

# De vergelijking van het afschuifvlak bij verspanende bewerking

**Citation for published version (APA):**

Mot, E. (1966). *De vergelijking van het afschuifvlak bij verspanende bewerking*. (TH Eindhoven. Afd. Werktuigbouwkunde, Laboratorium voor mechanische technologie en werkplaatstechniek : WT rapporten; Vol. WT0159). Technische Hogeschool Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1966

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.



**technische hogeschool eindhoven**

**laboratorium voor mechanische technologie en werkplaatstechniek**

**rapport van de sectie:** W e r k p l a a t s t e c h n i e k

**titel:**

De vergelijking van het afschuifvlak  
bij verspanende bewerking.

**auteur(s):**

E. Mot

**sectieleider:**

**hoogleraar:**

Prof. Dr. P.C. Veenstra

**samenvatting**

Uitgaande van het feit, dat de spaan bij het loskomen van het werkstukmateriaal kromgebogen wordt, is met behulp van de locale continuïteitsvoorwaarde de vergelijking van het afschuifvlak opgesteld. Voor één geval zijn numerieke waarden berekend. Het blijkt, dat de locale afschuifhoek in de grootteorde van  $\pm 10\%$  kan afwijken van de gemiddelde.

**prognose**

blz. 1 van 7 blz.

rapport nr. 0159

**codering:**

P.7.a1

**trefwoord:**

Verspanings-  
theorie

**datum:**

16 mei 1966

**aantal blz.**

7

**geschikt voor  
publicatie in:**

In het klassieke verspaningsmodel van Merchant (fig. 1) wordt het afschuifvlak als een plat vlak beschouwd. Pekelhaar merkte reeds op, dat dit niet juist is (Metaalbewerking 28 (1963) blz. 433).

Met behulp van een eenvoudige uitbreiding van het model is het mogelijk de vergelijking van het afschuifvlak op te stellen. We gaan er hierbij van uit, dat in elke doorsnede loodrecht op de hoofdsnijkant de deformatietoestand dezelfde is. Het afschuifvlak wordt ten gevolge hiervan een cilindervlak.

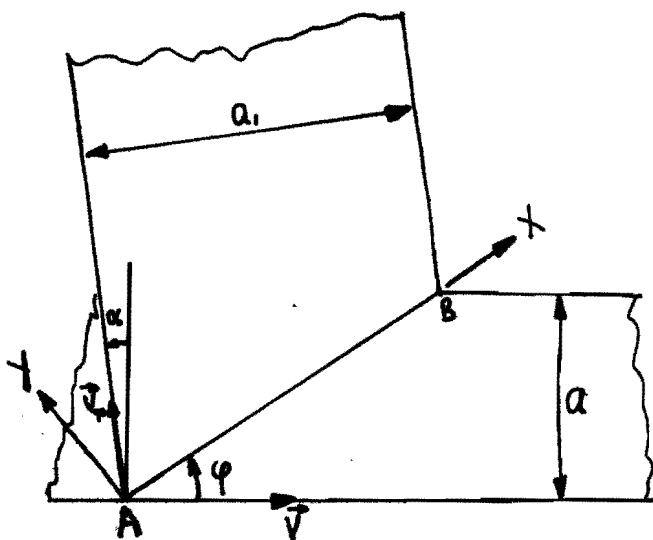


Fig. 1. De snelheid van de spaan langs het spaanvlak volgens het klassieke model van Merchant.

Uit fig. 1 kan worden afgeleid, dat geldt:

$$a_1 = \frac{a \cos(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi} \quad (1)$$

Hierin is:

$a$  = aanzet

$a_1$  = spaandikte

$\varphi$  = afschuifhoek

$\alpha$  = spaanhoek

De verbreding van de spaan in de richting evenwijdig weergegeven door:

$$d_1 = (1 + \Delta_3) d \quad (2)$$

waarin:

$d$  = snedediepte

$\Delta_3$  = gemiddelde maahtrek

$d_1$  = spaanbreedte

Op grond van de incompressibiliteit van het materiaal mogen we stellen, dat in een tijdsinterval  $\Delta t$  een hoeveelheid materiaal met afschuifvlak passeert, waarvoor geldt:

$$a \cdot d \cdot v \Delta t = a_1 d_1 v_T \Delta t \quad (3)$$

substitutie van (1) en (2) in (3) geeft:

$$v_T = \frac{v \sin \varphi}{(1 + \Delta_3) \cos(\varphi - \alpha)} \quad (4)$$

met  $v$  = snijsnelheid

$v_T$  = snelheid van de spaan langs het spaanvlak.

Fig. 1 is echter in strijd met de werkelijkheid:

Ook indien geen spaanbreker aanwezig is, krijgt de spaan een natuurlijke kromming. Dit betekent, dat  $v_T$  bij A (fig. 2) in werkelijkheid een grotere waarde aanneemt dan bij B. Dat kan alleen, indien de afschuifhoek in  $X$ -richting verandert, en wel afneemt, omdat  $v_T$  kleiner wordt bij afnemende  $\varphi$ . Om rekentechnische redenen superponeren we een variabele hoek  $\psi(x)$  op de constante hoek  $\varphi$ .

Deze situatie is in fig. 2 getekend.

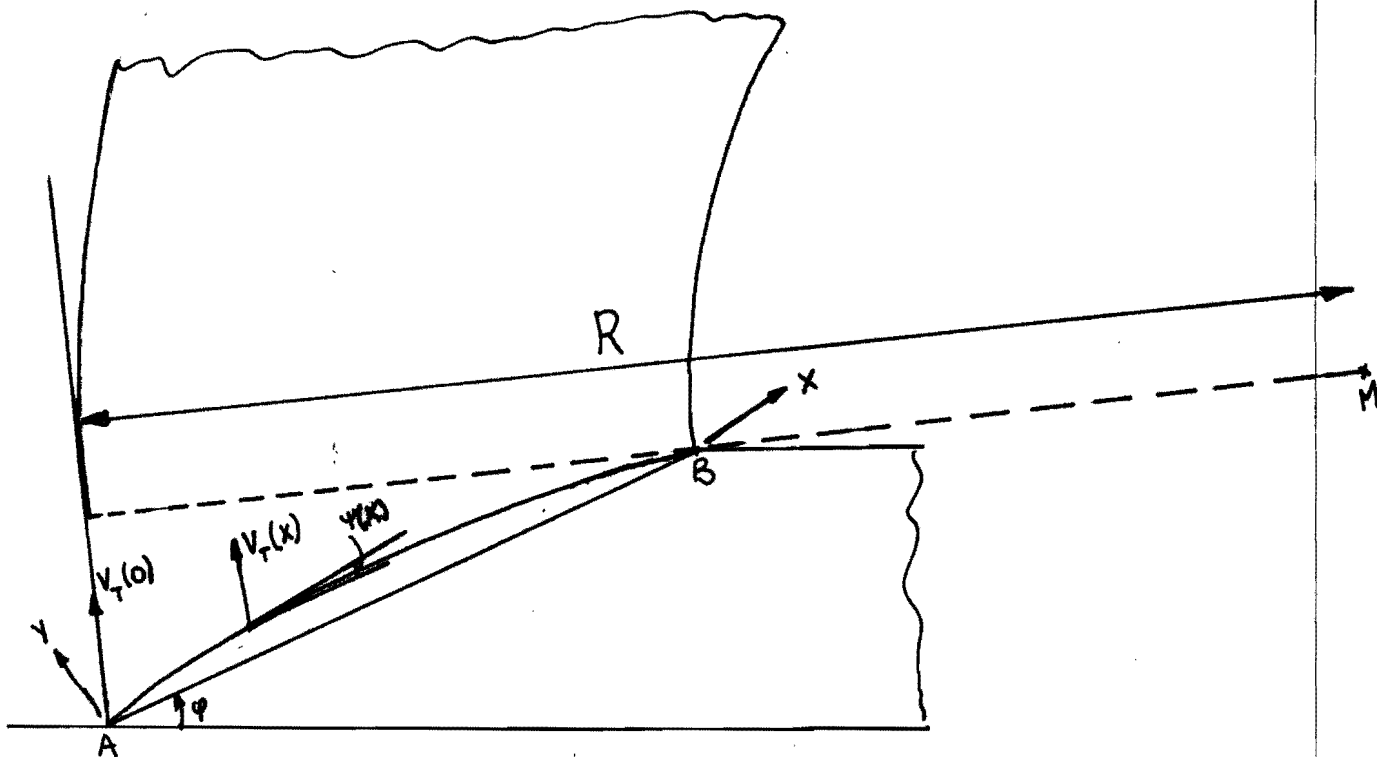


fig. 2. De kromming van de spaan en de snelheidsverdeling van de spaanafloop.

Indien de radius van de aflopende spaan, aan de buitenkant gemeten,  $R$  is, moet uit kinematische overwegingen gelden:

$$v_T(x) = v_T(0) \cdot \frac{R - x \cos(\varphi - \alpha)}{R} \quad (5)$$

Generalisatie van (4) geeft:

$$v_T(x) = \frac{v \sin(\varphi + \psi(x))}{(1 + \Delta_3) \cos(\varphi - \alpha + \psi(x))} \quad (6)$$

Dus ook:

$$V_T(0) = \frac{v \sin(\varphi + \psi(0))}{(1 + \Delta_3) \cos(\varphi - \alpha + \psi(0))} \quad (7)$$

(6) en (7) gesubstitueerd in (5) geeft:

$$\frac{\sin(\varphi + \psi(x))}{\cos(\varphi - \alpha + \psi(x))} = \frac{R - x \cos(\varphi - \alpha)}{R} \cdot \frac{\sin(\varphi + \psi(0))}{\cos(\varphi - \alpha + \psi(0))} \quad (8)$$

$$\frac{\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi}{\cos(\varphi - \alpha) \cos \psi - \sin(\varphi - \alpha) \sin \psi} = \frac{R - x \cos(\varphi - \alpha)}{R} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \psi(0) + \cos \varphi \sin \psi(0)}{\cos(\varphi - \alpha) \cos \psi(0) - \sin(\varphi - \alpha) \sin \psi(0)} \quad (9)$$

Daar  $\psi$  klein is, geldt:

$$\cos \psi \approx 1 \quad (10)$$

$$\sin \psi \approx \psi \approx \tan \psi = \frac{dy}{dx} = y'$$

$$\frac{\sin \varphi + y' \cos \varphi}{\cos(\varphi - \alpha) - y' \sin(\varphi - \alpha)} = \frac{R - x \cos(\varphi - \alpha)}{R} \cdot \frac{\sin \varphi + y'(0) \cos \varphi}{\cos(\varphi - \alpha) - y'(0) \sin(\varphi - \alpha)} \quad (11)$$

Uitwerking van (11) geeft:

$$(y'(0) - y') R \cos \alpha - x \cos(\varphi - \alpha) \{ \sin \varphi + y'(0) \cos \varphi \} \{ \cos(\varphi - \alpha) - y' \sin(\varphi - \alpha) \} \quad (12)$$

of:

$$y' = \frac{-x \cos^2(\varphi - \alpha) \{ \sin \varphi + y'(0) \cos \varphi \} + y'(0) R \cos \alpha}{-x \cos(\varphi - \alpha) \sin(\varphi - \alpha) \{ \sin \varphi + y'(0) \cos \varphi \} + R \cos \alpha} \quad (13)$$

Stel nu:

$$A = -\cos^2(\varphi - \alpha) \{ \sin \varphi + y'(0) \cos \varphi \} \quad (14)$$

$$B = + y'(0) R \cos \alpha$$

$$C = -\cos(\varphi - \alpha) \sin(\varphi - \alpha) \{ \sin \varphi + y'(0) \cos \varphi \}$$

$$D = + R \cos \alpha$$

dan volgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{AX + B}{CX + D} = \frac{A}{C} + \frac{B - \frac{AD}{C}}{CX + D} \quad (14)$$

Stel:

$$\frac{A}{C} = E \quad (15)$$

$$\text{en } B - \frac{AD}{C} = B - ED = F$$

dan geldt:

$$\frac{dy}{dx} = E + \frac{F}{Cx+D}$$

Integratie geeft:

$$y = Ex + \frac{F}{C} \log(Cx+D) + C_1 \tag{16}$$

met randvoorwaarden:

$$y(0) = 0 \quad \text{en} \quad y\left(\frac{a}{\sin\varphi}\right) = 0 \tag{16a}$$

We werken oplossing (16) uit voor een concreet geval:

Stel:

$$\begin{aligned} \varphi &= 30^\circ \\ \alpha &= 10^\circ \\ R &= 5 \text{ mm} \\ a &= 0,6 \text{ mm/omw.} \end{aligned} \tag{17}$$

dan volgt voor (14) en (15)

$$\begin{aligned} A &= -0,4415 - 0,7647y'(0) \\ B &= 4,9240 y'(0) \\ C &= -0,1607 - 0,2783 y'(0) \\ D &= 4,9240 \\ E &= 2,7475 \\ F &= 4,9240 y'(0) - 13,5287 \end{aligned} \tag{18}$$

terwijl  $a/\sin\varphi = 1,2000$

(18) ingevuld in (16) geeft:

$$y = 2,7475x - \frac{4,9240y'(0) - 13,5287}{0,2783y'(0) + 0,1607} \log[ \{-0,1607 - 0,2783y'(0)\}x + 4,9240 ] + C_1 \tag{19}$$

Door invullen van de randvoorwaarden volgt:

$$0 = - \frac{4,9240y'(0) - 13,5287}{0,2783y'(0) + 0,1607} \log 4,9240 + C_1 \tag{20a}$$

$$0 = 2,7475 \times 1,2000 - \frac{4,9240y'(0) - 13,5287}{0,2783y'(0) + 0,1607} \log[ \{-0,1607 - 0,2783y'(0)\}1,2000 + 4,9240 ] + C_1 \tag{20b}$$

0 Uit (20a) en (20b) kunnen  $C_1$  en  $y'(0)$  worden opgelost.

Uit (20a) volgt:

$$5 \quad C_1 = \frac{7,8493y'(0) - 21,5661}{0,2783y'(0) + 0,1607} \quad (21)$$

Substitutie hiervan in (20b) geeft:

$$10 \quad \log(4,731 - 0,3340 y'(0)) - \frac{8,7669y'(0) - 21,0363}{4,9240y'(0) - 13,5287} = 0 \quad (22)$$

Deze vergelijking is op te lossen d.n.v.

successieve approximatie volgens de methode van Newton (bijlage 1)

$$15 \quad \text{Oplossing:} \quad y'(0) = 0,0576 \quad (23)$$

Met (23) volgt voor (21):

$$20 \quad C_1 = 119,4901 \quad (24)$$

De vergelijking van het afschuifvlak wordt dan tenslotte door (23) en (24) in (19) te substitueren:

$$25 \quad y = 2,7475x + 74,9581 \log(-0,1767x + 4,9240) - 119,4901 \quad (25)$$

$$30 \quad \frac{dy}{dx} = 2,7475 - \frac{13,2441}{-0,1767x + 4,9240} \quad (26)$$

Het verloop van het afschuifhoek volgt nu uit onderstaande tabel:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$\frac{dy}{dx}$ (rad)	0,0576	0,0385	0,0184	-0,0014	-0,0215	-0,0415	-0,0622
$\frac{dy}{dx}$ (graden)	3,31°	2,21°	1,06°	-0,08°	-1,23°	-2,38°	-3,36°
werkelijke afschuifhoek	33,31°	32,21°	31,06°	29,92°	28,77°	27,62°	26,44°

Bijlage 1

Oplossen van vergelijking (22)

Stel:

$$z = \log(4,7312 - 0,3340y'(o)) - \frac{8,7569y'(o) - 21,0363}{4,9240y'(o) - 13,5287} \quad (1-1)$$

Differentiëren geeft:

$$\frac{dz}{d(y'(o))} = \frac{-0,3340}{4,7312 - 0,3340y'(o)} + \frac{15,0221}{(4,9240y'(o) - 13,5287)^2} \quad (1-2)$$

Probeer  $y'(o) = 0,1$  Dan volgt:

$$z = \log 4,6978 - \frac{20,1596}{13,0363} = 1,5471 - 1,5464 = 0,0007 \quad (1-3)$$

$$\frac{dz}{d(y'(o))} = \frac{-0,3340}{4,6978} + \frac{15,0221}{13,0363^2} = -0,07110 + 0,08839 = 0,01729 \quad (1-4)$$

De raaklijn bij  $y'(o) = 0,1$  heeft dus de gedaante:

$$z = 0,01729 y'(o) + C_2$$

waaruit  $C_2$  volgt door:

$$0,0007 = 0,01729 \cdot 0,1 + C_2$$

$$C_2 = -0,0010$$

$$z = 0,01729 y'(o) - 0,0010 \quad (1-5)$$

Deze raaklijn snijdt de  $y'(o)$ -as voor :

$$0 = 0,1729 y'(o) - 0,0010$$

$y'(o) = 0,0576$ . Voor  $y'(o) = 0,0576$  volgt met (1-1) :

$z = 0,000002$ . Dit is voldoende nauwkeurig.

De oplossing is dus

$$y'(o) = 0,0576$$