W W^T x_{vol}^T M^T (M x_{vol} W^T W x_{vol}^T M^T)^{-1} \quad (4.3.6)$$

Het blijkt nu dat de keuze van de parameters twissel , a en b sterk bepalend is voor de pieken in de te regelen uitgangen van het beperkt teruggekoppelde systeem. Deze parameters dienen zodanig gekozen te worden, dat de pieken in de te regelen uitgangen, met name in de

dompversnelling, zo klein mogelijk zijn.

Elke parameter afzonderlijk wordt nu over een bepaald gebied gevarieerd, waarbij de overige constant worden gehouden. Voor elke combinatie van parameters wordt een terugkoppelmatrix L_{bep} berekend, waarmee een simulatie wordt uitgevoerd. De pieken van de te regelen grootheden worden nu bekeken als functie van de parameters. Dit is weergegeven in bijlage K, figuren K.1, K.2 en K.3.

Uitgaande van deze figuren en onder de randvoorwaarde dat het beperkt teruggekoppelde systeem minstens zo veel demping heeft als het passieve systeem, lijkt $\text{twissel}=0.75$, $a=5$ en $b=30$ een verstandige keuze. Met name de dompversnelling vertoont bij deze keuze slechts geringe pieken. De uiteindelijk gevonden terugkoppelmatrix L_{bepopt} is gegeven in bijlage A, evenals de polen van het bijbehorende teruggekoppelde systeem. Simulaties met betreffende terugkoppelmatrix L_{bepopt} worden besproken in hoofdstuk 5.

N.B.: Door te kiezen $\text{twissel}=0.75$, $a=19$ en $b=30$, wordt een zodanige terugkoppelmatrix L_{polgeli} gevonden dat de dominante polen van het beperkt teruggekoppelde systeem zeer sterk lijken op die van het volledig teruggekoppelde systeem (bijlage A). Toch is de dompversnelling van het beperkt teruggekoppelde systeem veel slechter dan die van het volledig teruggekoppelde systeem, bij de afgeronde stap als wegdeksignaal (bijlage L, figuur L.1). Ook hier is dit te verklaren aan de hand van de overdrachtsfuncties (bijlage L, figuur L.2 en L.3): de versterking van het beperkt teruggekoppelde systeem is in het van belang zijnde frequentiegebied (0 tot 15 Hz) veel groter dan die van het volledig teruggekoppelde systeem.

5. Vergelijking van het passieve, het volledig teruggekoppelde en het beperkt teruggekoppelde systeem

5.1 Inleiding

In dit hoofdstuk worden de simulaties geanalyseerd die zijn uitgevoerd met het passieve systeem, het volledig teruggekoppelde systeem en het beperkt teruggekoppelde systeem met de terugkoppelmatrix van vergelijking (4.3.6). Achtereenvolgens worden de afgeronde stap en diverse "rounded pulsen" als wegdeksignalen genomen.

5.2 De afgeronde stap als wegdeksignaal

Als eerste wordt een simulatie uitgevoerd met de afgeronde stap (bijlage G) als wegdeksignaal. De resultaten zijn weergegeven in de figuren M.1 tot en met M.6 van bijlage M. De minimale en maximale pieken in de te regelen uitgangen voor de drie systemen, zijn weergegeven in onderstaande tabel:

		$q_{ar}-q_{rr}[m]$	$q_{ar}-q_{rr}[m]$	$q_{er}-q_{ar}[m]$	$q_{er}-q_{ar}[m]$	$\ddot{q}_m[m/s^2]$	$\ddot{\phi}[rad/s^2]$
passief	max	0.0141	0.0118	0.0315	0.0558	11.5152	6.1858
	min	-0.0317	-0.0264	-0.0567	-0.0927	-6.4692	-5.0308
volledig	max	0.0065	0.0104	0.0024	0.0198	9.3878	2.7531
	min	-0.0254	-0.0179	-0.0703	-0.0622	-3.0611	-3.5656
beperkt	max	0.0142	0.0190	0.0192	0.0288	10.8878	3.8474
	min	-0.0346	-0.0213	-0.0600	-0.0514	-4.8267	-2.6522

Tabel 5.2.1

Bij de genoemde figuren worden de volgende opvallende aspecten geconstateerd:

- Alle drie de systemen blijven binnen de grenswaarden.
- De actieve systemen vertonen voor alle te regelen uitgangen een grotere demping dan het

passieve systeem.

- Uit figuur M.2 blijkt dat de dynamische bandindrukking aan de achterkant een nogal wild gedrag vertoont bij de beperkte toestandsterugkoppeling; de wegligging is daardoor iets minder goed dan in het passieve geval.
- Uit figuur M.4 blijkt dat de actieve systemen met betrekking tot de veerweg achter, een grote verbetering geven ten opzichte van het passieve systeem; de pieken zijn veel lager, de demping groter.
- Uit figuur M.5 blijkt dat het beperkt teruggekoppelde systeem en het passieve systeem een ongeveer even grote maximale piek hebben; de maximale piek bij volledige terugkoppeling is circa 20% kleiner.
- Uit figuur M.6 blijkt dat de actieve systemen een zeer grote reductie in de dompversnelling bewerkstelligen: 40 à 45%. Bovendien kan gesteld worden dat het beperkt teruggekoppelde systeem even goed is als het volledig teruggekoppelde systeem: de maximale absolute waarde van $\ddot{\phi}$ is voor het beperkt teruggekoppeld systeem weliswaar 8% groter, maar bij het volledig teruggekoppelde systeem blijkt de dompversnelling drie "grote" pieken te vertonen tegenover het beperkt teruggekoppelde systeem twee "grote" pieken.

De algemene conclusies bij deze figuren luiden nu als volgt:

- Ten aanzien van de dompversnelling, dus het comfort, zijn het beperkt en het volledig teruggekoppelde systeem even goed; voor alle andere te regelen uitgangen is het volledig teruggekoppelde systeem net iets beter dan het beperkt teruggekoppelde systeem.
- Het beperkt teruggekoppelde systeem betekent, met name ten aanzien van de veerweg achter en de dompversnelling, een grote verbetering van het dynamisch gedrag.

N.B.: Deze conclusies dienen niet gegeneraliseerd te worden; ze hebben slechts betrekking op de afgeronde stap als wegdeksignaal!

5.3 De rounded pulse als wegdeksignaal.

In bijlage N is de vorm van de rounded pulse weergegeven. In de tabel onder figuur N.1 zijn de combinaties van f_a en Z_{max} weergegeven, waarbij het passieve systeem tegen één van zijn grenzen loopt. Er zijn simulaties uitgevoerd voor alle in deze tabel weergegeven combinaties (f_a, Z_{max}). De waarden van de pieken in de te regelen uitgangen van het passieve systeem en de beide actieve systemen, zijn weergegeven in de figuren O.1 tot en met O.8 van bijlage O.

In deze figuren zijn de volgende aspecten de meest opvallende:

- Bij $f_a=4.57$ en $f_a=5.71$ wordt bij de beperkte toestandsterugkoppeling de grens voor de maximale banduitvering achter overschreden. Dit betekent dat het achterwiel tijdelijk los is van het wegdek!
- Uit de figuren O.5 en O.6 blijkt dat bij laagfrequente rounded pulsen een grote reductie optreedt in de veerwegen achter bij de actieve systemen; het volledig teruggekoppelde systeem is daarbij iets beter dan het beperkt teruggekoppelde systeem.
- Uit figuur O.7 blijkt dat het beperkt teruggekoppelde systeem en het passieve systeem ten aanzien van de verticale versnelling van het chassis even goed zijn; het volledig teruggekoppelde systeem is veruit het slechtste vanaf $f_a=5$.
- Uit figuur O.8 blijkt dat het beperkt teruggekoppelde systeem een sterke reductie in dompversnelling teweegbrengt voor laagfrequente rounded pulsen; voor hoogfrequente rounded pulsen is het gedrag van het passieve systeem en het beperkt teruggekoppelde systeem gelijkwaardig. Ook uit deze figuur blijkt dat de volledige toestandsterugkoppeling bij waarden van f_a groter dan circa 5 veruit het slechtste resultaat geeft.

De algemene conclusie bij de rounded pulsen als wegdeksignaal luidt als volgt:

Het toepassen van het beperkt teruggekoppeld systeem zou met name met betrekking tot veerwegen achter en dompversnelling een grote verbetering teweegbrengen, ware het niet dat in het gebied rond $f_a=5$ de grens voor de banduitvering achter wordt overschreden.

Het toepassen van de volledige toestandsterugkoppeling is niet wenselijk, omdat de dompversnelling te groot wordt bij hoogfrequente ingangssignalen.

5.4 De overdrachten naar de dompversnelling

In bijlage P figuur P.1 en P.2 zijn de overdrachten van q_{rr} respectievelijk q_{rr} naar $\ddot{\phi}$ weergegeven. Uit deze figuren blijkt dat tot ongeveer 10 Hz beide actieve systemen beter functioneren dan het passieve systeem. Vanaf 10 Hz is het volledig teruggekoppelde systeem een stuk slechter dan beide andere systemen. Dit is in overeenstemming met de resultaten in paragraaf 5.3.

Het beperkt teruggekoppelde systeem lijkt in het van belang zijnde frequentiegebied (laagfrequente signalen; voor de hier bekeken signalen tussen circa 0 en 15 Hz) gemiddeld de beste resultaten te geven ten aanzien van het comfort, dit blijkt met name uit figuur P.1.

6. Conclusies:

- 1) Wanneer dezelfde weegmatrices Q en R worden gekozen zowel bij afleiding van de volledige terugkoppelmatrix als bij afleiding van de beperkte terugkoppelmatrix, vertoont het betreffende volledig teruggekoppelde systeem een beter dynamisch gedrag dan het beperkt teruggekoppelde systeem, in het geval dat als wegdeksignaal een afgeronde stap wordt genomen. De pieken in de dompversnelling zijn bij de beperkte toestandsterugkoppeling groter dan bij de volledige toestandsterugkoppeling. Beide actieve systemen zijn ten opzichte van het passieve systeem als beter te kwalificeren.
- 2) Door middel van een least squares methode op de uitgangen, kan een beperkte terugkoppelmatrix L bepaald worden, waarbij (met de afgeronde stap als wegdek) het comfort bij toepassing van L bepaald even goed is als bij het volledig teruggekoppelde systeem. De wegligging aan de achterkant is echter minder goed. Beide actieve systemen vertonen in het geheel toch een beter dynamisch gedrag dan het passieve systeem.
- 3) Wanneer verschillende rounded pulsen (met f_a tussen 0 en 50) als wegdeksignaal worden genomen, levert het beperkt teruggekoppelde systeem, gemiddeld beschouwd over het bekeken frequentiegebied, het hoogste comfort. Bij een rounded pulse met f_a in de buurt van 5 gaat echter het contact van het achterwiel met het wegdek verloren, wat niet te aanvaarden is.
- 4) Het is niet eenduidig te zeggen welk van de drie systemen het beste is. Ten eerste is dit zeer sterk afhankelijk van het vermogensspectrum van het wegdeksignaal. Ten tweede is voor een bepaald wegdeksignaal niet altijd eenduidig één systeem aan te wijzen, waarbij alle van belang zijnde uitgangen het beste zijn.
- 5) Het is niet gelukt om zodanige weegmatrices Q en R te bepalen, die ertoe leiden dat een volledige terugkoppelmatrix wordt bepaald, waarbij het volledig teruggekoppelde systeem hetzelfde dynamisch gedrag vertoont als het passieve systeem.
- 6) De methode waarbij getracht wordt de polen van het beperkt teruggekoppelde systeem zo goed mogelijk gelijk te krijgen aan de polen van het volledig teruggekoppelde systeem is niet er succesvol gebleken.

7. Aanbevelingen:

1) In de praktijk zijn de versnellingen van de assen en het chassis makkelijker te meten dan de relatieve snelheden tussen de assen en het chassis. De aanbeveling is nu te onderzoeken wat voor mogelijkheden terugkoppeling van relatieve verplaatsingen en absolute versnellingen biedt. Bovendien kan onderzocht worden welke rol integratoren en differentiatoren kunnen spelen bij toepassing van beperkte toestandsterugkoppeling.

2) Het iteratie-algoritme dat gebruikt wordt om tot een beperkte terugkoppelmatrix te komen die het integraalcriterium minimaliseert, convergeert zeer langzaam. Wanneer een sneller iteratief schema gevonden kan worden, is het veel gemakkelijker om te analyseren wat de invloed van verandering van de weegmatrices is op de terugkoppelmatrix en het dynamische gedrag van het teruggekoppelde systeem.

3) Aanbevelingswaardig is ook het zoeken naar een werkende methode om de weegmatrices Q en R te bepalen, die een terugkoppelmatrix voortbrengen waarbij het volledig teruggekoppelde systeem hetzelfde is als het passieve systeem. Het is dan bewezen dat er een volledig teruggekoppeld systeem is, dat hetzelfde gedrag heeft als het passieve systeem.

4) Omdat de methode waarbij getracht wordt de polen van het beperkt teruggekoppelde systeem zo goed mogelijk gelijk te krijgen aan de polen van het volledig teruggekoppelde systeem niet erg succesvol is gebleken, dient er gezocht te worden naar een andere methode. Bijvoorbeeld een methode waarbij de overdrachtsfuncties van het volledig en het beperkt teruggekoppelde systeem zo goed mogelijk overeenstemmen. Twee benaderingen verdienen hierbij de aandacht:

I) Probeer de overdrachtsfunctie van het beperkt teruggekoppelde systeem zo goed mogelijk te fitten op die van het volledig teruggekoppelde systeem in de buurt van de gedempte eigenfrequenties van het volledig teruggekoppelde systeem.

II) Tracht beide overdrachtsfuncties zo goed mogelijk op elkaar te krijgen in het frequentiegebied tussen 0 en 15 Hz, de in de praktijk van belang zijnde frequenties in de wegdeksignalen.

Literatuuropgave

[1] Crolla, D. and Abdel-Hady, M.

Active suspension control: optimal performance comparisons using control laws applied to a full vehicle model.

Vehicle System Dynamics, Vol. 20, 1991, pp. 107-120.

[2] Muijderman, H.

Optimale regeling van een voertuigvering, rekening houdend met de tijdsvertraging tussen voor- en achterwiel excitatie.

Rapport WFW 90.038, Technische Universiteit Eindhoven, 1990.

[3] Rademaker, C.W.

Actieve regeling van een voertuigvering door toepassing van beperkte toestandsterugkoppeling.

Rapport WFW 92.010, Technische Universiteit Eindhoven, 1992.

[4] Steinbuch, M.

Dynamic modelling and robust control of a wind energy conversion system.

proefschrift, Technische Universiteit Delft, 1989, pp. 112-115.

[5] Müller, P.C. and Schiehlen, W.O.

Linear vibrations.

Martinus Nijhoff Publishers, 1985, pp. 156.

[6] Toivonen, H.T.

A globally convergent algorithm for the optimal constant output feedback problem.

Int. J. Control, Vol. 41, no.6, 1985, pp. 1589-1599.

Bijlage A. Terugkoppelmatrices en polen van de diverse systemen

A.1 De terugkoppelmatrices:

$$L_{vol} = 1.0e6 \begin{bmatrix} 2.4381 & -0.9990 & -0.0877 & -0.0456 & 0.0432 & -0.1227 & 0.0010 \\ -0.0749 & 0.0456 & 1.7432 & -0.9990 & 0.0016 & -0.0106 & 0.0510 \\ & & -0.0231 & 0.0034 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ & & -0.1506 & 0.0092 & 0.0021 & 0.0001 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$L_{bep} = 1.0e5 \begin{bmatrix} -5.5371 & 0.7206 & -0.2709 & 0.0504 \\ -6.7948 & -1.3064 & 0.2502 & -0.3442 \end{bmatrix}$$

$$L_{bepgewogen} = 1.0e6 \begin{bmatrix} -1.3787 & -0.0283 & -0.1221 & -0.0231 \\ 0.0498 & -1.0634 & -0.0106 & -0.1502 \end{bmatrix}$$

$$L_{bepopt} = 1.0e5 \begin{bmatrix} -2.7392 & -0.2375 & -0.6060 & -0.1177 \\ -4.0256 & -4.0851 & -0.9241 & -0.7564 \end{bmatrix}$$

$$L_{polgeli} = 1.0e5 \begin{bmatrix} -4.3717 & -0.2320 & -0.6452 & -0.1337 \\ 0.6676 & -6.8149 & -0.0820 & -1.1534 \end{bmatrix}$$

A.2 Polen van de diverse systemen:

passief:	met Lvol:	met Lbep:
-23.13+53.12i	-33.48+61.52i	-8.62+56.35i
-23.13-53.12i	-33.48-61.52i	-8.62-56.35i
-12.52+56.59i	-19.78+58.58i	-20.81+50.09i
-12.52-56.59i	-19.78-58.58i	-20.81-50.09i
-2.55+11.24i	-7.16+9.43i	-3.39+6.89i
-2.55-11.24i	-7.16-9.43i	-3.39-6.89i
-1.35+6.66i	-5.38+6.64i	-1.34+6.28i
-1.35-6.66i	-5.38-6.64i	-1.34-6.28i
	-18.33+41.99i	
	-18.33-41.99i	
	-23.36+13.67i	
	-23.36-13.67i	
met Lbepgew:	met Lbepopt:	met Lpolgeli:
-151.05	-59.49	-36.02+34.02i
-71.94	-15.98+51.90i	-36.02-34.02i
-31.65	-15.98-51.90i	-44.33+17.53i
-4.96+16.56i	-34.98	-44.33-17.53i
-4.96-16.56i	-6.37+4.21i	-7.17+9.58i
-6.58+9.89i	-6.37-4.21i	-7.17-9.58i
-6.58-9.89i	-2.80+6.86i	-5.36+6.58i
-19.42	-2.80-6.86i	-5.36-6.58i

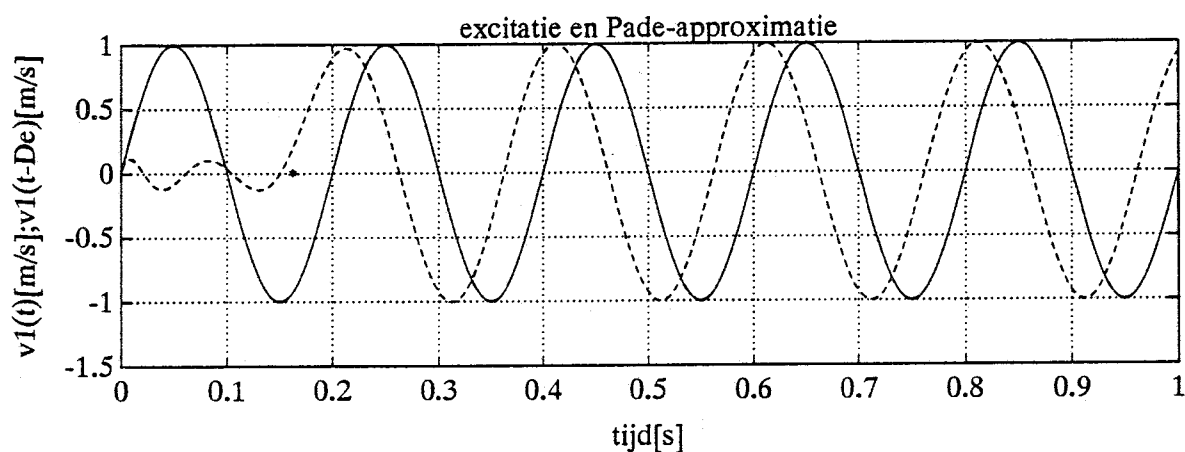
Bijlage B. Beperkingen van de Padé-approximatie

Het lineaire systeem dat de relatie tussen $v_1(t-De)$ en $v_1(t)$ beschrijft, is als volgt:

$$\dot{\eta}(t) = A_n \eta(t) + B_n v_1(t) \quad (2.2.3)$$

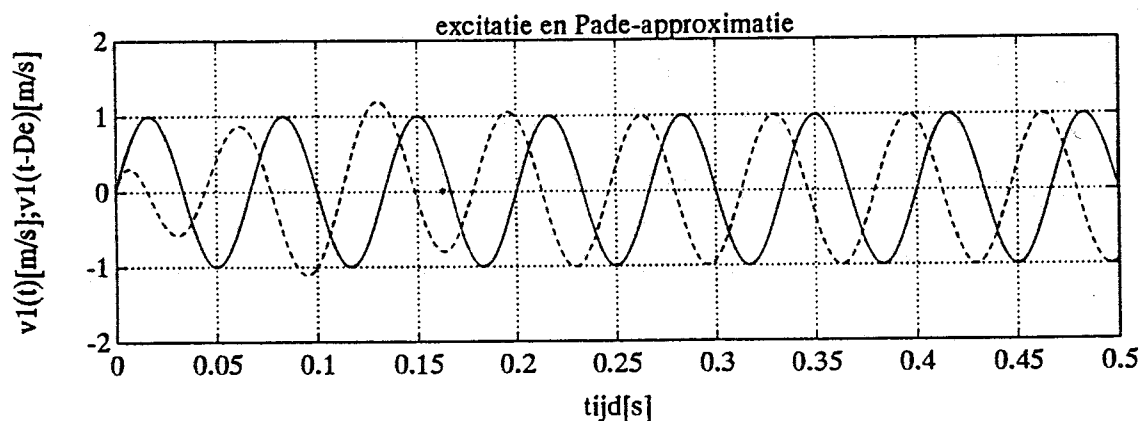
$$v_1(t-De) = C_n \eta(t) + v_1(t) \quad (2.2.4)$$

Wanneer nu als ingangssignaal $v_1(t)$ een laagfrequente sinus, bijvoorbeeld 5 Hz, wordt gekozen, ontstaat het beeld volgens onderstaande figuur:



Figuur B.1: laagfrequente sinus; doorgetrokken=exact; gestreept=Padé-approximatie; *=delay

De Padé-benadering blijkt relatief goed te zijn. Wanneer echter als ingangssignaal $v_1(t)$ een hoogfrequente sinus, bijvoorbeeld 15 Hz wordt gebruikt, ontstaat een ander beeld:



Figuur B.2: hoogfrequente sinus; doorgetrokken=exact; gestreept=Padé-approximatie; *=delay

Het blijkt dat de Padé-approximatie slechter is voor hoger frequente ingangssignalen, met andere woorden: de Padé-approximatie zal voor praktische toepassingen, zoals bij de volledige toestandsterugkoppeling, slechts voor laagfrequente ingangssignalen $v_1(t)$ betrouwbare, relatief nauwkeurige resultaten geven.

Dat de Padé-benadering slechts toepasbaar is in een bepaald frequentiegebied, moge ook uit het volgende blijken.

Wanneer een sinus $v_1(t)$ met een frequentie f als ingangssignaal wordt aangeboden, zou een perfecte Padé-approximatie een uitgangssignaal genereren dat precies gelijk is aan $v_1(t)$, maar met een delay D_e . De perfecte Padé-benadering moet dus het ingangssignaal $v_1(t)$ een zekere faseverschuiving meegeven. Het aantal perioden k dat de sinus met frequentie f dient te worden verschoven volgt uit:

$$T = 1/f \quad (\text{B.1})$$

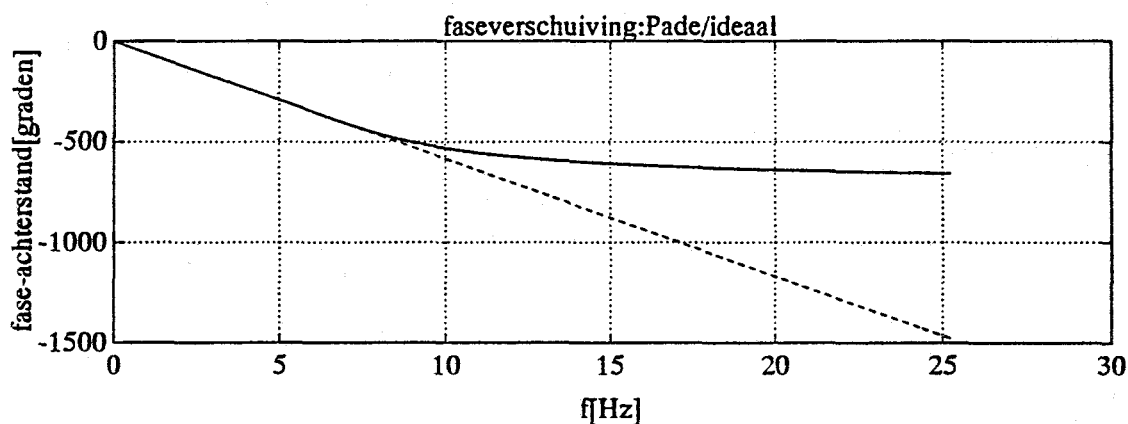
met T de periodetijd van de sinus.

$$D_e = k \cdot T \quad (\text{B.2})$$

(B.2.1) en (B.2.2) levert:

$$k = D_e \cdot f \quad (\text{B.3})$$

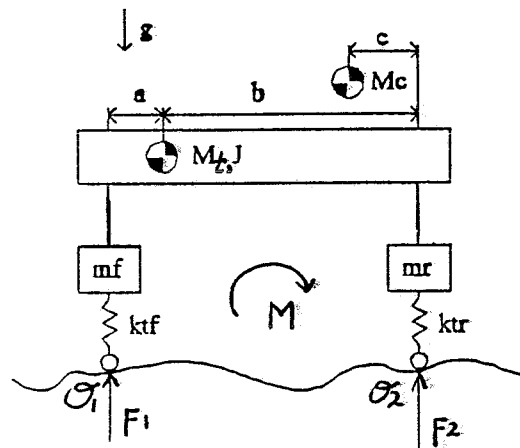
Ofwel: bij een perfecte Padé-approximatie wordt aan het ingangssignaal een faseverschuiving van $360 \cdot k = 360 \cdot D_e \cdot f$ graden meegegeven. Bij de vierde orde Padé-benadering is dit niet het geval, zoals uit onderstaande figuur blijkt:



Figuur B.3: doorgetrokken=faseverschuiving met Padé; gestreept=gewenste faseverschuiving

In deze figuur is duidelijk te zien, dat de Padé-approximatie slechts nauwkeurig is in het frequentiegebied tot ongeveer 10 Hz.

Bijlage C. Grenzen van de bandindrukkingen en veerwegen



Figuur C.1: Het passieve systeem.

Om een goede wegligging te waarborgen, dienen de banden een goed contact te blijven behouden met het wegdek. Er moet dan ook een bovengrens worden opgelegd aan de dynamische bandindrukking voor (Δ_{uf}) en achter (Δ_{ur}). Wanneer Δ_{uf} respectievelijk Δ_{ur} positief is, veert de band uit. Deze uitvering mag niet zó groot zijn, dat het contact met het wegdek wordt verbroken. Met andere woorden: de dynamische uitvering van de band mag niet groter zijn dan de statische indrukking van de band. Deze statische indrukking wordt als volgt berekend:

$$\Sigma M_{O_1} = 0 \Leftrightarrow F_2(a+b) = (m_f(a+b) + M_f a + M_c(a+b-c))g \quad (C.1)$$

Hieruit volgt F_2 .

$$\Sigma M_{O_2} = 0 \Leftrightarrow F_1(a+b) = (m_f(a+b) + M_f b + M_c c)g \quad (C.2)$$

Hieruit volgt F_1 .

\Rightarrow De statische bandindrukking voor = $F_1/k_{tf} = 0.0323m$.

\Rightarrow De statische bandindrukking achter = $F_2/k_{tr} = 0.0291m$.

De bovengrens voor Δ_{uf} is dus 0.0323m; de bovengrens voor Δ_{ur} is 0.0291m.

Voor de betreffende truck zijn de grenzen voor de veerwegen als volgt:

Δ_{sf} ; maximaal 0.14m; minimaal -0.09m.

Δ_{sr} ; maximaal 0.14m; minimaal -0.09m.

Bijlage D. Reductie van de impliciete relatie voor L tot een expliciete

In paragraaf 3.2 is geconstateerd, dat de terugkoppelmatrix L wordt gegeven door de volgende impliciete relatie:

$$L = (D^T Q D + R)^{-1} (D^T Q C + B^T \beta) \chi M^T (M \chi M^T)^{-1} \quad (D.1)$$

$$\beta(A - BLM) + (A - BLM)^T \beta + (C - DLM)^T Q (C - DLM) + M^T L^T R L M = 0 \quad (D.2)$$

$$\chi(A - BLM)^T + (A - BLM) \chi + EWE^T + X_0 = 0 \quad (D.3)$$

Wanneer $M = I$, zoals bij volledige toestandsterugkoppeling, reduceert (D.1) tot:

$$L = (D^T Q D + R)^{-1} (D^T Q C + B^T \beta)$$

De matrix χ blijkt geen rol meer te spelen. Met $V = D^T Q D + R$ blijven de volgende relaties over:

$$L = V^{-1} (D^T Q C + B^T \beta) \quad (D.4)$$

$$\beta(A - BL) + (A - BL)^T \beta + (C - DL)^T Q (C - DL) + L^T R L = 0 \quad (D.5)$$

Er geldt nu het volgende:

$$V = V^T ; (V^{-1})^T = V^{-1} ; Q = Q^T ; R = R^T$$

Wanneer (D.4) wordt ingevuld in (D.5) levert dit de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} & \beta[A - BV^{-1}(D^T Q C + B^T \beta)] + [A - BV^{-1}(D^T Q C + B^T \beta)]^T \beta + \\ & + [C - DV^{-1}(D^T Q C + B^T \beta)]^T Q [C - DV^{-1}(D^T Q C + B^T \beta)] + [V^{-1}(D^T Q C + B^T \beta)]^T R [V^{-1}(D^T Q C + B^T \beta)] = 0 \end{aligned} \quad (D.6)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \beta(A - BV^{-1}D^T Q C)^1 - \beta BV^{-1}B^T \beta^2 + (A - BV^{-1}D^T Q C)^T \beta^3 - (BV^{-1}B^T \beta)^T \beta^4 + \\ & + (C - DV^{-1}D^T Q C)^T Q (C - DV^{-1}D^T Q C) + (DV^{-1}B^T \beta)^T Q (DV^{-1}B^T \beta)^5 + (C - DV^{-1}D^T Q C)^T Q (DV^{-1}B^T \beta) + \\ & - (DV^{-1}B^T \beta)^T Q (C - DV^{-1}D^T Q C) + (V^{-1}D^T Q C)^T R (V^{-1}D^T Q C) + (V^{-1}B^T \beta)^T R (V^{-1}B^T \beta)^6 + \\ & + (V^{-1}D^T Q C)^T R V^{-1}B^T \beta + (V^{-1}B^T \beta)^T R (V^{-1}D^T Q C) = 0 \end{aligned} \quad (D.7)$$

Met $F = A - BV^{-1}D^T Q C$; $H = BV^{-1}B^T$:

$$1) \beta(A - BV^{-1}D^T Q C) = \beta F$$

$$2) -\beta BV^{-1}B^T \beta = -\beta H \beta$$

$$3) (A - BV^{-1}D^T Q C)^T \beta = F^T \beta$$

Optellen van de termen 4), 5) en 6) levert:

$$\begin{aligned} & -(BV^{-1}B^T \beta)^T \beta^4 + (DV^{-1}B^T \beta)^T Q (DV^{-1}B^T \beta)^5 + (V^{-1}B^T \beta)^T R (V^{-1}B^T \beta)^6 = \\ & -\beta^T BV^{-1}B^T \beta + \beta^T BV^{-1}(D^T Q D + R)V^{-1}B^T \beta = 0 \end{aligned} \quad (D.8)$$

Gelijkheid (D.7) wordt nu:

$$\begin{aligned} & \beta F - \beta H \beta + F^T \beta + (C - DV^{-1}D^TQC)^T Q (C - DV^{-1}D^TQC) + (C - DV^{-1}D^TQC)^T Q (DV^{-1}B^T \beta) + \\ & - (DV^{-1}B^T \beta)^T Q (C - DV^{-1}D^TQC) + (V^{-1}D^TQC)^T R (V^{-1}D^TQC) + (V^{-1}D^TQC)^T R V^{-1}B^T \beta + \\ & + (V^{-1}B^T \beta)^T R (V^{-1}D^TQC) = 0 \end{aligned} \quad (D.9)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \beta F - \beta H \beta + F^T \beta + C^T(Q - QDV^{-1}D^TQ)C^a) - C^TQDV^{-1}D^TQC^b) + C^TQDV^{-1}D^TQDV^{-1}D^TQC^c) + \\ & + C^TQDV^{-1}B^T \beta^d) - C^TQDV^{-1}D^TQDV^{-1}B^T \beta^e) - \beta^T B V^{-1}D^TQC^f) + \beta^T B V^{-1}D^TQDV^{-1}D^TQC^g) + \\ & + C^TQDV^{-1}R V^{-1}D^TQC^h) + C^TQDV^{-1}R V^{-1}B^T \beta^i) + \beta^T B V^{-1}R V^{-1}D^TQC^j) = 0 \end{aligned} \quad (D.10)$$

Met $G = C^T(Q - QDV^{-1}D^TQ)C$ wordt term a) gelijk aan G. Optellen van de termen b), c) en h):

$$\begin{aligned} & -C^TQDV^{-1}D^TQC^b) + C^TQDV^{-1}D^TQDV^{-1}D^TQC^c) + C^TQDV^{-1}R V^{-1}D^TQC^h) = \\ & C^TQD(-V^{-1} + V^{-1}(D^TQD + R)V^{-1})D^TQC = C^TQD(-V^{-1} + V^{-1}VV^{-1})D^TQC = 0 \end{aligned} \quad (D.11)$$

Optellen van de termen d), e) en i):

$$\begin{aligned} & C^TQDV^{-1}B^T \beta^d) - C^TQDV^{-1}D^TQDV^{-1}B^T \beta^e) + C^TQDV^{-1}R V^{-1}B^T \beta^i) = \\ & C^TQD(V^{-1} - V^{-1}(D^TQD + R)V^{-1})B^T \beta = C^TQD(V^{-1} - V^{-1}VV^{-1})B^T \beta = 0 \end{aligned} \quad (D.12)$$

Optellen van de termen f), g) en j):

$$\begin{aligned} & -\beta^T B V^{-1}D^TQC^f) + \beta^T B V^{-1}D^TQDV^{-1}D^TQC^g) + \beta^T B V^{-1}R V^{-1}D^TQC^j) = \\ & \beta^T B(-V^{-1} + V^{-1}(D^TQD + R)V^{-1})D^TQC = \beta^T B(-V^{-1} + V^{-1}VV^{-1})D^TQC = 0 \end{aligned} \quad (D.13)$$

Uiteindelijk wordt de gelijkheid (D.6) dus:

$$F^T \beta + \beta F - \beta H \beta + G = 0 \quad (D.14)$$

Hiermee is aangetoond, dat bij volledige toestandsterugkoppeling het stelsel vergelijkingen (D.1), (D.2) en (D.3) reduceert tot:

$$L = V^{-1}(D^TQC + B^T \beta) \quad (D.15)$$

$$F^T \beta + \beta F - \beta H \beta + G = 0 \quad (D.16)$$

Bijlage E. De weegmatrices

In deze bijlage zal het gehanteerde integraalcriterium nader worden bekeken:

$$J = \int_{t=0}^{\infty} [y(t)^T Q y(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (\text{E.1})$$

E.1 Is ook te schrijven als:

$$J(t) = \int_{t=0}^{\infty} \hat{J}(t) dt \quad (\text{E.2})$$

met:

$$\hat{J}(t) = [y(t)^T Q y(t) + u(t)^T R u(t)] \quad (\text{E.3})$$

Om de overzichtelijkheid te bewaren, wordt in het vervolg de aanduiding voor de tijdsafhankelijkheid "(t)" weggelaten.

De kolom y bevat de te regelen grootheden: $y^T = [\Delta_{tr}; \Delta_{tr}; \Delta_{sf}; \Delta_{sr}; \ddot{q}_{lm}; \ddot{\phi}]$.

De kolom u bevat de actuatorkrachten: $u^T = [f_{sf}; f_{sr}]$.

De weegmatrices zien er als volgt uit:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_6 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

(E.3) wordt nu:

$$\hat{J} = q_1 \Delta_{tr}^2 + q_2 \Delta_{tr}^2 + q_3 \Delta_{sf}^2 + q_4 \Delta_{sr}^2 + q_5 \ddot{q}_{lm}^2 + q_6 \ddot{\phi}^2 + r_1 f_{sf}^2 + r_2 f_{sr}^2 \quad (\text{E.4})$$

Met $\ddot{q}_m = f_{61}f_{sf} + f_{62}f_{sr}$ en $\ddot{\phi} = f_{81}f_{sf} + f_{82}f_{sr}$

wordt (E.4):

$$\begin{aligned} \hat{J} = & q_1\Delta_{sf}^2 + q_2\Delta_{sr}^2 + q_3\Delta_{sf}^2 + q_4\Delta_{sr}^2 + (q_5f_{61}^2 + q_6f_{81}^2 + r_1)f_{sf}^2 + (q_5f_{62}^2 + q_6f_{82}^2 + r_2)f_{sr}^2 \\ & + 2(q_5f_{61}f_{62} + q_6f_{81}f_{82})f_{sf}f_{sr} \end{aligned} \quad (E.5)$$

De actuatoorkrachten f_{sf} en f_{sr} worden dus zowel gewogen door q_5 en q_6 als r_1 , respectievelijk door zowel q_5 en q_6 als r_2 . Bovendien wordt door q_5 en q_6 nog een kruisterm van de actuatoorkrachten gewogen, waarvan de fysische betekenis onduidelijk is. Tijdens dit onderzoek is dan ook besloten om q_5 en q_6 gelijk aan nul te kiezen (Q wordt hierdoor semi-positief definitief) en wegen van de actuatoorkrachten uitsluitend te laten berusten op r_1 en r_2 . Daar \ddot{q}_m en $\ddot{\phi}$ lineaire combinaties zijn van de actuatoorkrachten, worden deze grootheden via r_1 en r_2 gewogen.

Bijlage F. Gelijktelling van het volledig teruggekoppelde systeem met het passieve systeem

Theoretisch gezien zou het mogelijk moeten zijn door bepaalde keuzes voor de weegmatrices Q en R, een volledige terugkoppelmatrix L_{vol} te verkrijgen, die er voor zorgt dat het teruggekoppelde systeem dezelfde dynamica heeft als het passieve systeem. In dat geval geldt:

$$L_{vol} = -T \text{ met } T = [T_1 \ T_2].$$

(-T) Is dus als het ware de volledige terugkoppelmatrix bij het passieve systeem, zie paragraaf 2.3.2.

Een uitdrukking voor de benodigde Q en R is echter niet in expliciete vorm te geven! Een iteratief algoritme waarmee geprobeerd is betreffende Q en R te vinden, is van de volgende vorm:

$$\begin{bmatrix} Q(k+1) \\ R(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q(k) \\ R(k) \end{bmatrix} + \alpha J(k)^{-1} [(-T) - L(k)] \quad (\text{F.1})$$

met k de iteratiestap, α een numerieke dempingsfactor en:

$$J(k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(k)}{\partial Q(k)} \\ \frac{\partial L(k)}{\partial R(k)} \end{bmatrix} \quad (\text{F.2})$$

N.B.: F.1 en F.2 zijn wiskundig niet correct, maar dienen slechts ter interpretatie!

Gezocht wordt dus naar een matrix $J(k)$, die de partiële afgeleiden van de weegfactoren in de terugkoppelmatrix naar de weegfactoren bevat. Daar deze matrix geïnverteerd moet worden, dient zij als primaire eis vierkant te zijn. Dit kan op de volgende manier bewerkstelligd worden.

De matrices L en T bevatten 24 verschillende elementen:

$$L(k) = \begin{bmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & L_{1,12} \\ L_{2,1} & L_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & L_{2,12} \end{bmatrix} (k) \quad ; \quad T(k) = \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & T_{1,12} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & T_{2,12} \end{bmatrix} \quad (\text{F.3}) \text{ en } (\text{F.4})$$

Er worden nu een 24×1 kolom $l(k)$ gevormd waarin de elementen van $L(k)$ zitten en een 24×1 kolom t waarin de elementen van T zijn opgeborgen:

$$l(k)^T = [L_{1,1} \ L_{1,2} \ \dots \ L_{1,12} \ L_{2,1} \ L_{2,2} \ \dots \ L_{2,12}](k) \quad (F.5)$$

$$t^T = [T_{1,1} \ T_{1,2} \ \dots \ T_{1,12} \ T_{2,1} \ T_{2,2} \ \dots \ T_{2,12}] \quad (F.6)$$

De matrix Q is 6×6 , maar bevat wegens de symmetrie-eis slechts 21 verschillende elementen. De matrix R is 2×2 en bevat wegens de symmetrie-eis 3 verschillende elementen. Maximaal zijn er dus 24 verschillende weegfactoren. Deze weegfactoren worden opgeborgen in de kolom $q(k)$:

$$q^T(k) = [q_{1,1} \ \dots \ q_{1,6} \ q_{2,2} \ \dots \ q_{2,6} \ q_{3,3} \ \dots \ q_{3,6} \ q_{4,4} \ \dots \ q_{4,6} \ \dots \ q_{5,5} \ q_{5,6} \ q_{6,6} \ r_{1,1} \ r_{2,1} \ r_{2,2}](k) \quad (F.7)$$

Een alternatief voor F.1 is dan de volgende vergelijking:

$$q(k+1) = q(k) + \alpha J(k)^{-1} [(-t) - l(k)] \quad (F.8)$$

met:

$$J(k) = \frac{\partial l(k)}{\partial q(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_{1,1}}{\partial q_{1,1}} & \frac{\partial L_{1,1}}{\partial q_{1,2}} & \dots & \frac{\partial L_{1,1}}{\partial q_{6,6}} & \frac{\partial L_{1,1}}{\partial r_{1,1}} & \dots & \frac{\partial L_{1,1}}{\partial r_{2,2}} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial L_{2,12}}{\partial q_{1,1}} & \frac{\partial L_{2,12}}{\partial q_{1,2}} & \dots & \frac{\partial L_{2,12}}{\partial q_{6,6}} & \frac{\partial L_{2,12}}{\partial r_{1,1}} & \dots & \frac{\partial L_{2,12}}{\partial r_{2,2}} \end{bmatrix}$$

De Jacobiaan is nu vierkant en in principe inverteerbaar.

Het algoritme om de weegmatrices Q en R , behorende bij $L_{vol} = -T$, te vinden, is nu als volgt:

1) Kies beginwaarden $q(0)$.

Voor elke stap k wordt nu het volgende gedaan:

2) Bereken de matrix $l(k)$ met behulp van $q(k)$ en de vergelijkingen (3.3.1) en (3.3.2).

3) Verander achtereenvolgens de 24 waarden in de kolom $q(k)$ en bereken met behulp van (3.3.1) en (3.3.2) 24 keer de kolom l . De Jacobiaan $J(k)$ is nu bepaald.

4) Bepaal de zoekrichting, ofwel de inverse van $J(k)$.

5) Bepaal de nieuwe waarden voor de weegfactoren: $q(k+1) = q(k) + \alpha J(k)^{-1} [(-t) - l(k)]$

6) Ga naar stap 2), totdat geldt: $\|(-t) - l(k)\|_{\infty} < 0.01 \cdot \|(-t)\|_{\infty}$.

Voor verdere details betreffende dit algoritme wordt verwezen naar bijlage Q, programma "Jacob".

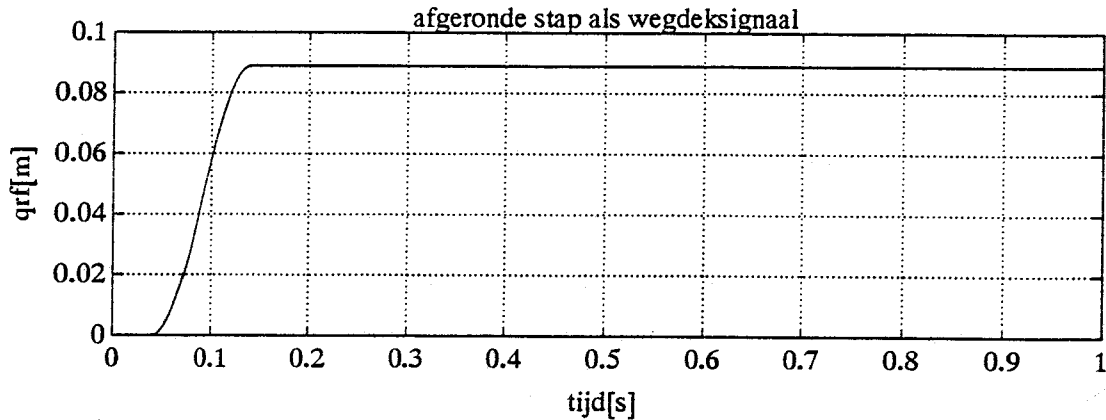
Wanneer dit algoritme wordt toegepast blijken er een tweetal problemen op te treden.

Het eerste probleem is van numerieke aard: de matrix $J(k)$ is op sommige momenten tijdens het iteratieproces bijna singulier, waardoor MATLAB soms geen of slechts een zeer onnauwkeurige inverse kan bepalen. Dit bijna singulier zijn is te wijten aan het feit dat de gevoeligheid voor een verandering in de verschillende weegfactoren zeer uiteenlopend is, waardoor sommige kolommen in de Jacobiaan bijna nul zijn en andere heel groot.

Het tweede probleem is dat de weegmatrices $Q(k)$ en $R(k)$ niet positief definitief blijven gedurende de iteratie: het positief definitief houden van de weegmatrices gedurende de iteratie, is niet als randvoorwaarde in te bouwen.

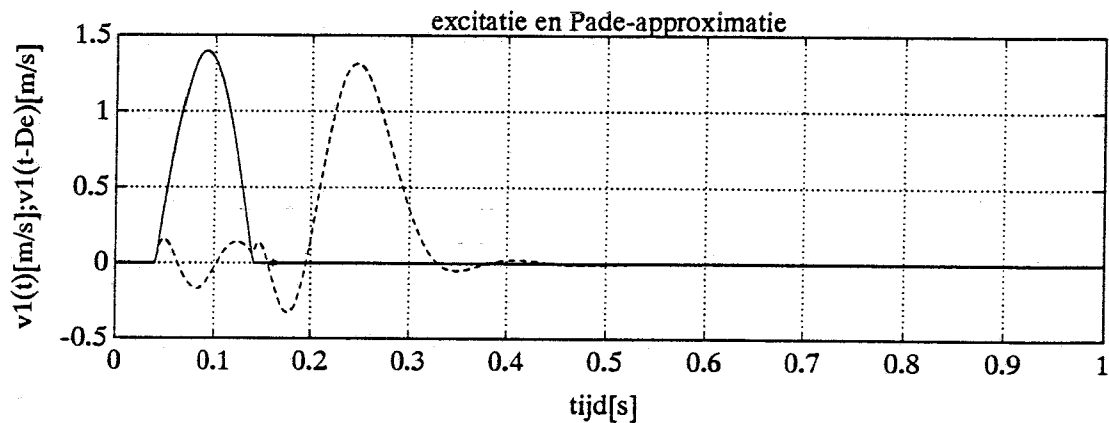
Wegens deze problemen zijn er dan ook geen Q en R gevonden waarvoor $L_{vol} = -T$.

Bijlage G. De afgeronde stap

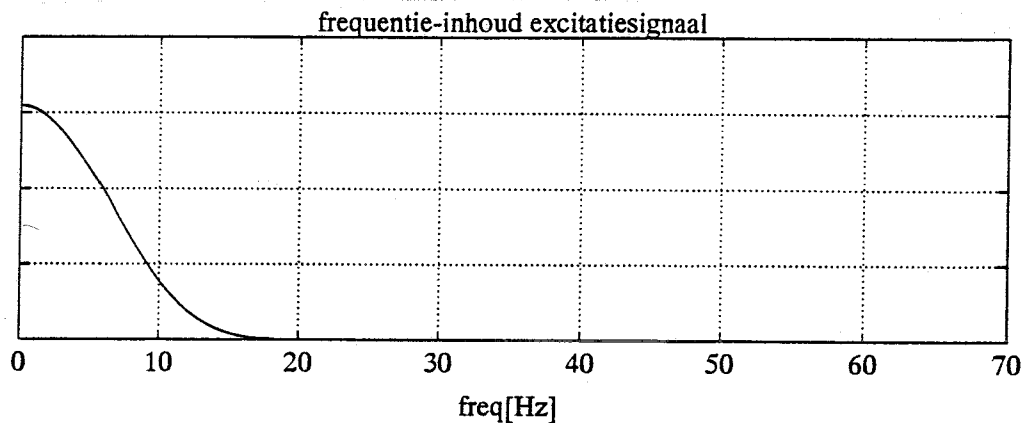


Figuur G.1: De afgeronde stap $q_{rf}(t)$.

$q_{rf}(t) = 0$ als $t < 0.04$; $q_{rf} = -(h/2)\cos(fs \cdot \pi(t - 0.04)) + (h/2)$ als $0.04 < t < 0.04 + De$; $q_{rf} = h$ als $t > 0.04 + De$.
In bovenstaande figuur: $h = 0.089$ m; $fs = 10$ Hz; $De = 0.1625$ s.

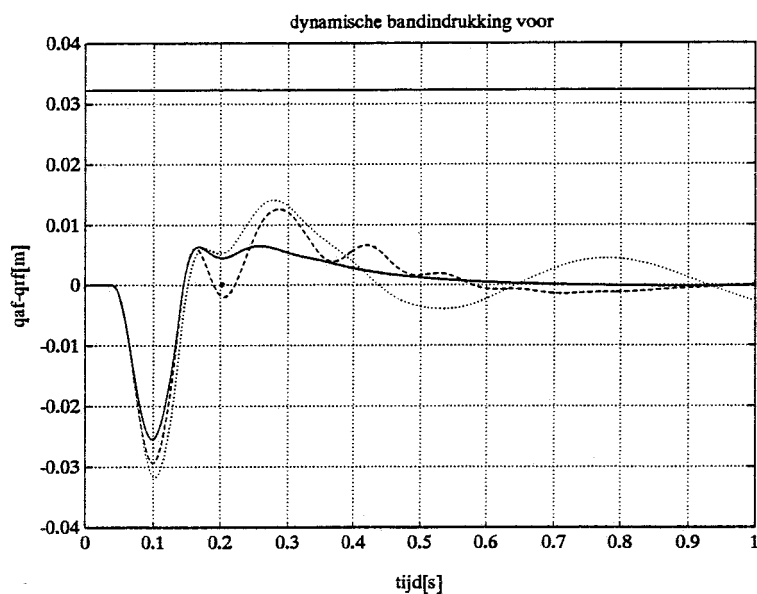


Figuur G.2: De afgeleide van de afgeronde stap (doorgetrokken) en de Padé-approx. (gestreept).

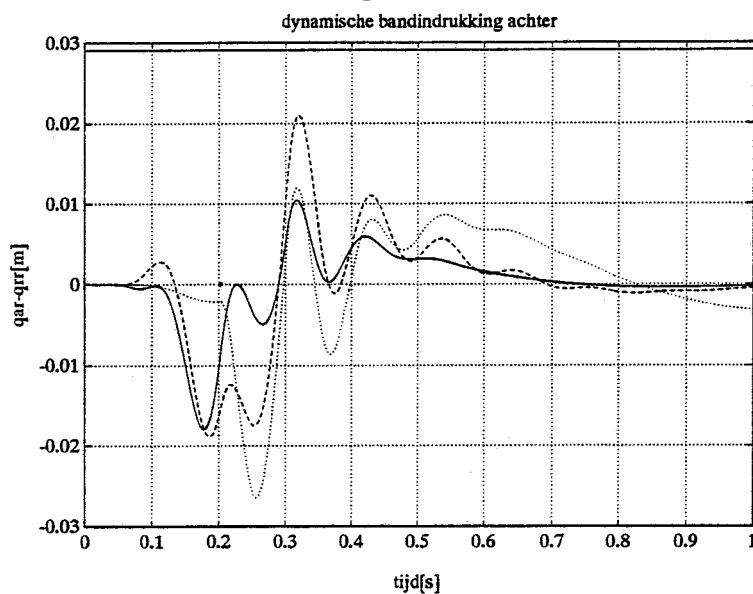


Figuur G.3: Vorm van het vermogenspectrum van de afgeleide van de afgeronde stap.

Bijlage H. Simulaties behorende bij paragraaf 3.5



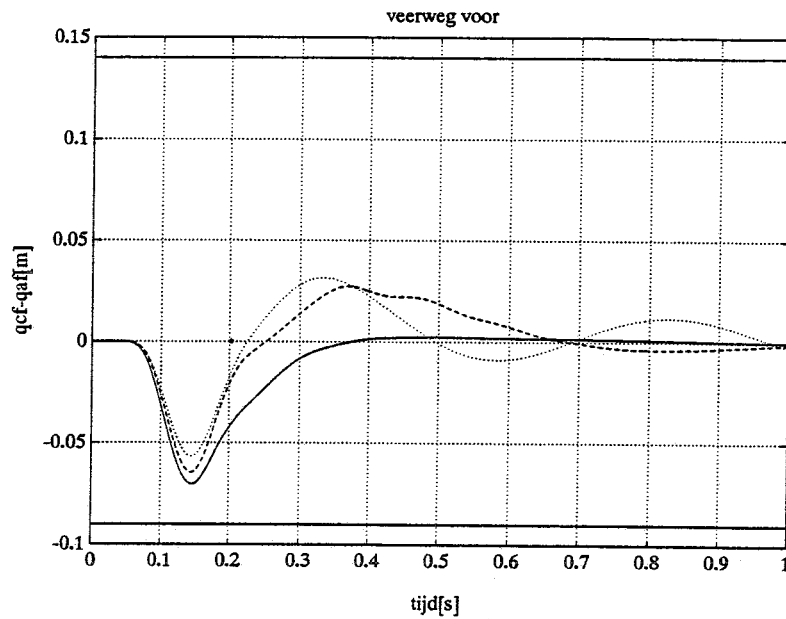
Figuur H.1



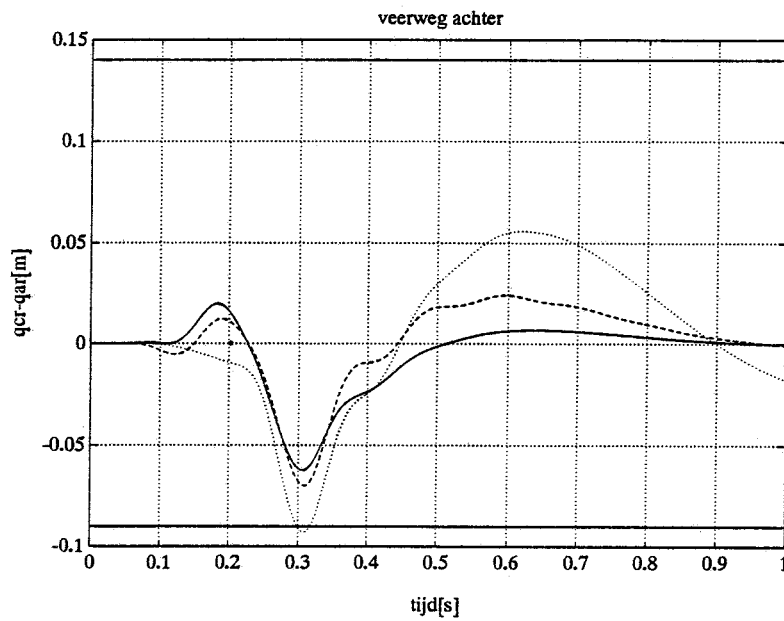
Figuur H.2

Figuur H.1 en H.2: De dynamische bandindrukkingen voor en achter van het passieve systeem en beide actieve systemen.

doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=beperkt teruggekoppeld met L_{bep} ; gestippeld=passief



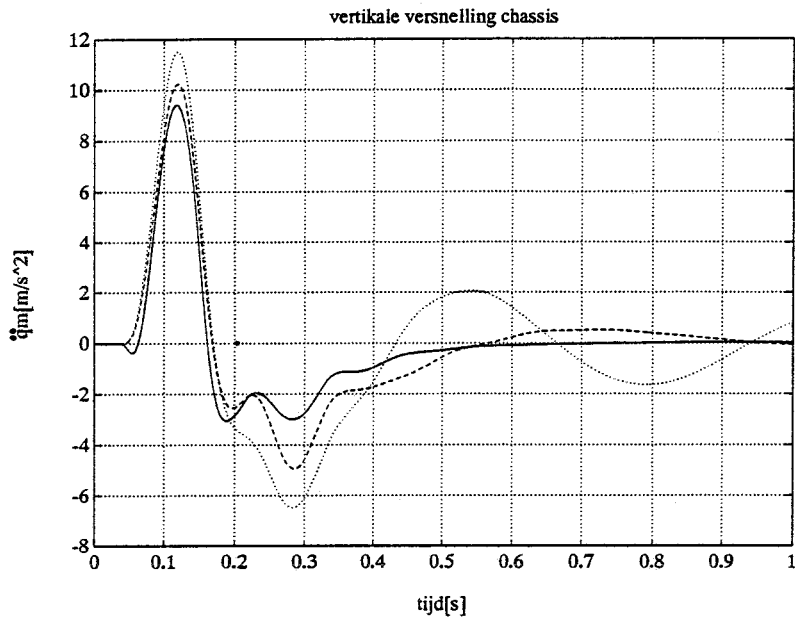
Figuur H.3



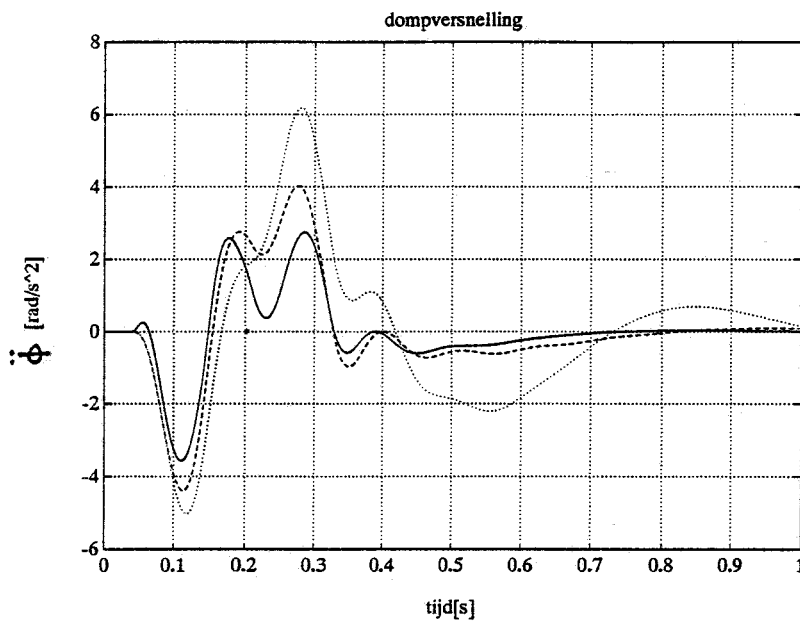
Figuur H.4

Figuur H.3 en H.4: De veerwegen voor en achter van beide actieve systemen en het passieve systeem.

doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=beperkt teruggekoppeld met L_{bep} ; gestippeld=passief



Figuur H.5



Figuur H.6

Figuur H.5 en H.6: Vertikale versnelling en dampversnelling van beide actieve systemen en het passieve systeem.
 doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=beperkt teruggekoppeld met L_{bep} ; gestippeld=passief.

Bijlage I. Afleiding van de weegmatrix W

Het is de bedoeling, dat door de weegmatrix W in vergelijking 4.2.6, de elementen van Lvol die een sterke invloed hebben op de dominante polen, hoog worden gewogen in het least squares algoritme. Het volgende kan nu worden gedaan om tot een goede keuze van W te komen.

De volledige terugkoppelmatrix Lvol ziet er als volgt uit:

$$Lvol = \begin{bmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{1,12} \\ L_{2,1} & L_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{2,12} \end{bmatrix}$$

Verander nu achtereenvolgens elk elementje in Lvol, bijvoorbeeld volgens:

$$L'_{ij} = L_{ij} + 0.1 \cdot |L_{ij}| \quad (\text{I.1})$$

en kijk wat er gebeurt met de 4 dominante polen van A-B·L'vol, waarbij L'vol de terugkoppelmatrix is waarvan één elementje iets veranderd is. Bepaal nu de gevoeligheid van de dominante polen voor een verandering in Lvol als volgt:

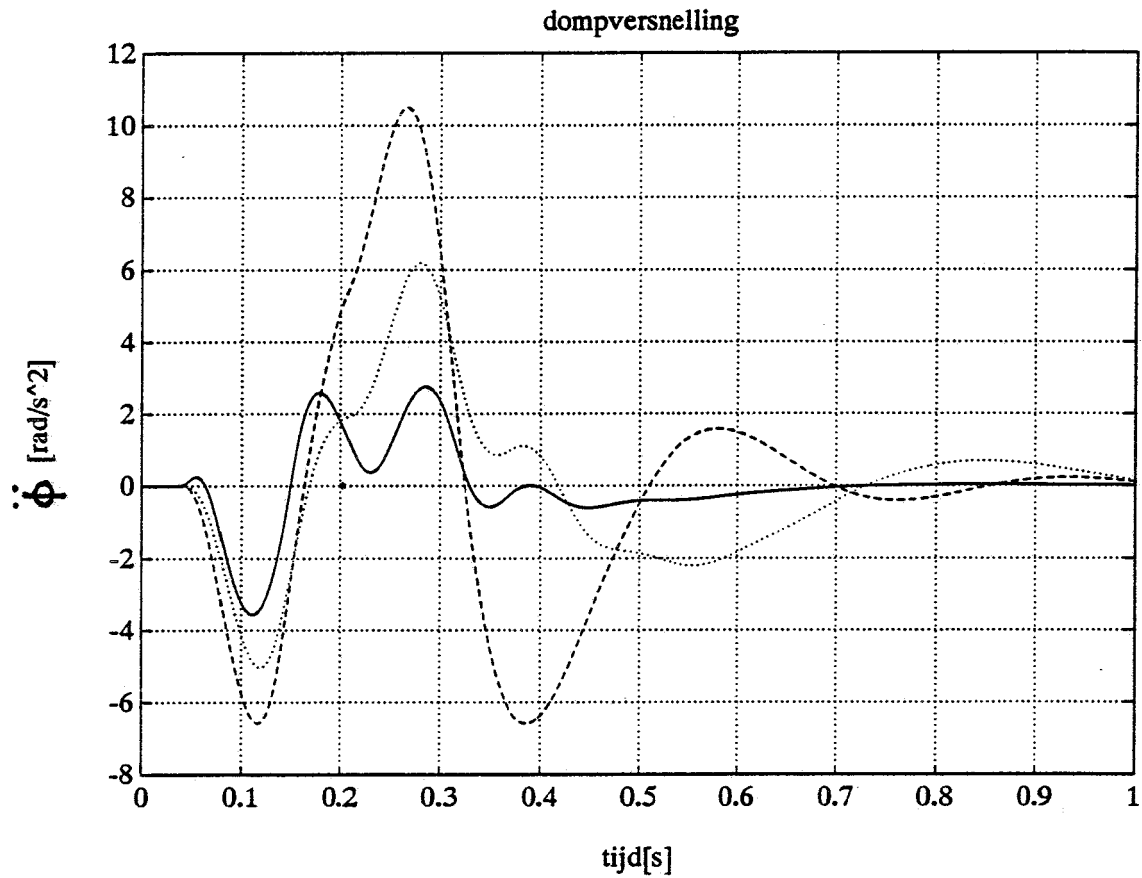
$$\text{gevoeligheid}(\text{scalar}) = \|\text{eig}(A-B \cdot Lvol) - \text{eig}(A-B \cdot L'vol)\|_{\infty} \quad (\text{I.2})$$

Als de gevoeligheid hoog is, heeft het betreffende element in Lvol een grote invloed op de dominante polen. De gevoeligheid kan dus dienen als weegfactor.

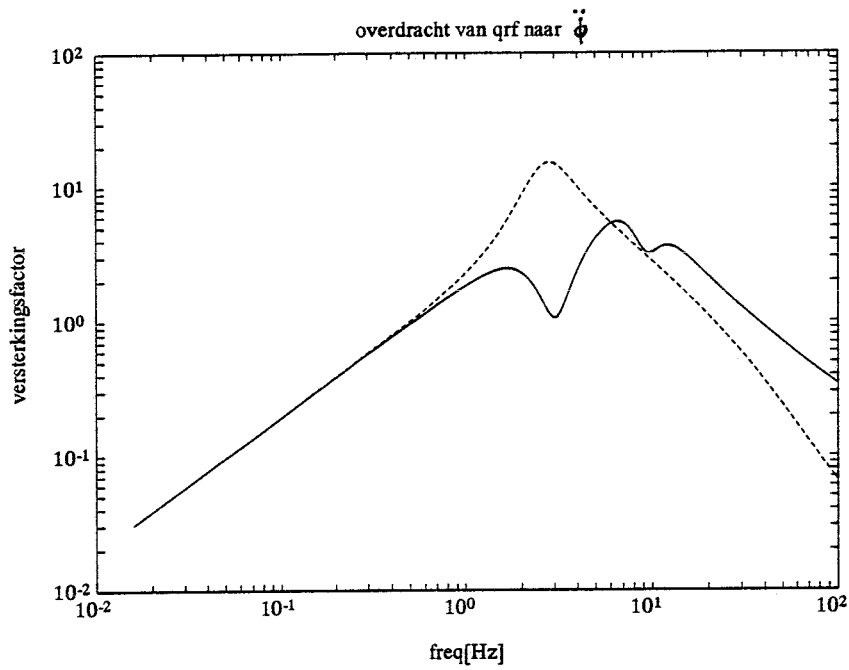
In totaal ontstaan er nu 24 verschillende gevoeligheden. Deze 24 parameters komen op de diagonaal van de weegmatrix W. De met deze methode bepaalde matrix W heeft als diagonaalelementen achtereenvolgens:

0.0385; 0.0643; 0.0005; 0.0014; 0.0082; 0.0930; 0.0001; 0.0085; 0; 0; 0; 0;
0.0007; 0.0016; 0.0145; 0.0470; 0.0002; 0.0045; 0.0036; 0.0596; 0; 0; 0; 0

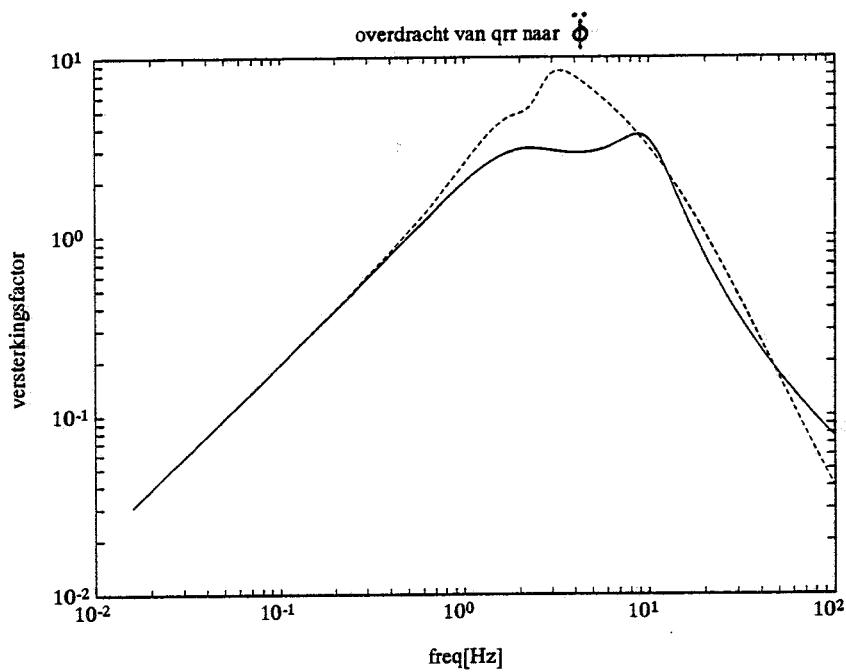
Bijlage J. Figuren bij paragraaf 4.2



Figuur J.1: De dompversnelling van beide actieve systemen en het passieve systeem. doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=bepoort teruggekoppeld met L begewogen; gestippeld=passief.



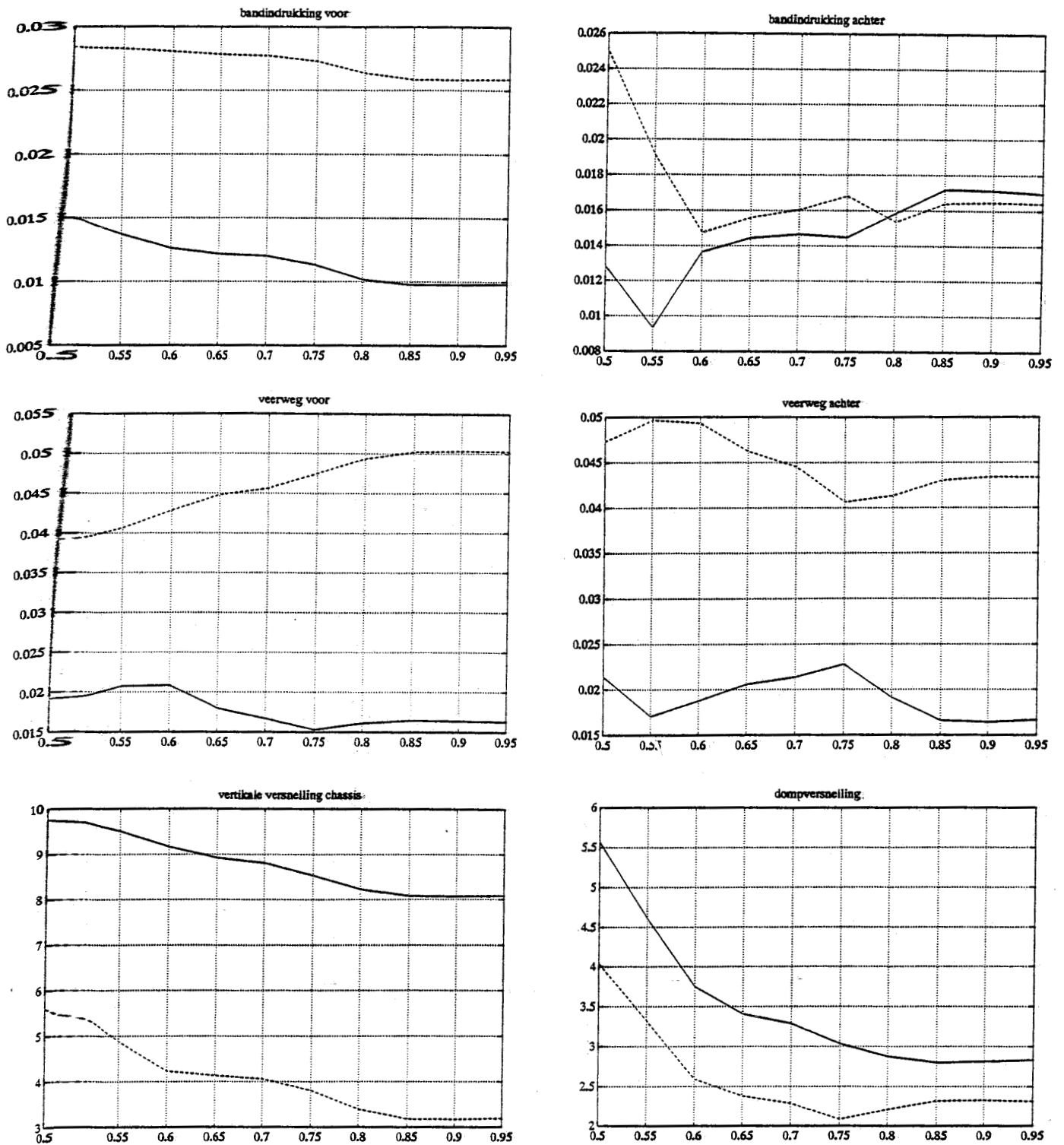
Figuur J.2



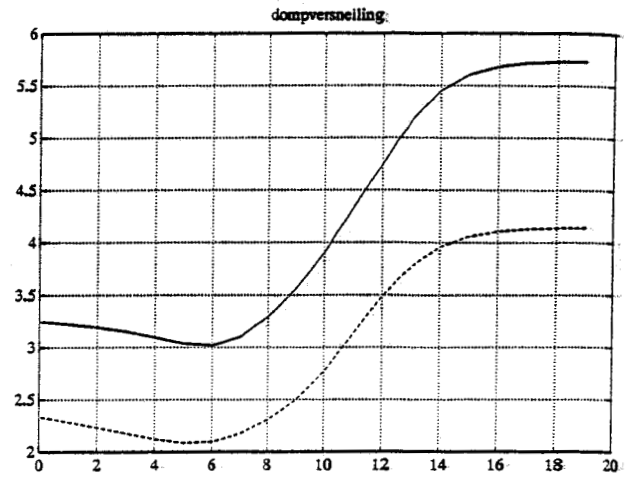
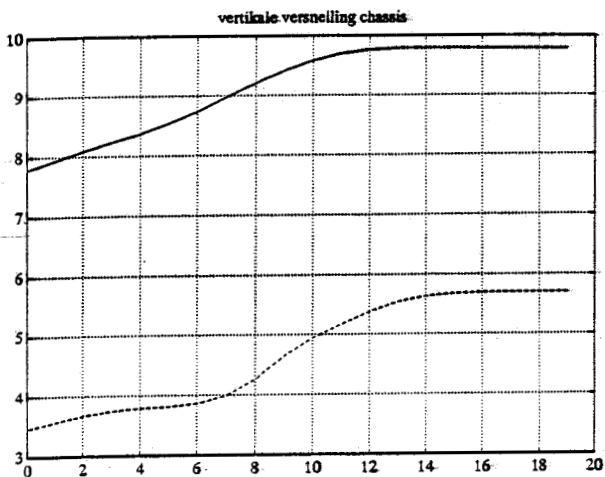
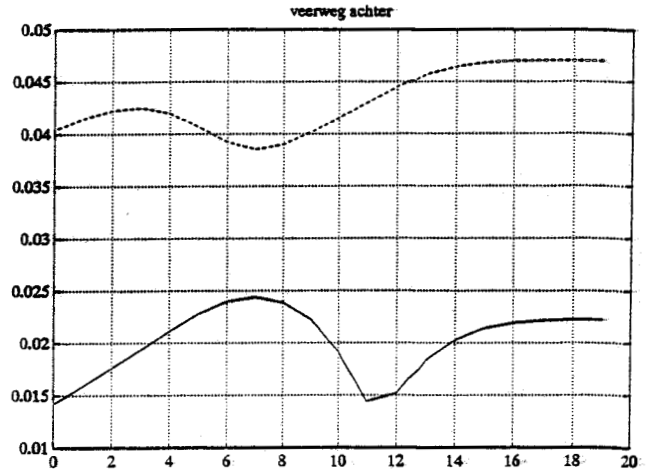
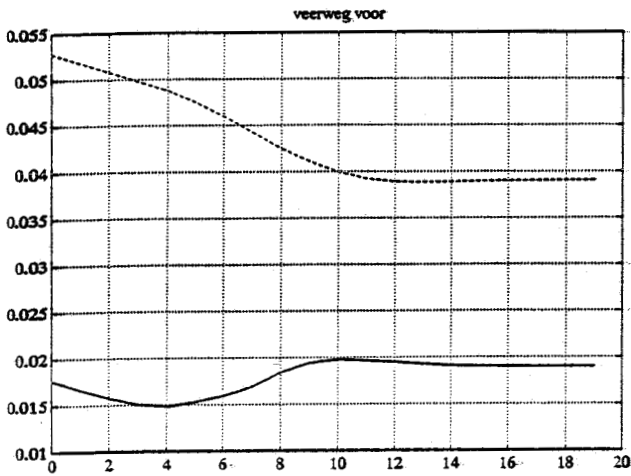
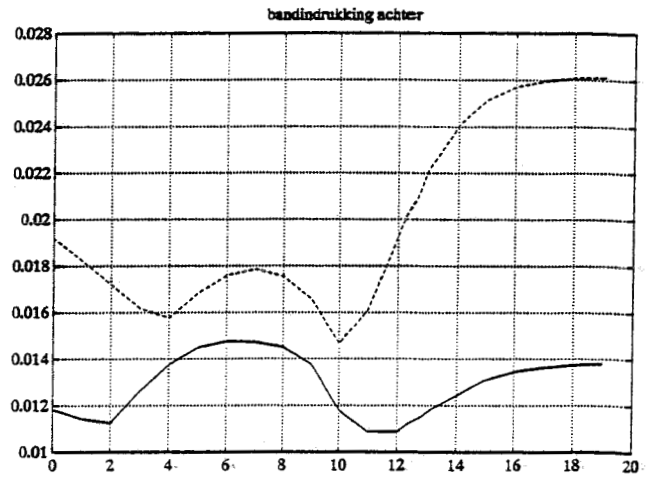
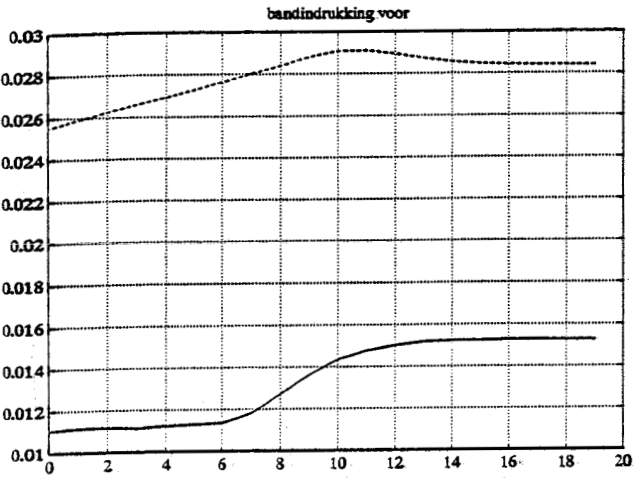
Figuur J.3

Figuur J.2 en J.3: Overdrachten naar de dampversnelling van beide actieve systemen voor excitatie aan de voor- respectievelijk achterwielen.

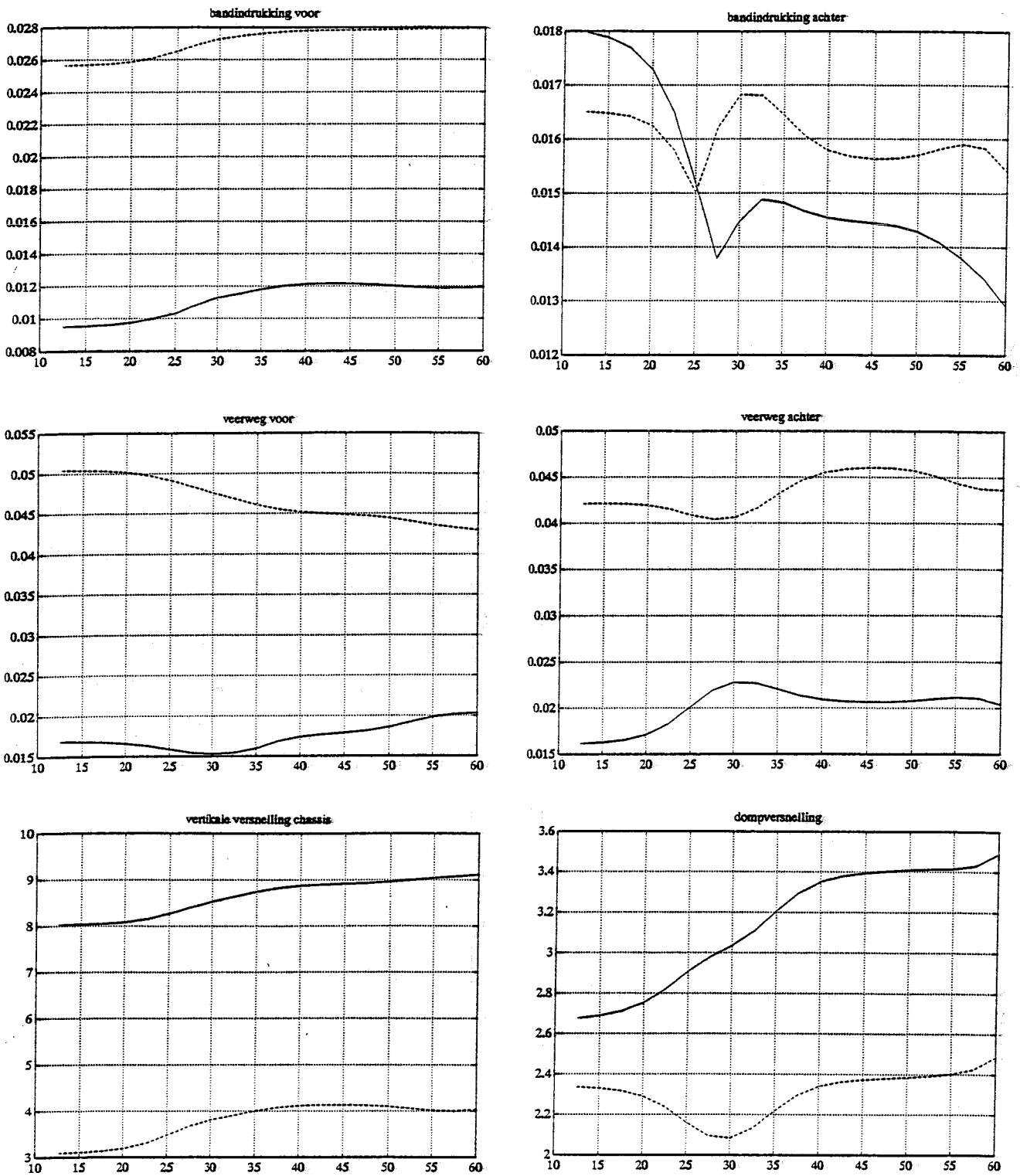
doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=bepert teruggekoppeld met Lbepgewogen



Figuur K.1: Pieken van de diverse te regelen grootheden als functie van twissel (x-as).
 doorgetrokken=maximale piek; gestreept=absolute waarde van de minimale piek.

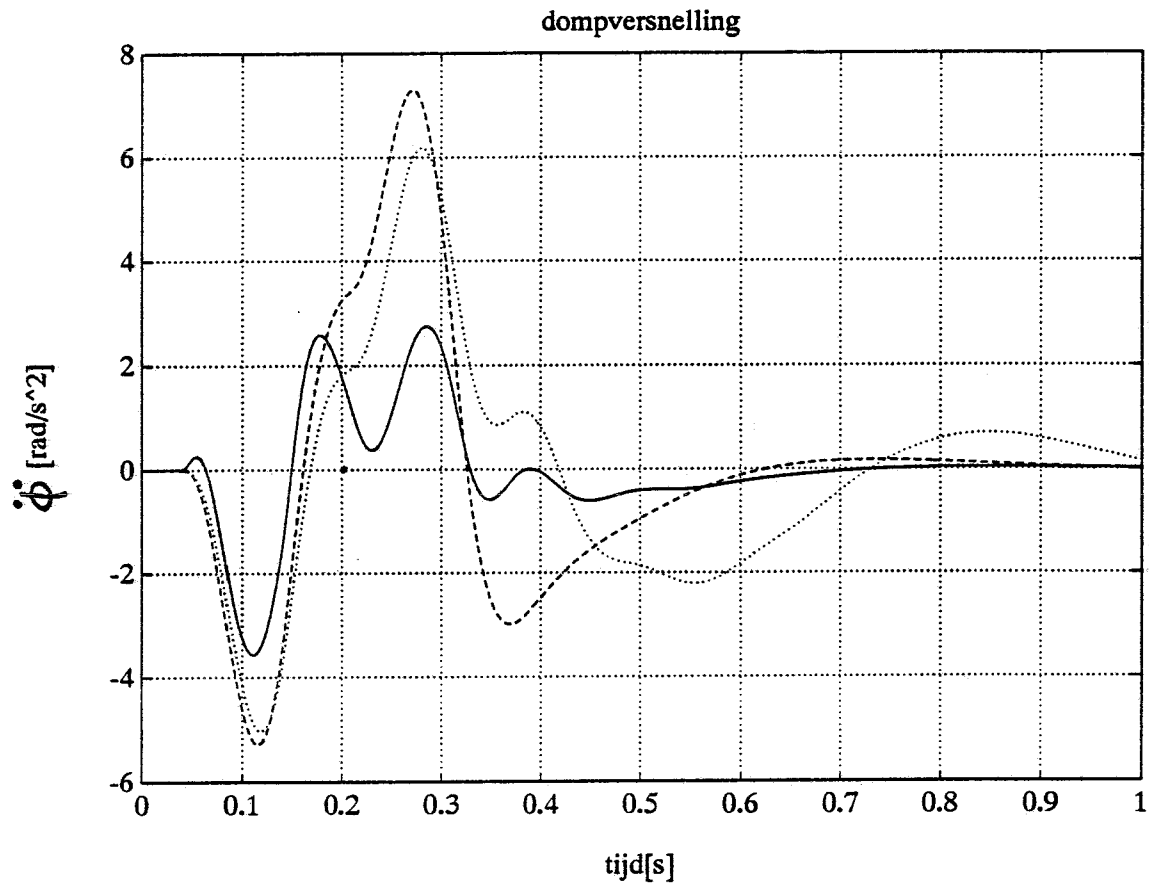


Figuur K.2: Pieken van de diverse te regelen grootheden als functie van a (x-as).
doorgetrokken=maximale piek; gestreept=absolute waarde van de minimale piek.

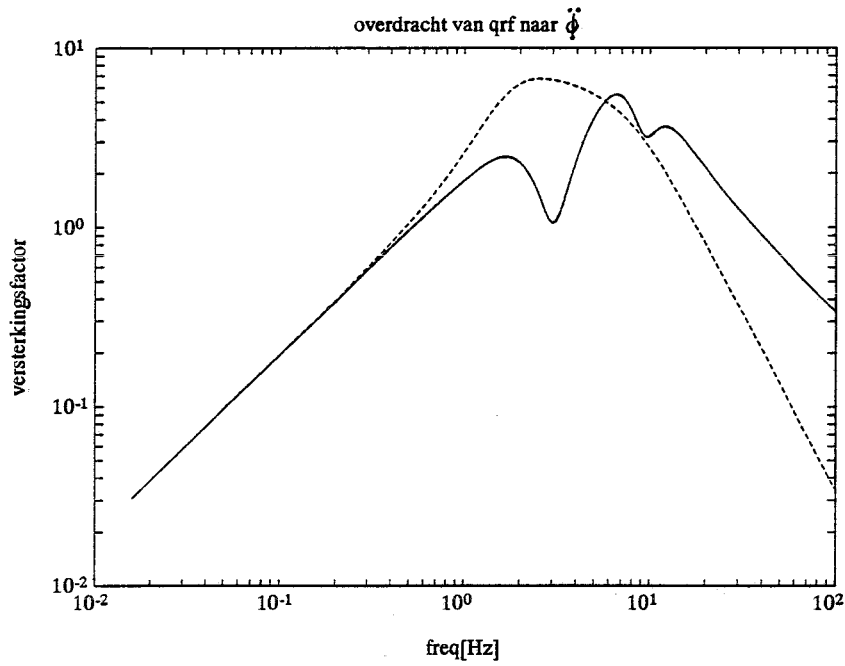


Figuur K.3: Pieken van de diverse te regelen grootheden als functie van b (x-as).
 doorgetrokken=maximale piek; gestreept=absolute waarde van de minimale piek.

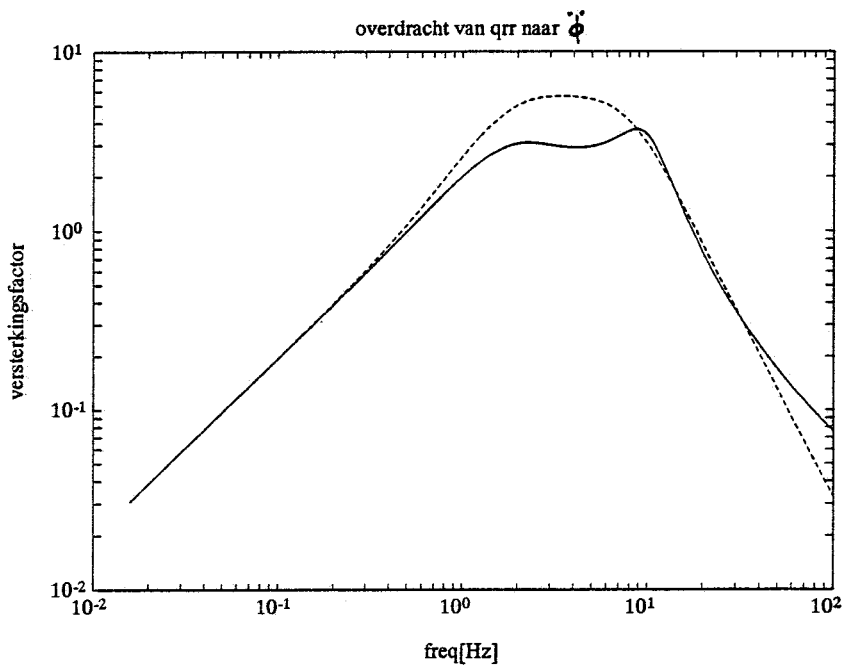
Bijlage L. Figuren bij paragraaf 4.3



Figuur L.1: De dompversnelling van beide actieve systemen en het passieve systeem. doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=bepert teruggekoppeld met Lpolgeli; gestippeld=passief.



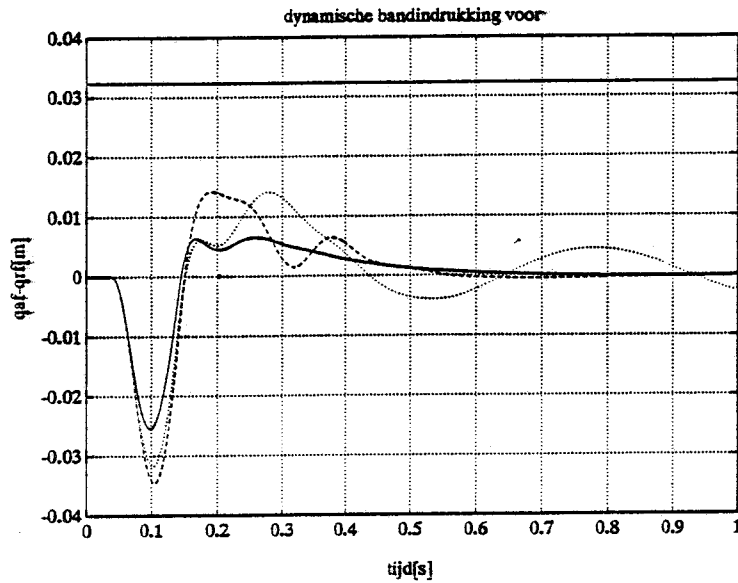
Figuur L.2



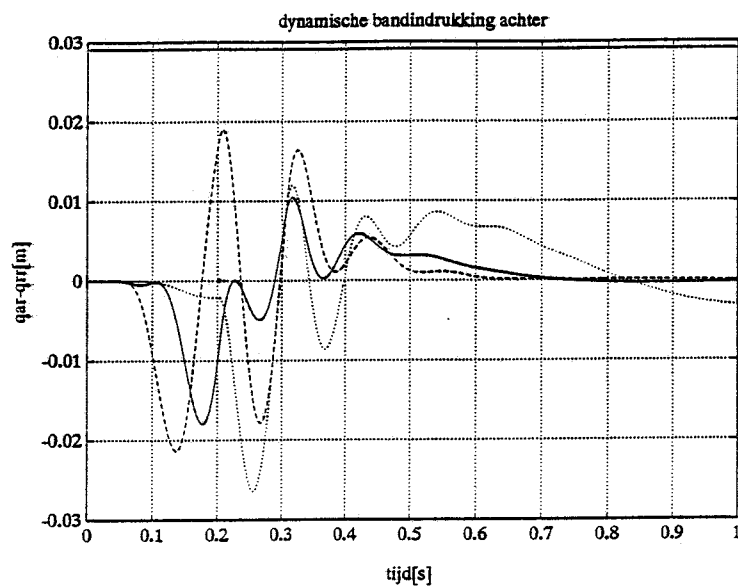
Figuur L.3

Figuur L.2 en L.3: Overdrachten naar de dompversnelling van beide actieve systemen voor excitatie aan de voor- respectievelijk achterwielen.
 doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=beperkt teruggekoppeld met Lpolgeli

Bijlage M. Simulaties behorende bij paragraaf 5.2



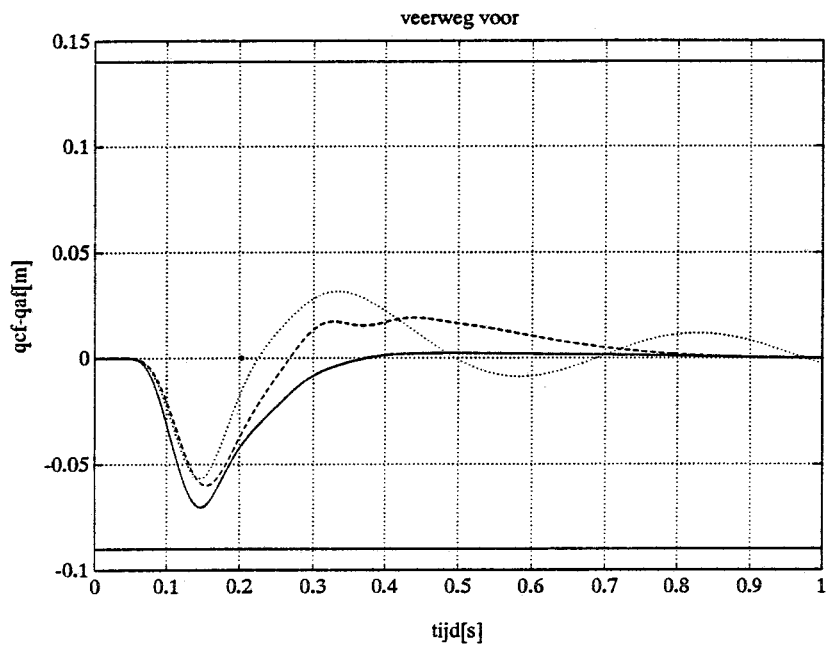
Figuur M.1



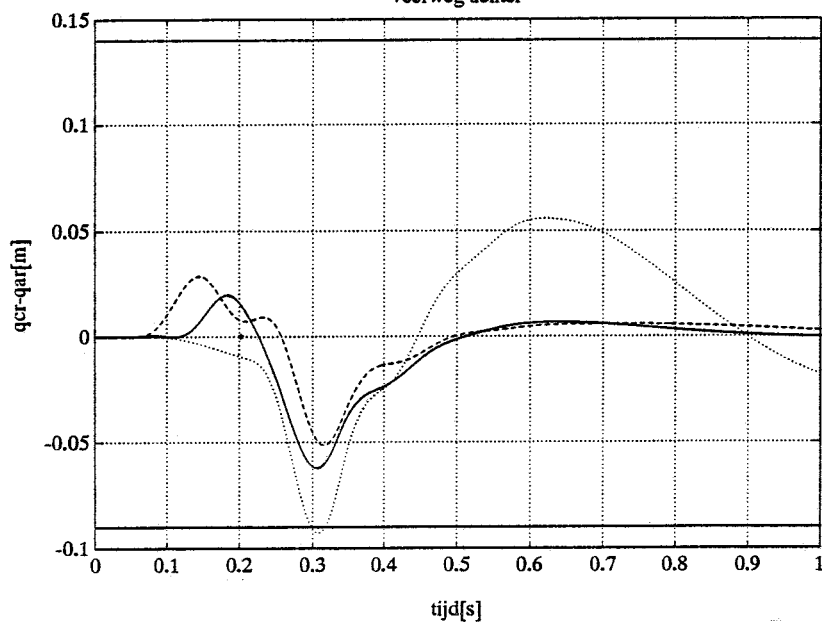
Figuur M.2

Figuur M.1 en M.2: De dynamische bandindrukkingen voor en achter van het passieve systeem en beide actieve systemen.

doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=beperkt teruggekoppeld met L_{bepopt} ; gestippeld=passief



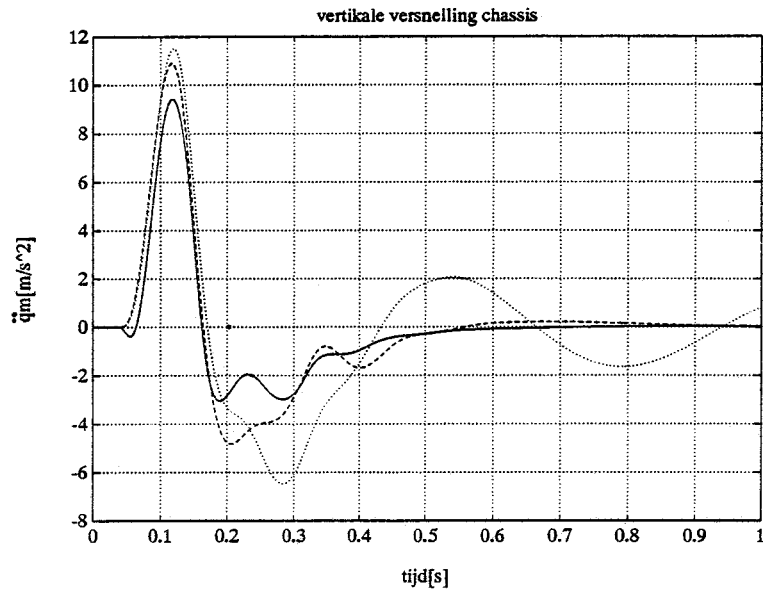
Figuur M.3
veerweg achter



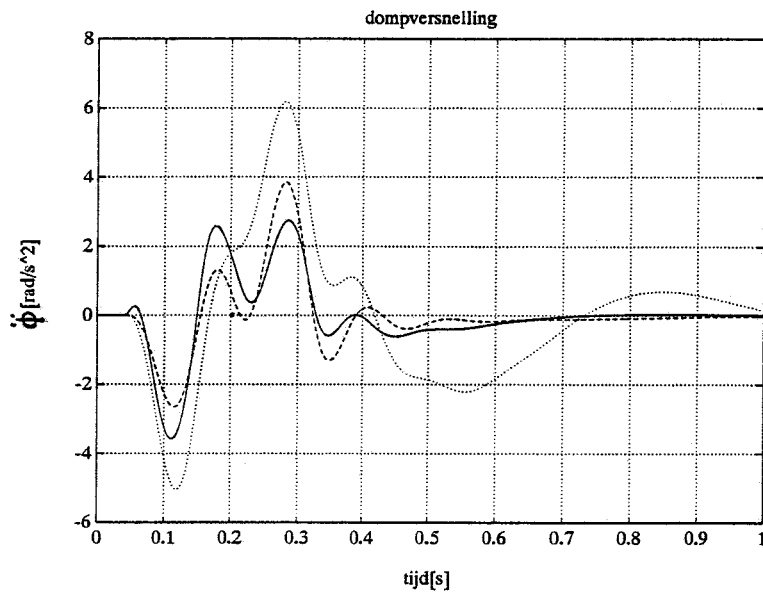
Figuur M.4

Figuur M.3 en M.4: De veerweden voor en achter van beide actieve systemen en het passieve systeem.

doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=bepert teruggekoppeld met L_{bepopt} ; gestippeld=passief



Figuur M.5

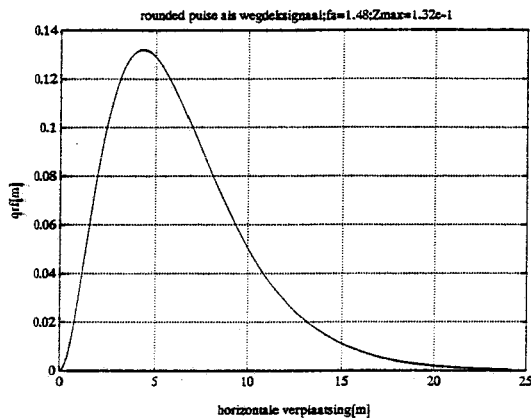


Figuur M.6

Figuur M.5 en M.6: Vertikale versnelling en dampversnelling van beide actieve systemen en het passieve systeem.

doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=beperkt teruggekoppeld met Lbepopt; gestippeld=passief.

Bijlage N. De rounded pulse



wiskundige beschrijving van de rounded pulse:

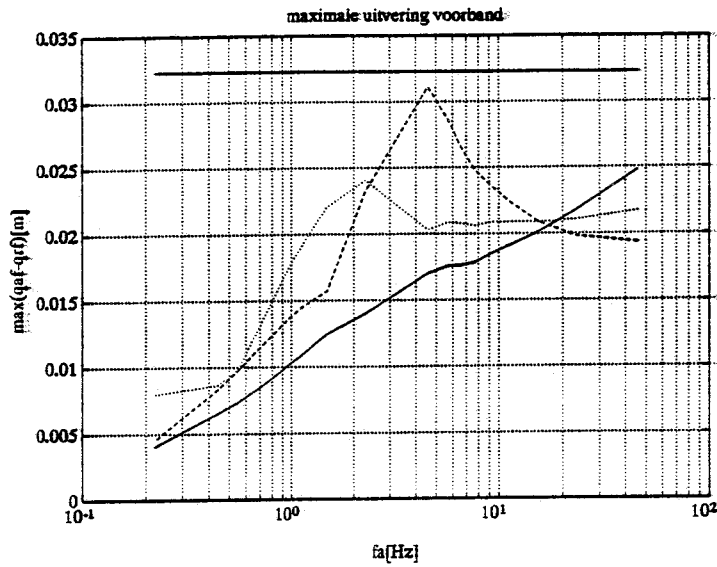
$$q_{sf} = Z_{max}(e^2/4)(2\pi fat)^2 e^{(-2\pi fat)}$$

Figuur N.1: vorm van de rounded-pulse

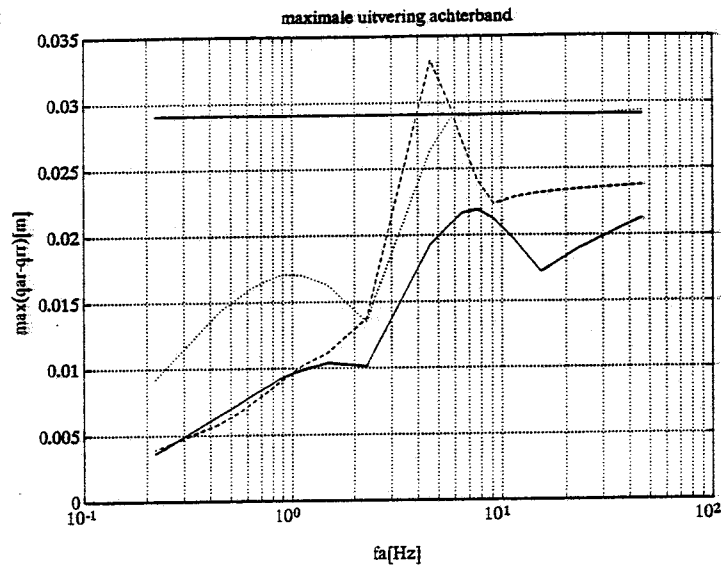
fa[Hz]	Zmax[m]	grens
45.69	0.62e-1	band achter
22.85	0.40e-1	band achter
15.19	0.37e-1	band achter
11.42	0.39e-1	band achter
9.14	0.43e-1	band achter
7.65	0.48e-1	band achter
6.51	0.56e-1	band achter
5.71	0.65e-1	band achter
4.57	0.83e-1	veerweg achter
2.28	1.03e-1	veerweg achter
1.48	1.32e-1	veerweg achter
1.11	1.56e-1	veerweg achter
0.89	1.83e-1	veerweg achter
0.74	2.10e-1	veerweg achter
0.63	2.41e-1	veerweg achter
0.55	2.72e-1	veerweg achter
0.44	3.44e-1	veerweg achter
0.22	8.13e-1	veerweg achter

Tabel N.1: Gebruikte fa en Zmax bij de rounded pulse

Bijlage O. Figuren bij paragraaf 5.3



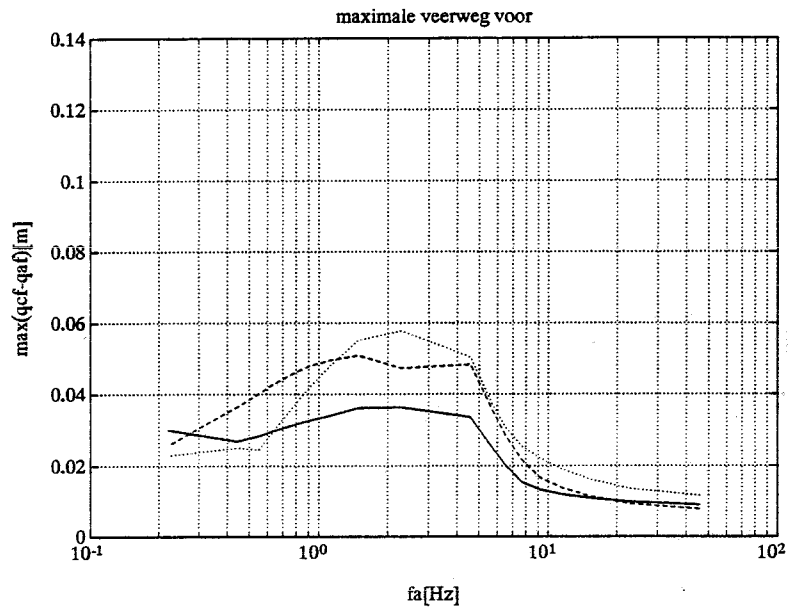
Figuur O.1



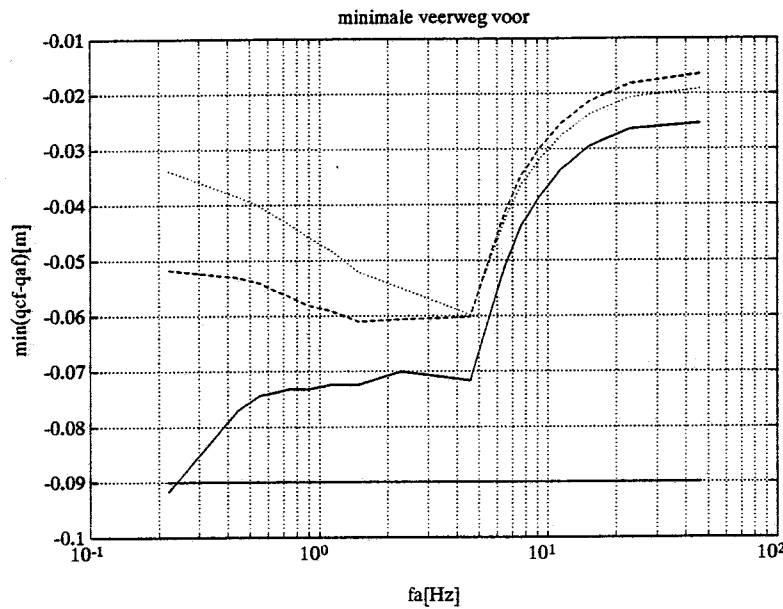
Figuur O.2

Figuren O.1 en O.2: Pieken in de banduitveringen voor en achter bij de actieve systemen en het passieve systeem.

doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=beperkt teruggekoppeld met L_{bepopt} ; gestippeld=passief



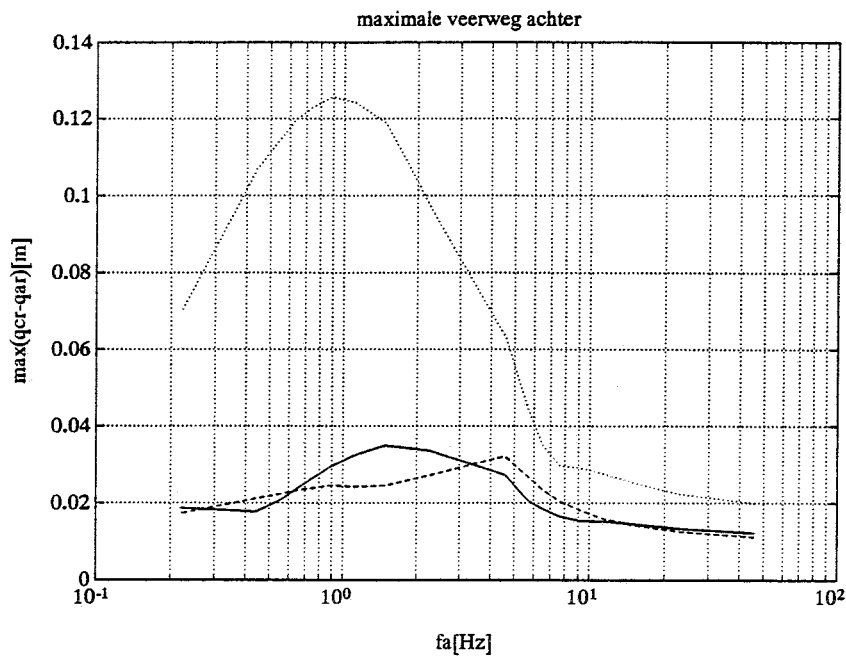
Figuur O.3



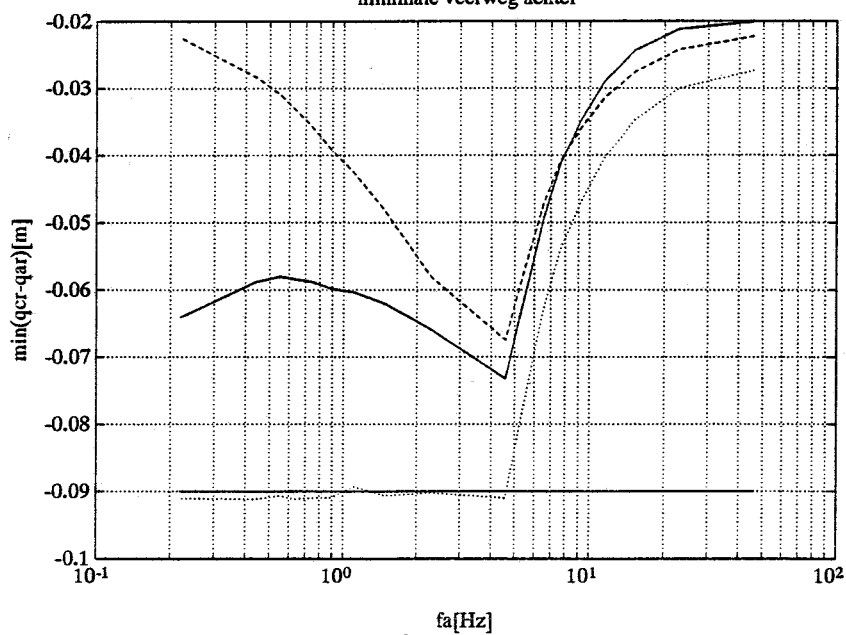
Figuur O.4

Figuren O.3 en O.4: Pieken in de veerwegen voor bij de actieve systemen en het passieve systeem.

doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=bepoort teruggekoppeld met $L_{bepoort}$; gestippeld=passief



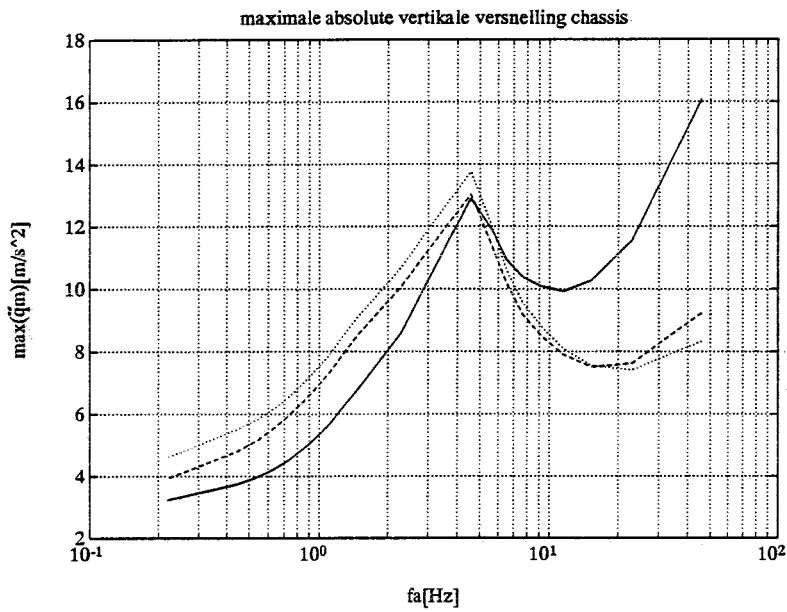
Figuur O.5
minimale veerweg achter



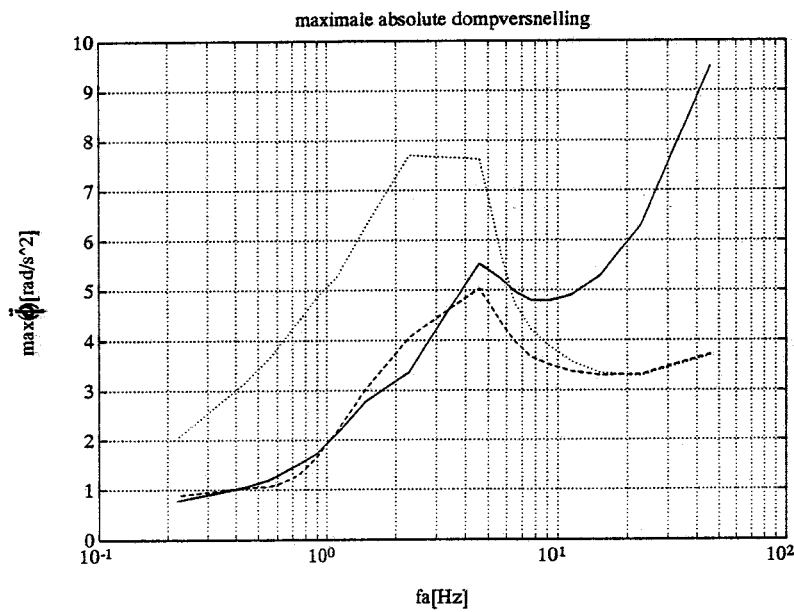
Figuur O.6

Figuren O.5 en O.6: Pieken in de veerwegen achter bij de actieve systemen en het passieve systeem.

doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=beperkt teruggekoppeld met L_{bepopt} ; gestippeld=passief



Figuur O.7

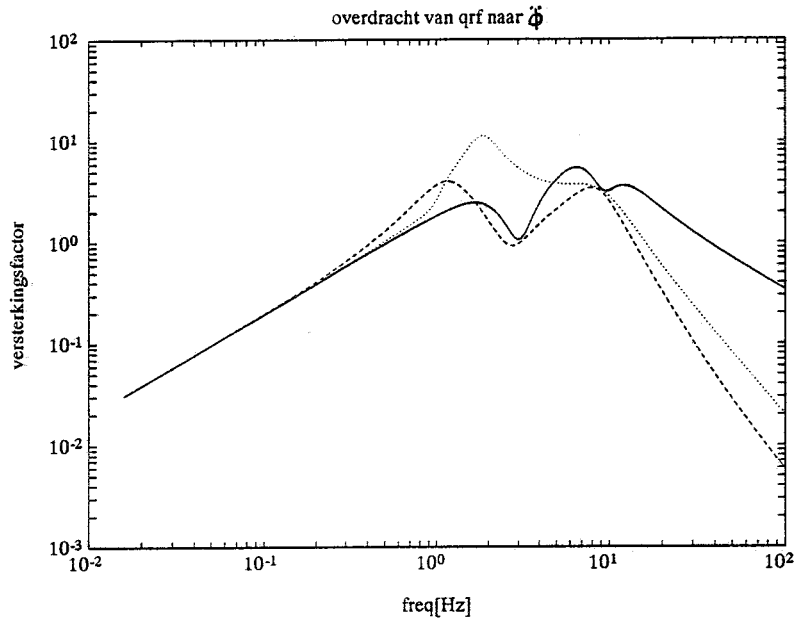


Figuur O.8

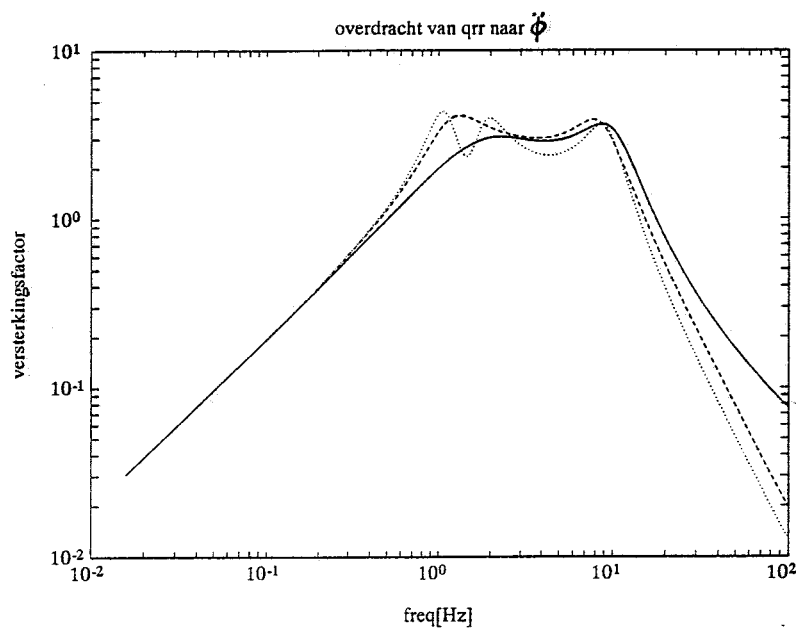
Figuren O.7 en O.8: Pieken in de verticale versnelling van het chassis en de dompversnelling bij de actieve systemen en het passieve systeem.

doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=beperkt teruggekoppeld met Lbeopt; gestippeld=passief

Bijlage P. Overdrachten van het passieve systeem en beide actieve systemen naar de dampversnelling



Figuur P.1



Figuur P.2

Bij **Figuur P.1** en **P.2**: doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=bepert teruggekoppeld met L_{bepopt} ; gestippeld=passief

Bijlage Q. Programmatuur

```

%PROGRAMMA "TKMATRIX"
%VOLLEDIGE & BEPERKTE TOESTANDSTERUGKOPPELING

%toestandsbeschrijving:
%      xpunt=A*x+B*u+E*w
%      y=C*x+D*u
%      z=M*x
%      u=-L*z

%parameters bij half-car model:
ktf=2200000;      %bandstijfheid voor [N/m]
ktr=4400000;      %bandstijfheid achter [N/m]
J=9090;          %traagheidsmoment truck [kg*m^2]
Mt=4778;         %massa truck [kg]
Mc=13268;        %"massa" oplegger [kg]
mf=815;          %wielmassa voor [kg]
mr=1439;         %wielmassa achter [kg]
a=0.518;         %geometrische kenmerken
b=2.732;         %      ,,      ,,
c=0.593;         %      ,,      ,,

f61=(-(a+b-c)*(b-c)*Mc-J)/(Mt*J+(Mt*((b-c)^2)+J)*Mc);
f62=(c*(b-c)*Mc-J)/(Mt*J+(Mt*((b-c)^2)+J)*Mc);
f81=((a+b-c)*Mc+a*Mt)/(Mt*J+(Mt*((b-c)^2)+J)*Mc);
f82=(-c*Mc-b*Mt)/(Mt*J+(Mt*(b-c)^2)+J)*Mc);

%parameteres behorende bij wegdekmodellering met Pade-approximatie
v=20;            %voorwaartse snelheid [m/s]
De=(a+b)/v;a0=1072/(De^4);
a1=536/(De^3);
a2=120/(De^2);
a3=13.55/De;
a4=1;

```

```

%matrices:
%systemmatrix:
A11=[ 0 0 0 0 1 0 0 0
      0 0 0 0 0 1 0 0
      0 0 0 0 0 0 1 0
      0 0 0 0 0 0 0 1
      -ktf/mf 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 -ktr/mr 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0];

A12=[ 0 0 0 0
      0 0 0 0
      -1 0 0 0
      -1 0 0 0
      0 0 0 0
      0 0 0 0
      0 0 0 0
      0 0 0 0];

A21=zeros(4,8);

A22=[ 0 1 0 0
      0 0 1 0
      0 0 0 1
      -a0 -a1 -a2 -a3];

A=[A11 A12
   A21 A22];

%ingangsmatrix:
B1=[ 0 0
      0 0
      0 0
      0 0
      1/mf 0
      f61-a*f81 f62-a*f82
      0 1/mr
      f61+b*f81 f62+b*f82];

```



```
B2=zeros(4,2);

B=[B1
   B2];

%"wegdek"matrix:
E1'=[-1 -1 -1 -1 0 0 0 0];

E2=[          -2*a3
          2*(a3^2)
      -2*a1-2*(a3^3)+2*a2*a3
      4*a1*a3-4*a2*(a3^2)+2*(a3^4)];

E=[E1
   E2];

%uitgangsmatrix:
C1=[ 1  0  0  0  0  0  0  0
     0  0  1  0  0  0  0  0
    -1  1  0  0  0  0  0  0
     0  0 -1  1  0  0  0  0
     0  0  0  0  0  0  0  0
     0  0  0  0  0  0  0  0];

C2=zeros(6,4);

C=[C1 C2];

%doorkoppelmatrix:
D=[ 0  0
    0  0
    0  0
    0  0
    f61 f62
    f81 f82];
```

```
%meetbaarheidsmatrix: bep. toestands.t.k.
M=[-1  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
    0  0 -1  1  0  0  0  0  0  0  0  0
    0  0  0  0 -1  1  0  0  0  0  0  0
    0  0  0  0  0  0 -1  1  0  0  0  0];

%controle van de rang(=8) van de regelbaarheidsmatrix P:
%P=ctrb(A,B);
%Pnew=[10^3*P(:,1:4) P(:,5:8) 10^(-3)*P(:,9:12),...
%      10^(-7)*P(:,13:16),...
%      10^(-10)*P(:,17:20) 10^(-14)*P(:,21:24)];
%rang=rank(Pnew),pause

%doelstelling optimale regeling: min{J=int[y'Qy+u'Ru]}

%weegmatrices:
q1=1e13;
q2=1e13;
q3=1e12;
q4=1e12;
q5=0;
q6=0;

r1=1;
r2=1;

Q=[q1  0  0  0  0  0
   0 q2  0  0  0  0
   0  0 q3  0  0  0
   0  0  0 q4  0  0
   0  0  0  0 q5  0
   0  0  0  0  0 q6];

R=[r1  0
   0 r2];

%uitrekenen van de terugkoppelmatrix Lvol bij volledige
%toestandsterugkoppeling:
```

```

VV=D'*Q*D+R;
FF=A-B*inv(VV)*D'*Q*C;
GG=C'*(Q-Q*D*inv(VV)*D'*Q)*C;
HH=B*inv(VV)*B';
%oplossen van de Riccati vergelijking
FF'*beta+beta*FF-beta*HH*beta+GG=0:
beta=are(FF,HH,GG);
Lvol=inv(VV)*(B'*beta+D'*Q*C);

%bekijken van de polen van het teruggekoppelde systeem:
Avol=A-B*Lvol;
eigAvol=eig(Avol),pause

%uitrekenen van de terugkoppelmatrix Lbep bij beperkte
%toestandsterugkoppeling:

Lbep=Lvol*M'; %stabiliserende beginschatting wanneer nog
               %geenbetere bekend
deltaLbep=norm(Lbep,inf);
%loop die Lbep berekent:

W=1; %intensiteit van de impuls
i=0;
THETA=.1;
Jold=1e15;

while norm(deltaLbep,inf)>.01*norm(Lbep,inf)
normdeltaLbep=norm(deltaLbep,inf);
normLbep=norm(Lbep,inf);
VerhNorm=normdeltaLbep/normLbep

    i=i+1;
    Abep=A-B*Lbep*M;
    Cbep=C-D*Lbep*M;
    CC=Cbep'*Q*Cbep+M'*Lbep'*R*Lbep*M;
    CCC=E*W*E';
    i, THETA
    eigAbep=eig(Abep);
    eigAbep(1:8)

```

```
%oplossen beta: beta*Abep+Abep'*beta=-CC
    beta=lyap(Abep',CC);
%oplossen chi: chi*Abep'+Abep*chi=-CCC
    chi=lyap(Abep,CCC);

%bekijken of J minder wordt
    Jnew=trace(chi*(Cbep'*Q*Cbep+M'*Lbep'*R*Lbep*M));
    deltaJ=Jold-Jnew
    if deltaJ<0
        Lbep=Lbep-THETA*deltaLbep;
        THETA=THETA/2
    else

Lster=(inv(D'*Q*D+R))*(D'*Q*C+B'*beta)*chi*M'*(inv(M*chi*M'));
    deltaLbep=Lster-Lbep;
    Lnew=Lbep+THETA*deltaLbep;
    Lbep=Lnew;
    Jold=Jnew;
    end
end          %"end" van de while-loop

Lbep,pause
Abep=A-B*Lbep*M;
eig(Abep),pause
```

```

%PROGRAMMA "JACOB"
%PROGRAMMA VOOR HET BEPALEN VAN DE MATRICES "Q" EN "R" DIE HET
%VOLLEDIG TERUGGEKOPPELDE SYSTEEM GELIJK MAKEN AAN HET PASSIEVE
%SYSTEEM.

load abcdt.mat    %laden van de benodigde matrices

Lpas=-T;
Lpas=[Lpas(1,:) Lpas(2,:)]';

q1=1e13; q2=1e13; q3=1e12; q4=1e12; q5=0; q6=0;    r1=1;r2=1;

Q=[q1  0  0  0  0  0
   0 q2  0  0  0  0
   0  0 q3  0  0  0
   0  0  0 q4  0  0
   0  0  0  0 q5  0
   0  0  0  0  0 q6];

R=[r1  0
   0 r2];

QR=[Q(1,:) Q(2,2:6) Q(3,3:6) Q(4,4:6) Q(5,5:6) Q(6,6) R(1,:),...
    R(2,2)]';

%oplossen van de Riccati vergelijking:
VV=D'*Q*D+R;
FF=A-B*inv(VV)*D'*Q*C;
GG=C'*(Q-Q*D*inv(VV)*D'*Q)*C;
HH=B*inv(VV)*B';
beta=are(FF,HH,GG);
L=inv(VV)*(B'*beta+D'*Q*C);
L=[L(1,:) L(2,:)]';
while norm((Lpas-L),inf)>0.01*norm(Lpas,inf)
verhnorm=norm((Lpas-L),inf)/norm(Lpas,inf)

```

```

%loop waarin Q en R worden aangepast:
jac=[];
for i=1:24
    i
    %keuze van delta
    if i<22 %i<22: elementen uit Q; i>22: elementen uit R
        if abs(QR(i))>0
            delta=(1e-6)*abs(QR(i));
        else
            delta=(1e-6)*norm(QR(1:21),inf);
        end
    else
        if abs(QR(i))>0
            delta=(1e-6)*abs(QR(i));
        else
            delta=(1e-6)*norm(QR(22:24));
        end
    end
end

QRn=QR+delta*[zeros(1,i-1) 1 zeros(1,24-i)]';

Q=[
    QRn(1:6)'
    QRn(2) QRn(7:11)'
    QRn(3) QRn(8) QRn(12:15)'
    QRn(4) QRn(9) QRn(13) QRn(16:18)'
    QRn(5) QRn(10) QRn(14) QRn(17) QRn(19:20)'
    QRn(6) QRn(11) QRn(15) QRn(18) QRn(20) QRn(21) ];

R=[QRn(22) QRn(23)
    QRn(23) QRn(24)];

%oplossen van de Riccati vergelijking:
VV=D'*Q*D+R;
FF=A-B*inv(VV)*D'*Q*C;
GG=C'*(Q-Q*D*inv(VV)*D'*Q)*C;
HH=B*inv(VV)*B';
beta=are(FF,HH,GG);
lnew=inv(VV)*(B'*beta+D'*Q*C);

```

```

    Lnew=[Lnew(1,:) Lnew(2,:)]';
    deltaL=Lnew-L;
    normdeltaL=norm(deltaL,inf)
    jacnew=deltaL/delta;
    jac=[jac jacnew];
end

%bepalen van nieuw Q en R:
alfa=1;
QR=QR+alfa*(inv(jac))*(Lpas-L);
Q=[
    QR(1:6)'
    QR(2) QR(7:11)'
    QR(3) QR(8) QR(12:15)'
    QR(4) QR(9) QR(13) QR(16:18)'
    QR(5) QR(10) QR(14) QR(17) QR(19:20)'
    QR(6) QR(11) QR(15) QR(18) QR(20) QR(21) ];

R=[QR(22) QR(23)
    QR(23) QR(24)];

jacn=jac; %onthouden van de jacobiaan
Qn=Q; %onthouden van Q
Rn=R; %onthouden van R

eigQ=eig(Q) %eis: eigenw. Q en R >0
eigR=eig(R) %dan positief definit

%oplossen Riccati vergelijkingen:
VV=D'*Q*D+R;
FF=A-B*inv(VV)*D'*Q*C;
GG=C'*(Q-Q*D*inv(VV)*D'*Q)*C;
HH=B*inv(VV)*B';
beta=are(FF,HH,GG);
L=inv(VV)*(B'*beta+D'*Q*C);
L=[L(1,:) L(2,:)]';
end

Q,pause
R,pause

```

Lbep die geen problemen geeft met de banduitvering achter:

Lbepb26=

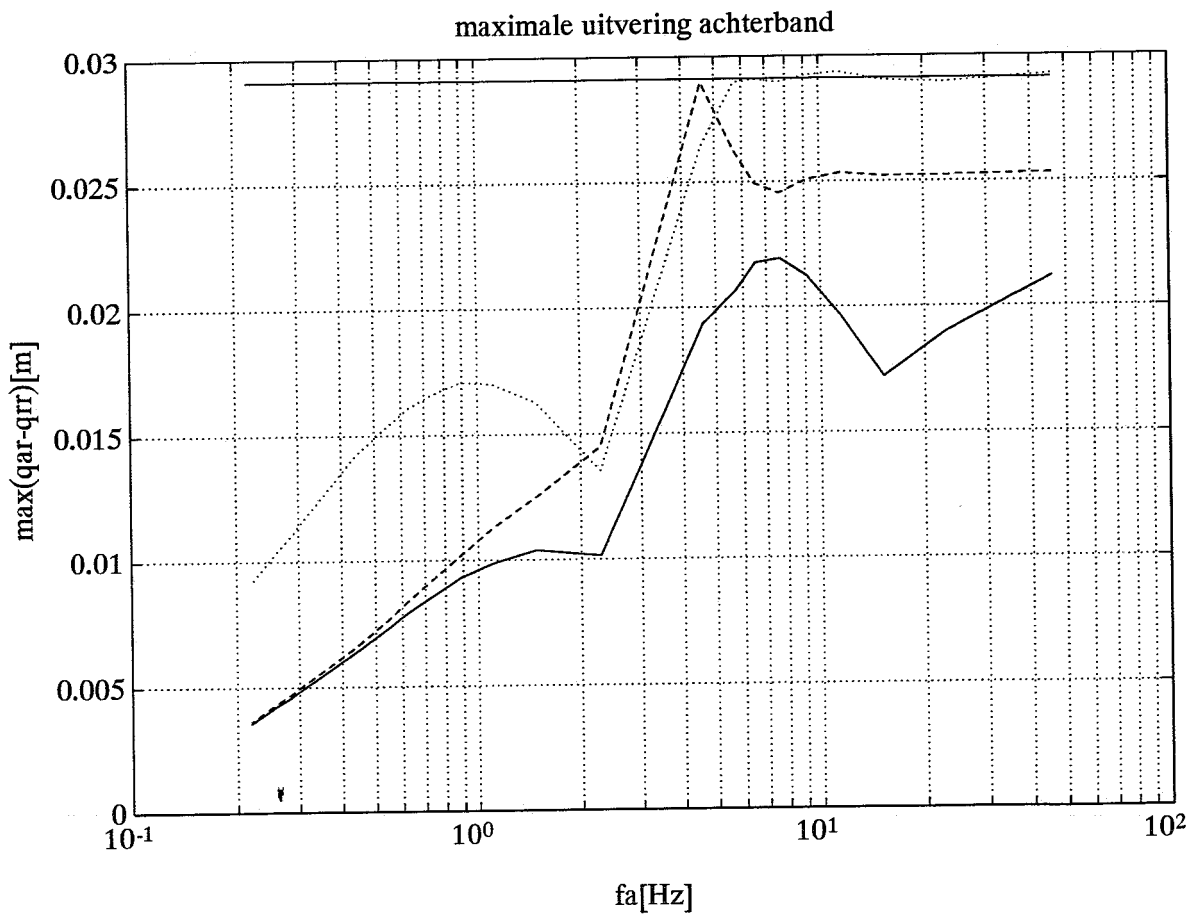
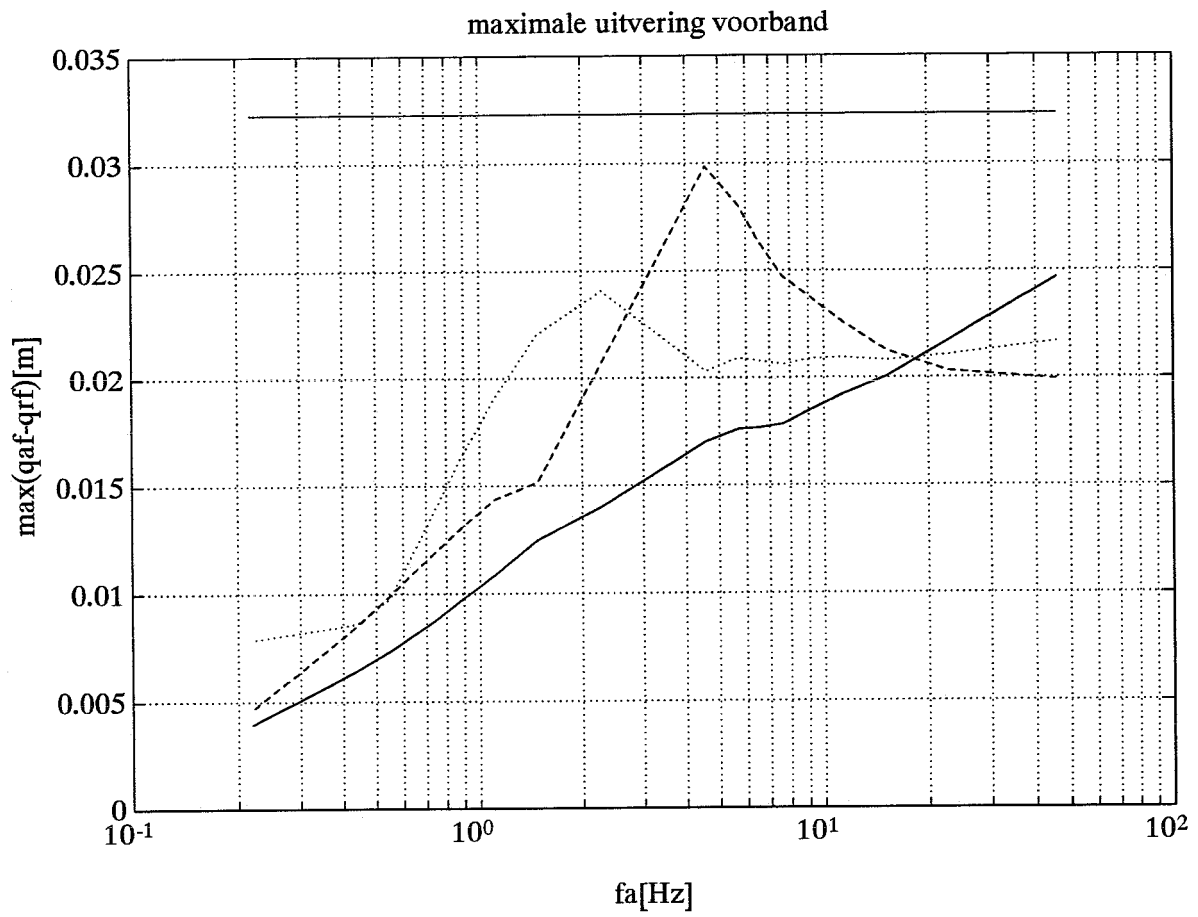
$$Lbepb26 = 1.0e5 \begin{bmatrix} -2.7703 & 0.1119 & -0.5407 & -0.0898 \\ -4.6040 & -3.1093 & -0.7224 & -0.6561 \end{bmatrix}$$

Deze terugkoppelmatrix is tot stand gekomen door fitting op "yvol" gegenereert met afgeronde stap fs=10 en h=0.089 als wegdeksignaal.

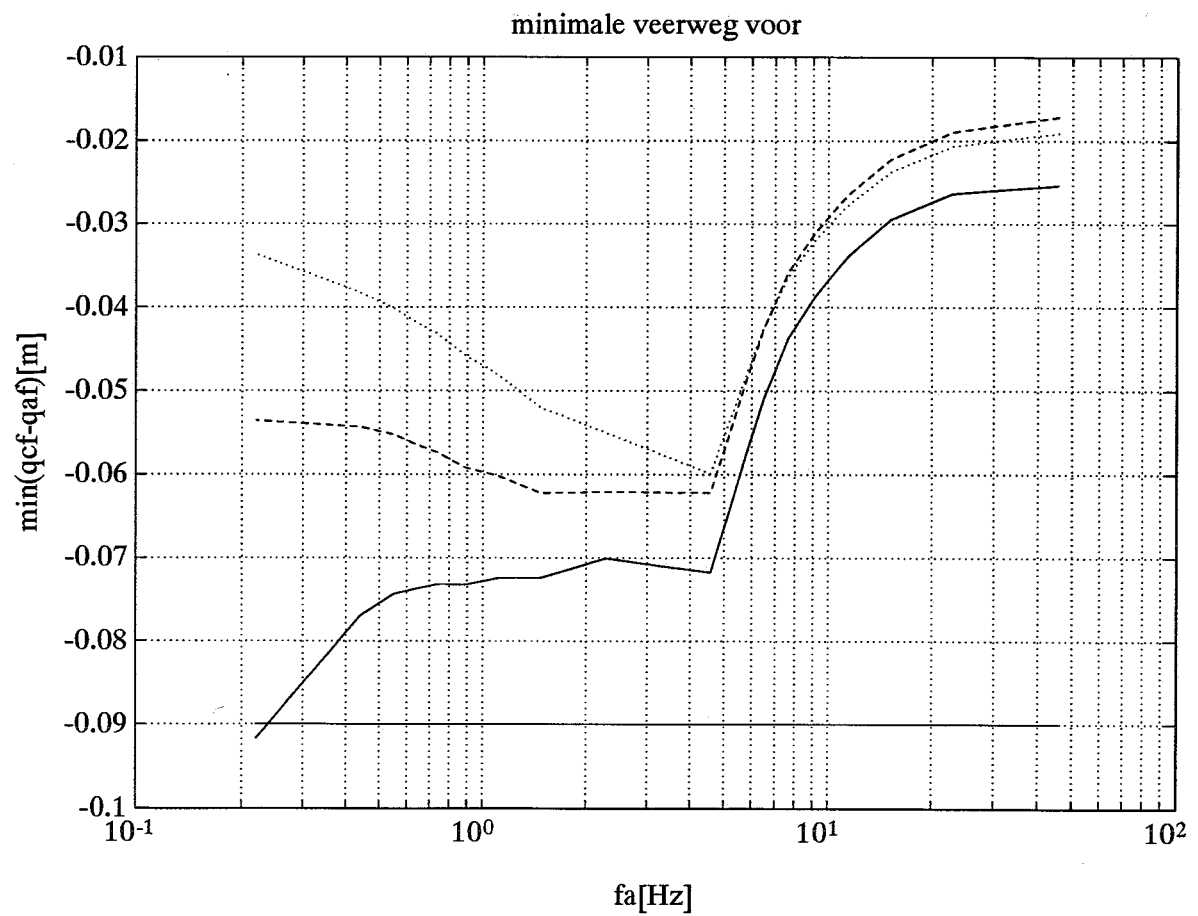
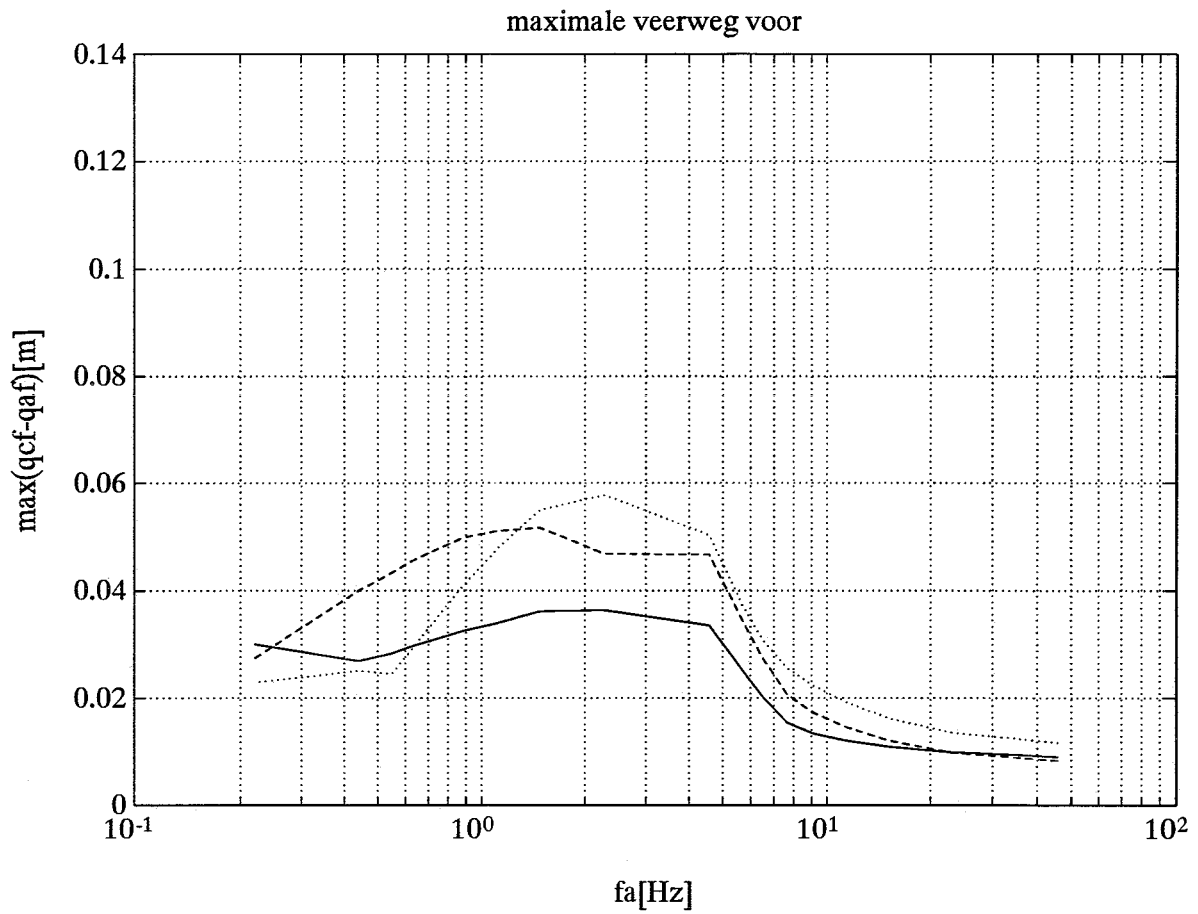
Parameters van de weegfunctie: twissel=0.75, a=5, b=26 i.p.v. 30!

Polen van het teruggekoppelde systeem:

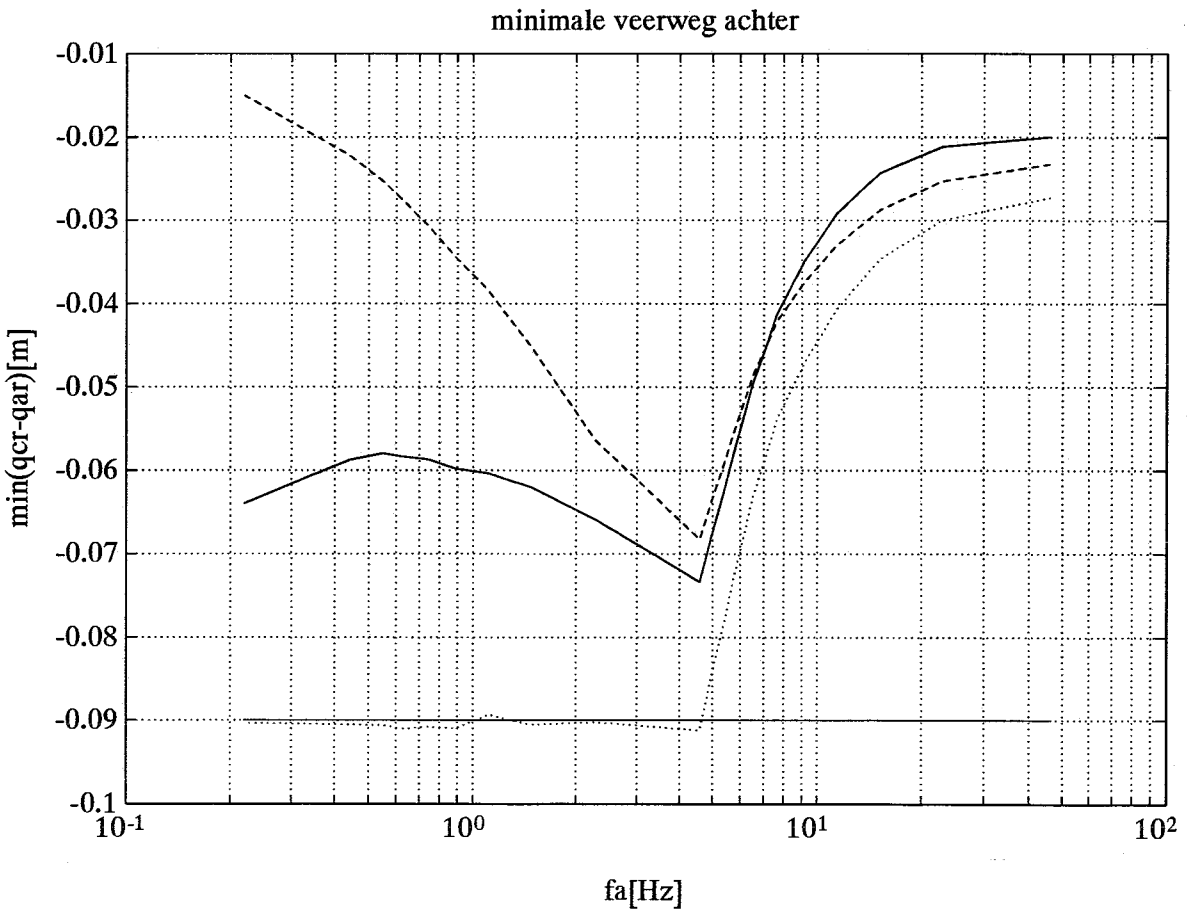
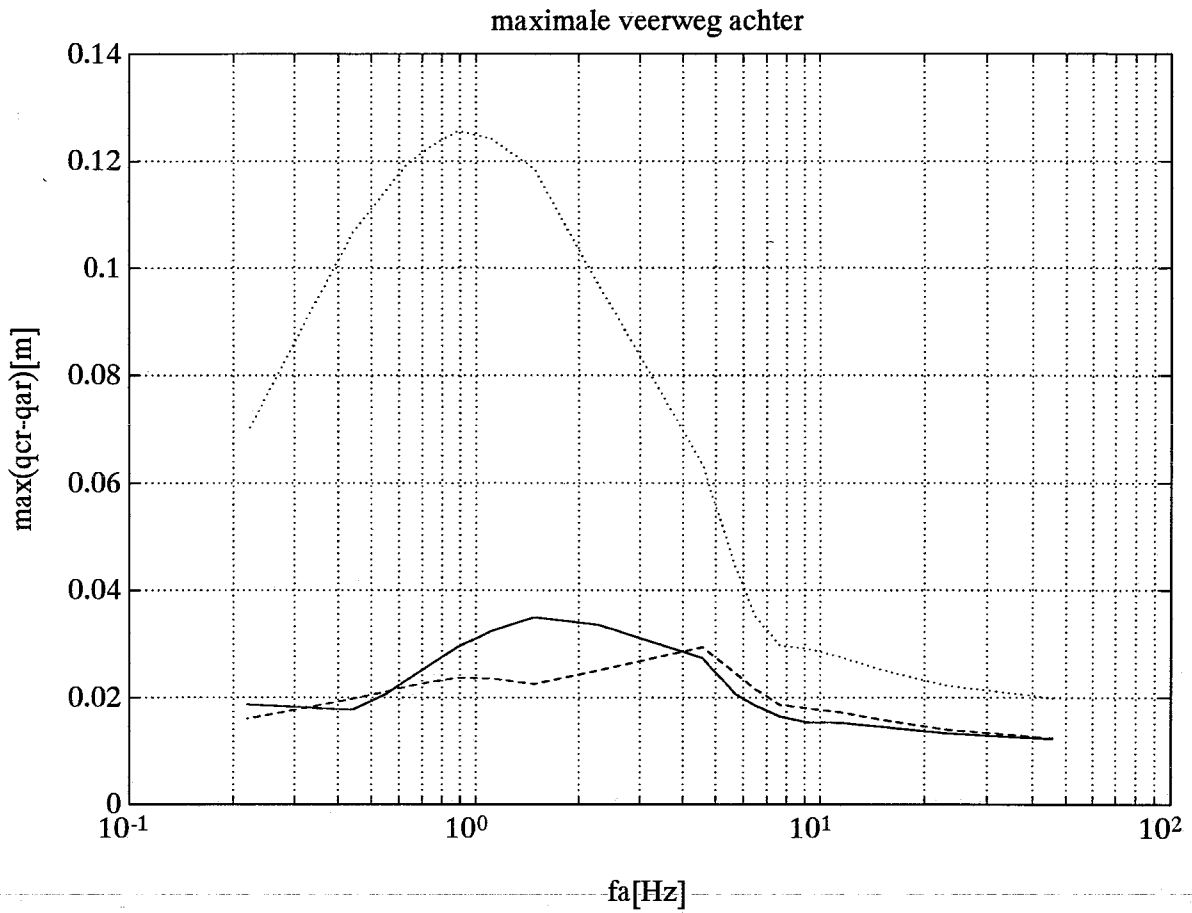
-15.50+52.16i
-15.50-52.16i
-40.58+26.74i
-40.58-26.74i
-5.98+4.54i
-5.98-4.54i
-2.00+6.35i
-2.00-6.35i



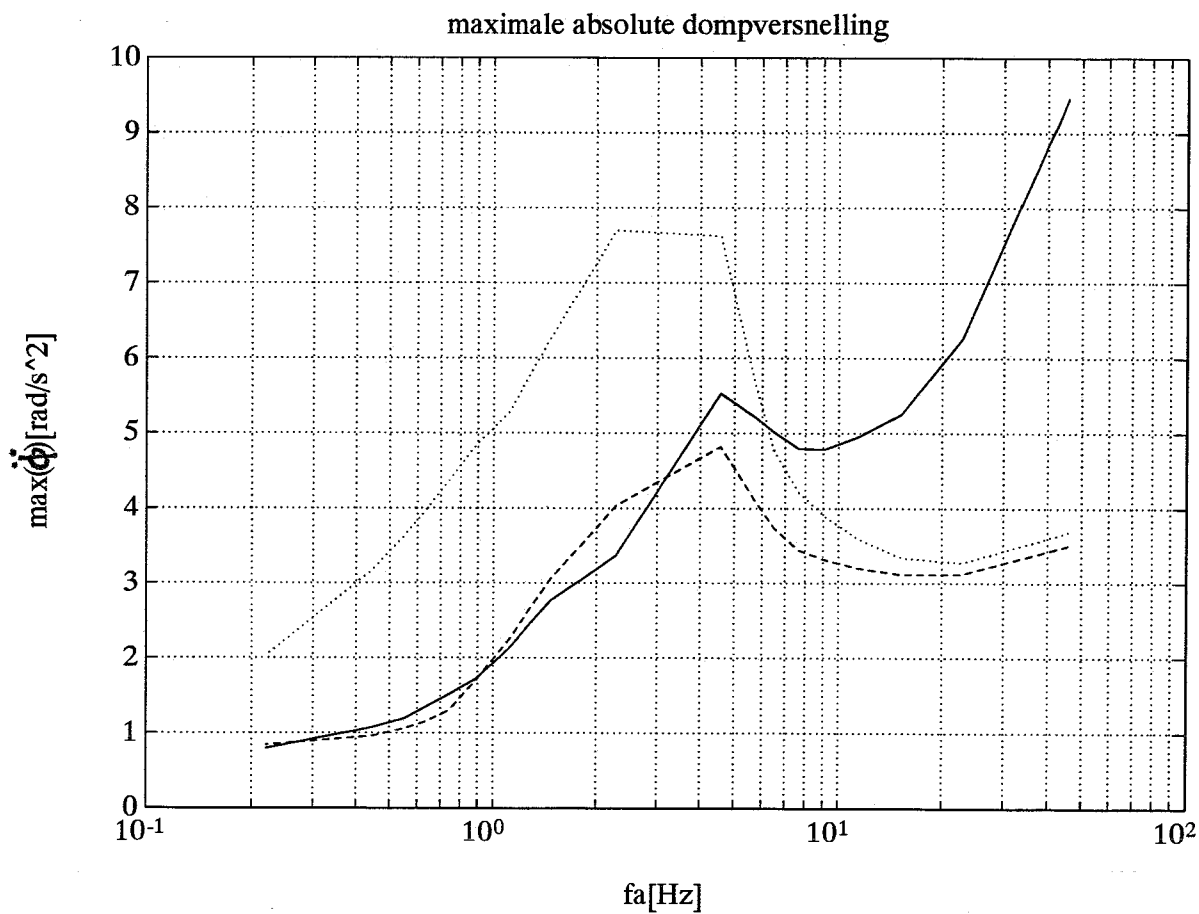
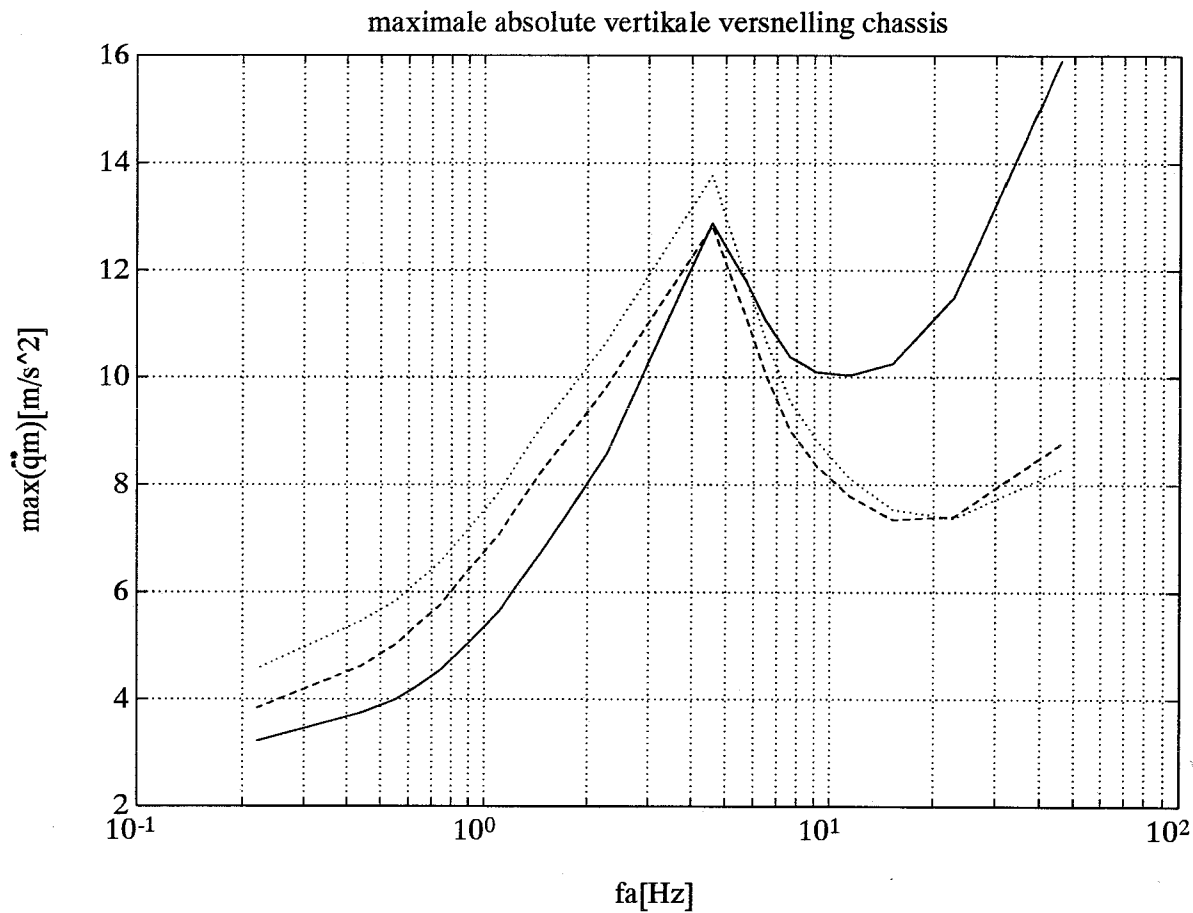
doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=beperkt teruggekoppeld met L_{bepopt} ;
gestippeld=passief



doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=beperkt teruggekoppeld met L_{bepopt} ; gestippeld=passief



doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=bepert teruggekoppeld met Lbepopt;
gestippeld=passief



doorgetrokken=volledig teruggekoppeld; gestreept=beperkt teruggekoppeld met Lbepopt;
gestippeld=passief