Symmetrie en antimetrie

COLLEGE W_{VI} VAN PROF. IR W.L. ESMEIJER OP 18 MEI 1961

SYMMETRIE EN ANTIMETRIE

1. De "vlakke" symmetrische figuur.

Hieronder verstaan we een symmetrische figuur, eventueel opgebouwd uit meerdere delen, waarvan de zwaartepunten van alle dwarsdoorsneden zich in één vlak bevinden, terwijl ook van al die dwarsdoorsneden één van de hoofdtraagheidsassen in dat vlak ligt.

Uit deze definitie volgt logisch, dat ook de symmetrie-as van de figuur in het genoemde vlak ligt. Tevens volgt hieruit, dat uitwendige belastingen werkend in dit "vlak van de figuur", uitsluitend verplaatsingen in dat vlak tengevolge kunnen hebben.

Volgens Maxwell (wederkerigheidswet) is de verplaatsing in de richting van een eenheidskracht door de invloed van een andere eenheidskracht gelijk aan de verplaatsing in de richting van die tweede eenheidskracht onder invloed van de eerste eenheidskracht.

Als dus de in het vlak van de figuur werkende krachten geen verplaatsingen geven loodrecht op dat vlak, dan zullen de loodrecht op het vlak werkende krachten geen verplaatsingen geven in dat vlak.

Dit geeft ons de mogelijkheid voor een eenvoudiger aanpak van het vervormingsvraagstuk. We kunnen immers de in het vlak van de figuur werkende krachten gescheiden behandelen van de loodrecht daarop werkende. De eerste geven slechts vervormingsgrootheden in het vlak van de figuur en de tweede slechts vervormingsgrootheden loodrecht daarop.

Bij deze scheiding moeten we wel bedenken, dat in het vlak werkende krachten slechts koppels kunnen geven, waarvan de vector loodrecht op het vlak staat. Eveneens kunnen koppels, waarvan de vector in het vlak ligt, slechts veroorzaakt worden door krachten, die loodrecht op het vlak gericht zijn. De momenten van de eerstgenoemde koppels behoren dus tot de in het vlak en de momenten van de laatstgenoemde koppels tot de loodrecht op het vlak werkende belastingsgrootheden.

Voor de vervormingsgrootheden geldt hetzelfde. Een hoekverdraaiing, waarvan de vector loodrecht op het vlak staat, heeft uitsluitend verplaatsing in het vlak tengevolge en wordt dus gerekend tot de vervormingsgrootheden in het vlak. Een hoekverdraaiing, waarvan de vector in het vlak ligt, heeft uitsluitend verplaatsingen loodrecht op het vlak tengevolge en wordt dus gerekend tot de vervormingsgrootheden loodrecht op het vlak.

1.1. Algemene regels voor het behandelen van de verschillende belastingsgevallen.

De vier belastingsgevallen, waarvoor we deze algemene regels willen geven, zijn:

A. Symmetrische belasting in het vlak.
B. Antimetrische belasting in het vlak.
C. Symmetrische belasting loodrecht op het vlak.
D. Antimetrische belasting loodrecht op het vlak.

1.1.1. A. Symmetrische belasting in het vlak.

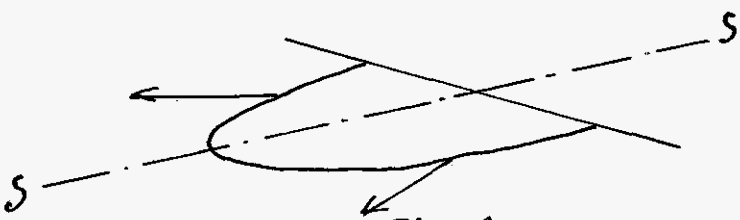

Fig. 1

Door de figuur over een hoek π om de symmetrie-as SS' te draaien krijgen we precies dezelfde toestand terug.

1.1.2. B. Antimetrische belasting in het vlak.

Fig. 2

We kunnen dezelfde toestand slechts terugkrijgen als we na elkaar twee stappen doen, namelijk:
1) de krachten met -1 vermenigvuldigen
2) de figuur over een hoek π om SS' draaien.

1.1.3. C. Symmetrische belasting loodrecht op het vlak.

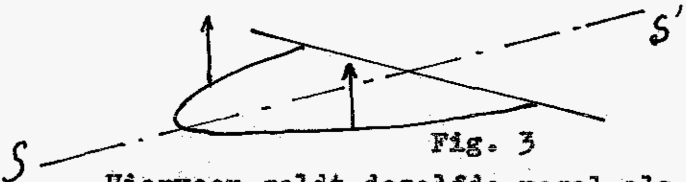

Fig. 3

Hiervoor geldt dezelfde regel als genoemd onder 1.1.2. We hebben twee stappen nodig om dezelfde toestand terug te krijgen, namelijk:
1) de krachten met -1 vermenigvuldigen
2) de figuur over een hoek π om SS' draaien.

1.1.4. D. Antimetrische belasting loodrecht op het vlak.

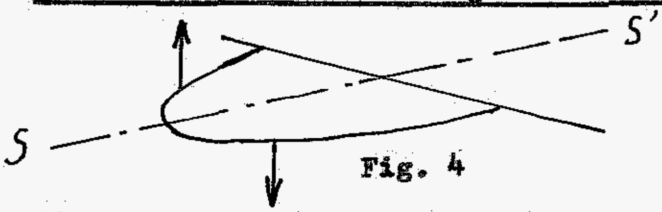

Fig. 4

Hier kan men weer, net als bij het onder 1.1.1. genoemde geval van symmetrische belasting in het vlak van de figuur, volstaan met draaien over een hoek π om de symmetrie-as.

1.2. Algemene richtlijnen voor grootheden in de symmetrie-doorsnede.

We zullen, zowel voor de inwendige belastingsgrootheden als voor de vervormingsgrootheden van de symmetrie-doorsnede, nagaan, welke algemene regels er bij de verschillende belastingsgevallen te formuleren zijn.

1.2.1. Belasting in het vlak.

We hebben hier dus te doen met de twee belastingsgevallen A en B van punt 1.1.
In fig. 5 zijn voor een klein stukje van de figuur, dat zich op de symmetrie-as SS' bevindt, de inwendige belastingsgrootheden aangegeven.

In fig. 6 is hetzelfde gedaan voor de vervormingsgrootheden.

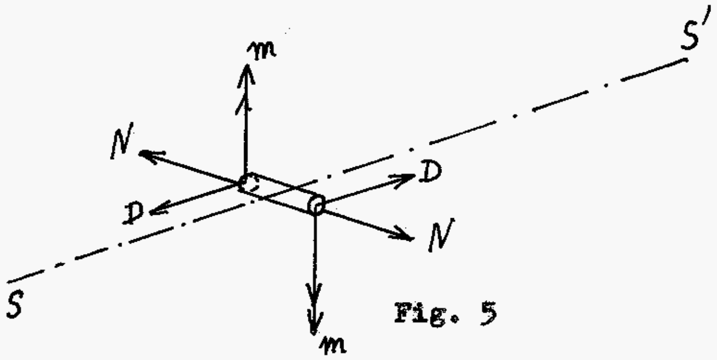

Fig. 5

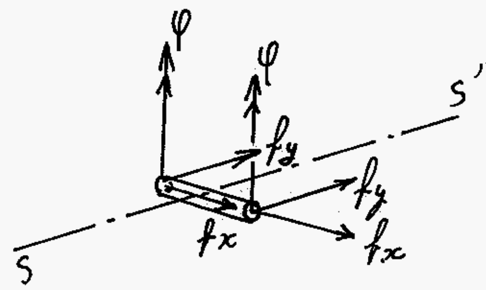

Fig. 6

<u>Voor geval A, symmetrische belasting in het vlak</u>, geldt de voorwaarde:

zelfde toestand terug na draaiïng over hoek π om SS'.

Dus: M en N zijn bestaanbaar, echter D = 0.

En: f_y is bestaanbaar, echter φ en f_x zijn nul.

<u>Voor geval B, antimetrische belasting in het vlak</u>, geldt de voorwaarde:

zelfde toestand terug na twee stappen, namelijk:

1) de krachten met -1 vermenigvuldigen; hierbij keren zowel de inwendige belastingsgrootheden als de vervormingsgrootheden van teken om
2) de figuur over een hoek π om SS' draaien.

Na stap 1 verkrijgen we voor de inwendige belastingsgrootheden de toestand aangegeven in fig. 7 en voor de vervormingsgrootheden de toestand aangegeven in fig. 8.

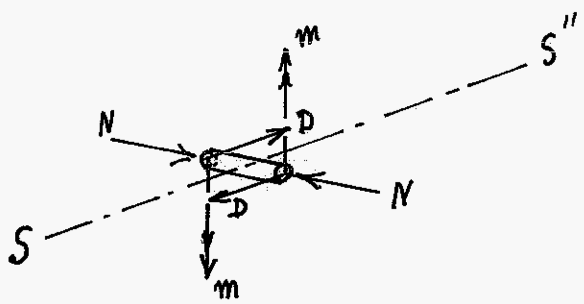

Fig. 7

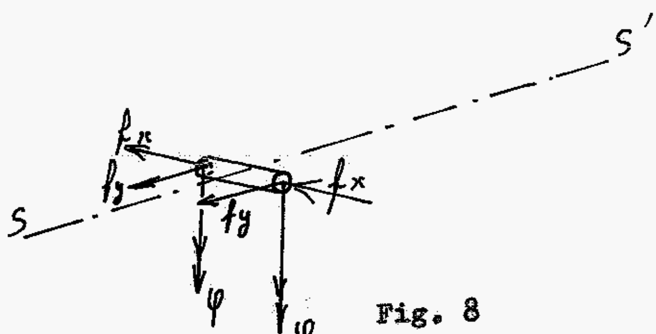

Fig. 8

Het is duidelijk, dat na de tweede stap figuur 7 slechts in overeenstemming met fig. 5 kan zijn, als:
M en N nul zijn.
Alleen D is dus bestaanbaar.

Eveneens is duidelijk, dat na de tweede stap figuur 8 slechts in overeenstemming met fig. 6 kan zijn, als:
$f_y = 0$.
φ en f_x zijn echter bestaanbaar.

1.2.2. Belasting loodrecht op het vlak.

Dit zijn dus de belastingsgevallen C en D van punt 1.1. In fig. 9 zijn voor een klein stukje van de figuur, dat zich op de symmetrie-as SS' bevindt, de inwendige belastingsgrootheden aangegeven.

In fig. 10 is hetzelfde gedaan voor de vervormingsgrootheden.

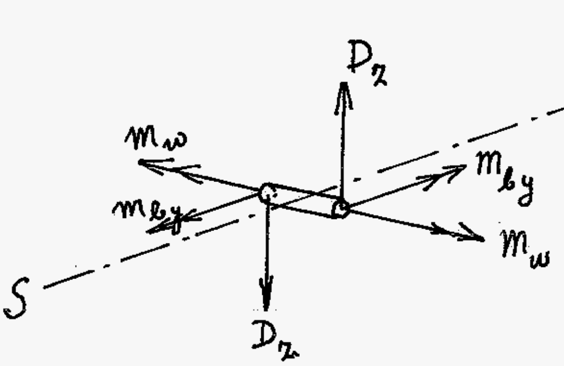

Fig. 9

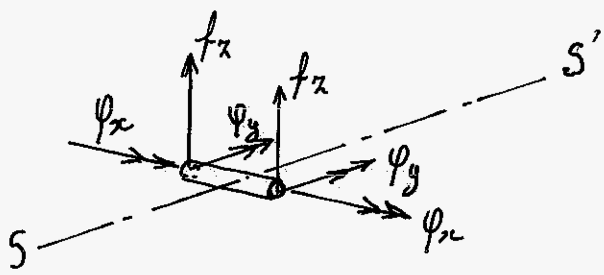

Fig. 10

<u>Voor geval C, symmetrische belasting loodrecht op het vlak,</u> geldt de voorwaarde:

zelfde toestand terug na twee stappen, namelijk:

1) de krachten met -1 vermenigvuldigen, waarbij zowel de belastingsgrootheden als de vervormingsgrootheden van teken omkeren
2) de figuur over een hoek π om SS' draaien.

Na stap 1 krijgen we voor de inwendige belastingsgrootheden de toestand aangegeven in fig. 11 en voor de vervormingsgrootheden de toestand aangegeven in fig. 12.

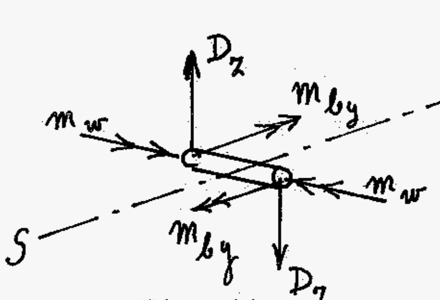

Fig. 11

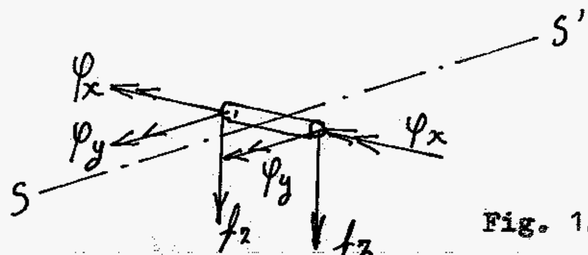

Fig. 12

Het is duidelijk, dat na de tweede stap fig. 11 slechts in overeenstemming met fig. 9 kan zijn, als:

D_z en M_w nul zijn.

Alleen M_{by} is bestaanbaar.

Eveneens is duidelijk, dat na de tweede stap fig. 12 slechts in overeenstemming met fig. 10 kan zijn, als:

φ_y nul is.

φ_x en f_z zijn echter bestaanbaar.

<u>Voor geval D, antimetrische belasting loodrecht op het vlak,</u> geldt de voorwaarde:

zelfde toestand terug na draaien om SS'.

Uit de figuur 9 zien we dus dat:

M_{by} nul moet zijn.

D_z en M_w zijn echter bestaanbaar.

Uit figuur 10 zien we, dat:

f_z en φ_x nul moeten zijn.

φ_y is echter bestaanbaar.

1.2.3. <u>Samenvatting van de resultaten in tabelvorm.</u>

		belastings-grootheden		vervormings-grootheden	
		bestaan-baar	nul	bestaan-baar	nul
Belasting in het vlak	symmetrisch	M en N	D	f_y	φ en f_x
	antimetrisch	D	M en N	φ en f_x	f_y
Belasting loodrecht op het vlak	symmetrisch	M_{by}	D_z en M_w	φ_x en f_z	φ_y
	antimetrisch	D_z en M_w	M_{by}	φ_y	φ_x en f_z

Bij de overgang van symmetrie naar antimetrie en omgekeerd wisselen de grootheden, die bestaanbaar of nul zijn, elkaar dus telkens af.

Eindhoven, 7 juni 1961

J. Bergmans.

dr ir J. Bergmans.