

## Constitutief gedrag van het basismateriaal voor een tussenwervelschijf

**Citation for published version (APA):**

As, van, R. (1992). *Constitutief gedrag van het basismateriaal voor een tussenwervelschijf*. (DCT rapporten; Vol. 1992.065). Technische Universiteit Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1992

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

**stageverslag**

**Constitutief gedrag van het  
basismateriaal  
voor een tussenwervelschijf.**

**WFW-rapport: 92 - 065**

Stageverslag door: Raymond van As  
collegenummer: 243316  
begeleiders: Huib de Heus  
Cees Oomens  
vakgroep: WFW  
datum: juni 1992

## **Samenvatting.**

Dit stageverslag handelt over een onderzoek naar het constitutieve gedrag van een polyether rubber. Dit rubber is gekozen om eventueel toegepast te worden als basismateriaal voor een experimenteel model van de menselijke tussenwervelschijf. Hiervoor is het noodzakelijk te weten wat de mechanische eigenschappen van het materiaal zijn.

Ook is er vastgesteld dat de materiaaleigenschappen aan verandering onderhevig zijn als gevolg van interactie met een vloeistof, hoewel de veranderingen gering zijn gebleken.

Het polyether rubber, van de firma Recticel, vormt de basis van de opgeschuimde proefstukjes, welke in deze stage onderzocht worden. Bij het onderzoek worden twee dichtheden bekeken, te weten  $120 \text{ kg/m}^3$  en  $40 \text{ kg/m}^3$ .

Om tot een geschikt materiaalmodel te komen zijn er verschillende metingen verricht, te weten relaxatie- en kruipproeven, reksnelheidsmetingen en hysteresis. De metingen tonen aan dat aan het materiaal grote rekken opgedrongen kunnen worden, het materiaal slechts geringe relaxatie- en kruipeigenschappen vertoont en bijna reksnelheidsafhankelijk is.

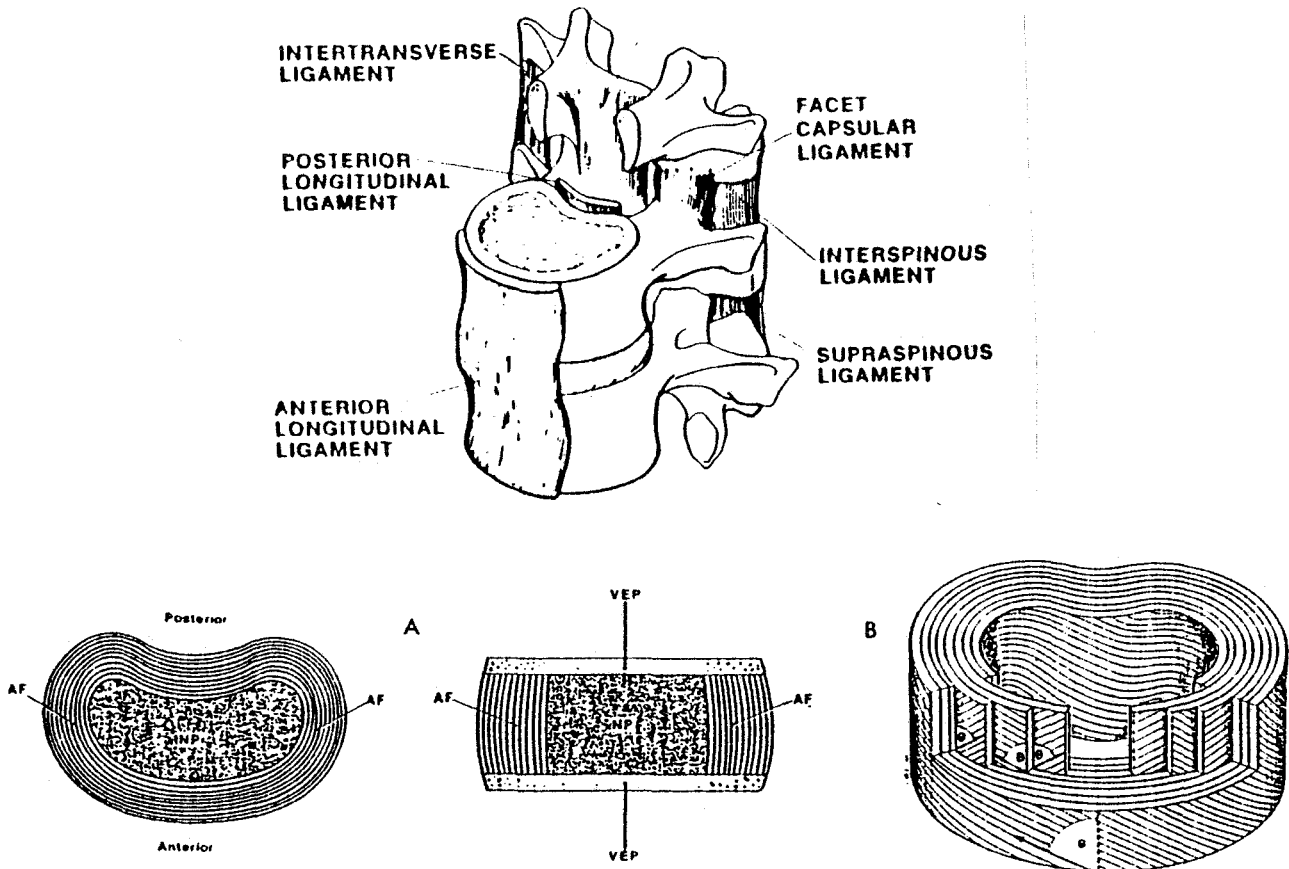
Aan de hand van de uit de metingen verkregen gegevens is getracht met behulp van parameterschatten een model te fitten. In eerste instantie is geprobeerd het materiaalgedrag met een visco-elastisch model te beschrijven. Maar de visco-elastische eigenschappen blijken dermate klein, dat het gevonden formularium weinig toevoegt aan de kennis aangaande het materiaal. Daarom is er verder gezocht naar een geschikt elastisch model, onder andere het Mooney-Rivlin model en een tweede model waarbij er uitgegaan wordt van een lineair verband tussen de tweede Piola-Kirchhoff tensor en de Green-Lagrange rektensor. Dit is tot op heden nog niet gelukt.

# **1.Inhoud.**

Samenvatting . . . . .	2
1.Inhoud . . . . .	3
2.Inleiding . . . . .	4
3.Visco-elasticiteit . . . . .	6
4.Meetconfiguratie . . . . .	18
5.Resultaten . . . . .	21
6.Conclusies . . . . .	25
7. Literatuurlijst . . . . .	26
Bijlagen . . . . .	27
Appendix A . . . . .	45

## 2. Inleiding.

Binnen de vakgroep Fundamentele Werktuigkunde van de Technische Universiteit te Eindhoven werkt men aan de validatie van ontwikkelde numerieke modellen die het gedrag van biologische materialen beschrijven. De validatie vindt plaats door het uitvoeren van experimenten aan een experimenteel model. De tussenwervelschijf (verder TWS genoemd) is één van de aandachtspunten binnen dit onderzoek. De TWS is te vinden in de wervelkolom tussen twee opeenvolgende wervellichamen (zie figuur 1). De TWS is een sterke edoch deformeerbare laag die dient als schokabsorberend lichaam. Om dit te bereiken is de TWS opgebouwd uit twee componenten: een gelatineuze kern, de nucleus pulposus (NP), en een omringende laag van vezelversterkte lamellen gescheiden door een grondsubstantie, de annulus fibrosus (AF). Aan de boven- en onderkant wordt de TWS begrensd door de werveleindplaten. De NP bestaat uit een poreus materiaal welke met vloeistof gevuld is. Deze constructie zorgt ervoor dat het vocht in de NP opgesloten zit en zo fungeert als een schokabsorberende vloeistofbal.



figuur 1: Twee wervellichamen met een tussenwervelschijf.

Als eerste aanzet tot het onderzoek naar de ontwikkeling van een bruikbaar experimenteel model wordt een zeer eenvoudig model geconstrueerd. In deze eerste opzet is als materiaal voor de gelatineuse kern een opgeschuimd poreus rubber<sup>1</sup> gekozen op polyether basis. Dit rubber is er in meerdere dichtheden met verschillende eigenschappen. Als motivatie voor deze keuze kan aangevoerd worden dat het materiaal poreus moet zijn om samen met een nog nader te bepalen vloeistof een goede schokabsorberende werking te verkrijgen. Tevens moet het materiaal elastische eigenschappen hebben zodat het na ontlasten weer in zijn oorspronkelijke vorm terug komt. De specificaties van de leverancier lijken aardig in deze richting te wijzen.

Het doel van deze stage is het meten van de benodigde mechanische eigenschappen, zowel in droge als natte toestand, en aan de hand van de metingen en de daarbij toegepaste modellen tot een uitspraak te komen aangaande de bruikbaarheid van het betreffende materiaal. Het accent komt hierbij te liggen op de uit trekproeven te verkrijgen grootheden als er zijn kruipcompliantie en relaxatiemodulus. Aan de hand van de vergaarde meetgegevens zal getracht worden een numeriek model te fitten op de uitgewerkte grafieken. Dit fitten zal gebeuren aan de hand van een parameterschattingprogramma [1].

1. Voor een overzicht zie bijlage 4.4.

## **3. Visco-elasticiteit.**

### **3.1. Inleiding.**

Visco-elastische materialen zijn materialen die een combinatie van dissipatief, visceus en elastisch gedrag vertonen. In tegenstelling tot materialen met een elastisch gedrag heeft visco-elasticiteit een tijdsafhankelijke factor. Dit komt ook tot uiting in de constitutieve vergelijking van het materiaalgedrag waarin de tijd een belangrijke factor speelt. Bij visco-elastische materialen is de optredende spanning afhankelijk van de vervormingsgeschiedenis. Ook wordt bij deze materialen een deel van de toegevoerde arbeid in het materiaal gedissipeerd als warmte. De beschrijving van visco-elastisch materiaalgedrag met behulp van een constitutief model is niet eenvoudig. Vaak wordt gewerkt met één-dimensionale theorieën. Hiermee zijn uitstekend experimenten te bedenken die met de één-dimensionale modellen beschreven kunnen worden. Bovendien hebben veel materialen een vrij groot gebied waarbinnen ze zich lineair gedragen of waar het gedrag te lineariseren is.

Het nadeel echter van een één-dimensionale benadering is dat het bij veel materialen, met name kunststoffen, de generalisatie vanuit het één-dimensionale theoretische en experimentele model naar drie dimensies zeker niet triviaal is. Dit is natuurlijk een ernstige beperking en vormt nog steeds een punt van wetenschappelijk onderzoek. Tijdens dit onderzoek zal ik mij daarom beperken tot de beschouwing van het één-dimensionale model, de trekproef, en hieraan mogelijke conclusies proberen te verbinden.

In paragraaf 3.2 zal nader ingegaan worden op het één-dimensionaal lineair visco-elastisch gedrag. Dit moet dienen als basis voor het begrip van de overige paragrafen van dit hoofdstuk die zullen handelen over de uitgevoerde experimenten. Hierbij wordt dan met name bedoeld op de theoretische achtergrond van de proeven en de bijbehorende verwachte resultaten op basis van de theorie. De volgende vier experimenten zullen beschreven worden: relaxatie, kruip, reksnelheden en cyclische belasting.

In paragraaf 3.3 volgt een beschrijving van de theoretische achtergronden van het parameterschattingprogramma [1]. Gepoogd wordt met behulp van dit programma een visco-elastisch model met drie constitutieve parameters te fitten op de diverse relaxatie curves.

### 3.2. Eén-dimensionaal lineair visco-elastisch gedrag.

Bij het vinden van een constitutieve vergelijking gaan we uit van een algemene beschrijvingswijze voor het constitutieve gedrag van materialen.

$$\sigma(\xi, t) = N \{ F(\xi, \tau) \mid \tau \leq t \} \quad (1)$$

Er wordt een aantal vereenvoudigde veronderstellingen gedaan om tot een hanteerbare theorie te komen:

- **Eén dimensionaal gedrag.** Door deze aanname worden de tensoren in de vergelijkingen scalars.
- **Mechanische eigenschappen van het materiaal veranderen niet in de loop van de tijd.** Dit betekent dat in de constitutieve relatie de parameters (tijdsconstanten, stijfheden) constant zijn. Deze vereenvoudiging gaat bij dit materiaal waarschijnlijk niet op daar het materiaal onder invloed van UV-licht en vocht verouderd. Echter in het kader van deze stage zal toch deze aanname gedaan moeten worden, daar anders het probleem te complex zou worden.
- **Geometrisch- en fysisch lineair gedrag.** Deze veronderstelling geldt alleen voor kleine rekken binnen het lineaire gebied.

Zoals reeds eerder vermeld is een visco-elastisch materiaal een materiaal dat een tijdsafhankelijk gedrag vertoont. Het materiaal gedraagt zich lineair als aan de volgende twee voorwaarden wordt voldaan:

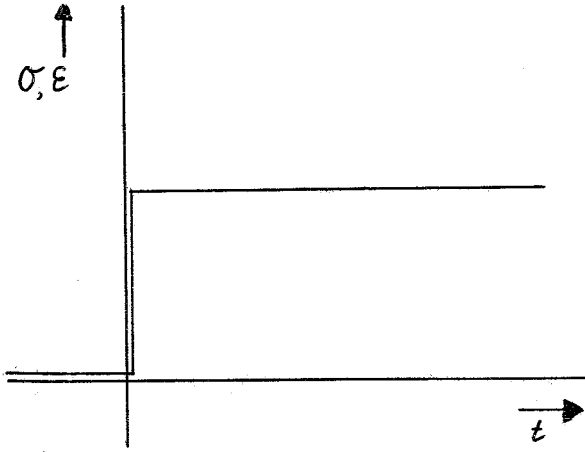
- 1) **Proportionaliteit:** vergroting van de excitatie geeft een proportionele vergroting van de respons. Proportionaliteit wil zeggen dat als bijvoorbeeld de opgelegde rek een factor twee groter is, de spanning ook twee maal zo groot is.
- 2) **Superpositie:** de responsie op gecombineerde excitaties kan worden gezien als de sommatie van de effecten van iedere excitatie afzonderlijk.

#### 3.2.1. Relaxatie.

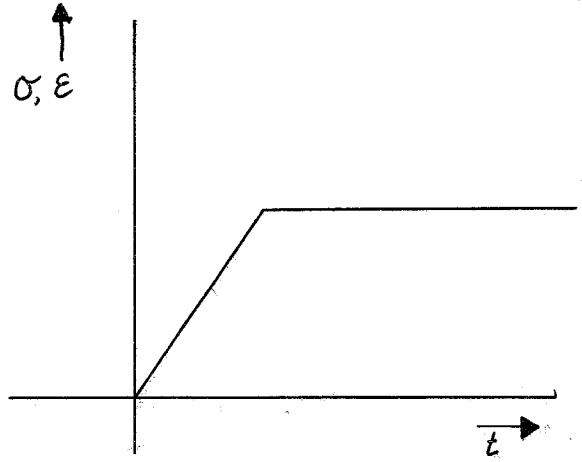
Bij de relaxatieproef wordt aan het proefstuk in een trekbank zo snel als mogelijk een stap in de rek opgedrongen en vervolgens constant gehouden. In het ideale maar theoretische geval gebeurt dit met een stapfunctie (zie figuur 2), in de praktijk echter komt dit neer op de "ramp"functie (zie figuur 3), omdat het fysisch onmoge-



lijk is in één stap een bepaalde waarde te bereiken.

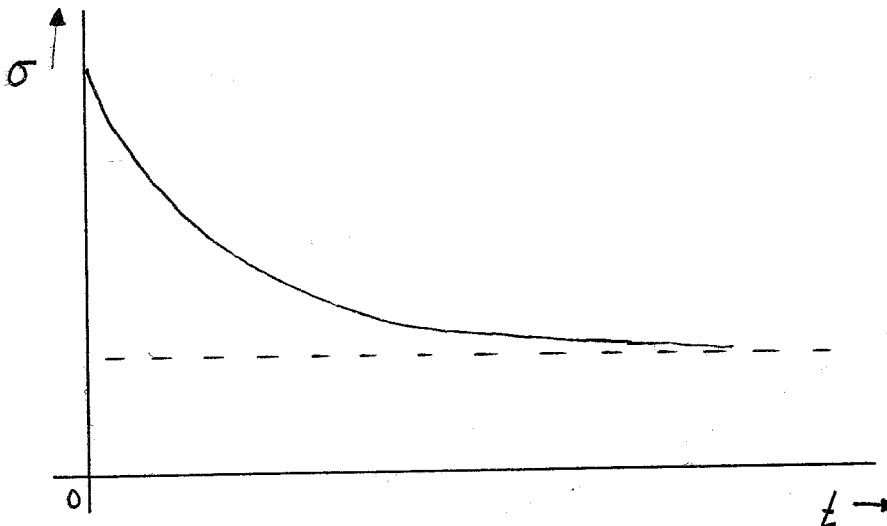


figuur2: Stapfunktie



figuur3: "Ramp"funktie

Het kenmerkende van visco-elastische materialen is nu dat, in tegenstelling tot elastische materialen, de kracht niet constant blijft maar langzaam zal afnemen. Deze spanningsrelaxatie is grafisch te herkennen als een langzaam aflopende lijn. Deze lijn zal in de meeste gevallen asymptotisch naar een evenwichtspanning toe lopen (zie figuur 4).

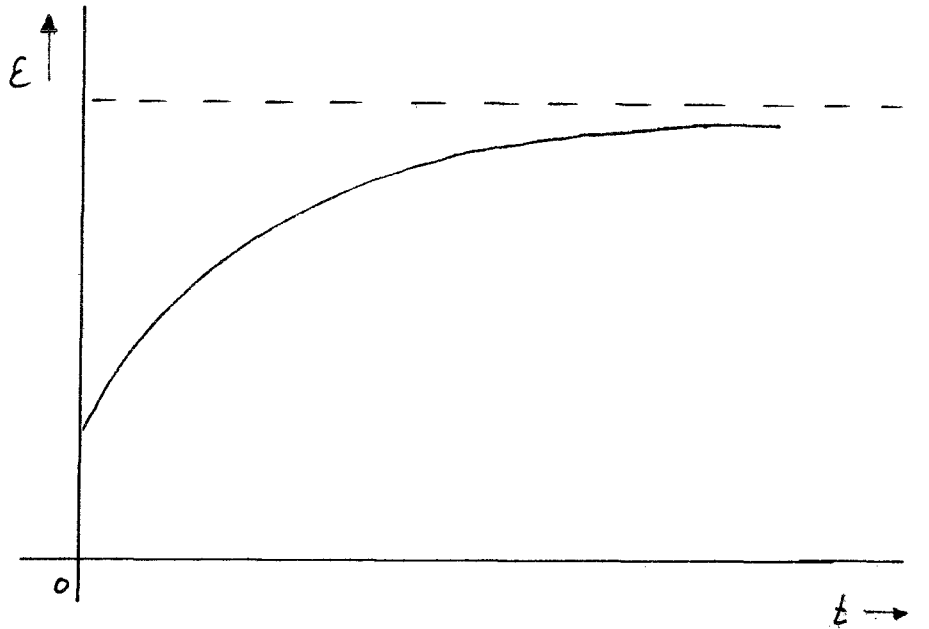


figuur4: Spanningsrelaxatie.

### 3.2.2. Kruip.

Ook bij de kruipproef wordt er met een stapfunctie een input gegeven, alleen bestaat nu de input uit een opgelegde kracht. De vervorming wordt gemeten als functie van de tijd. De kracht wordt konstant gehouden, de responsie is een geleidelijke verlenging van het proefstuk. Dit verschijnsel heet kruip (zie figuur 5).

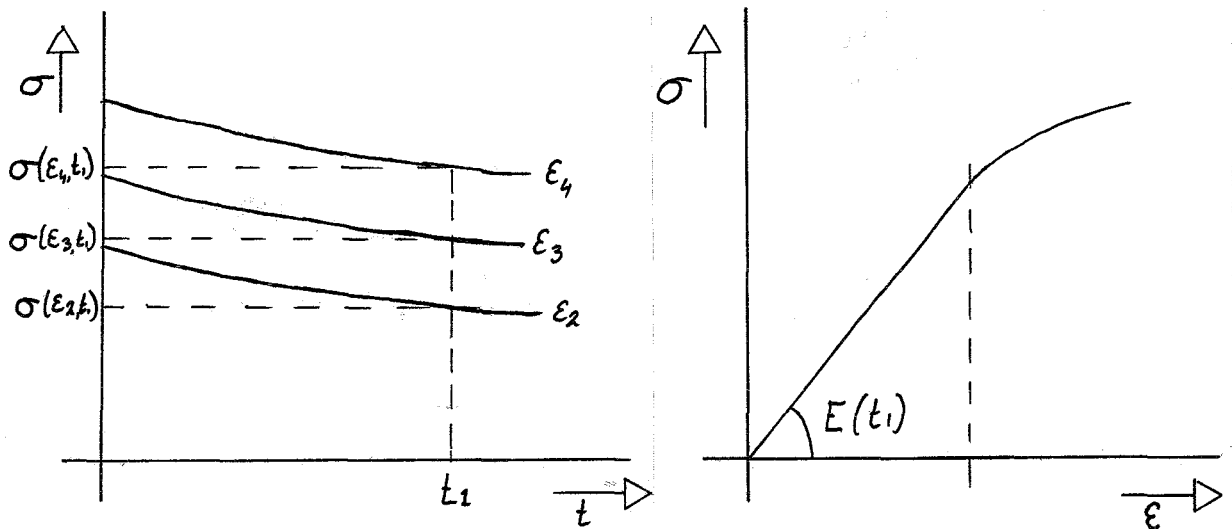
*figuur5: kruipkromme*



Dit kruip- en relaxatiegedrag kan vrij lastig zijn bij het gebruik van visco-elastische materialen binnen bepaalde constructies. Het is daarom ook noodzakelijk te weten in welke mate deze effecten optreden en hoelang.

### 3.2.3. Isochronen.

In deze paragraaf zal beschreven worden op welke wijze het mogelijk is isochronen te construeren uit een aantal relaxatie- en kruipexperimenten. Men zet, aan de hand van een aantal relaxatie- of kruipcurves met verschillende excitaties, de responsie als functie van de excitatie uit op één bepaald tijdstip. In het lineaire gebied moet dit dan leiden tot een rechte lijn (zie figuur 6).



figuur6: constructie isochronen

Isochronen kunnen gebruikt worden om rek-spanning-relaties na lange statische belastingen weer te geven. In de bijlage zijn voor zowel relaxatie als voor kruip de isochronen afgebeeld. Het verband tussen de spanning en de rek is een maat voor respectievelijk de relaxatiemodulus ( $E(t)$ ) en de kruipcompliantie ( $D(t)$ ) op tijdstip  $t$ .

$$\text{Relaxatie: } \sigma(t) = E(t) \varepsilon_0 \quad (2)$$

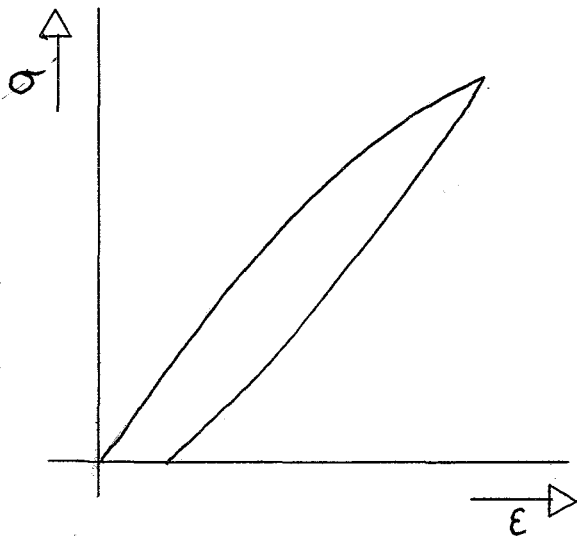
$$\text{Kruip: } \varepsilon(t) = D(t) \sigma_0 \quad (3)$$

Anders dan vergelijkingen (2) en (3) doen vermoeden geldt **niet** dat :

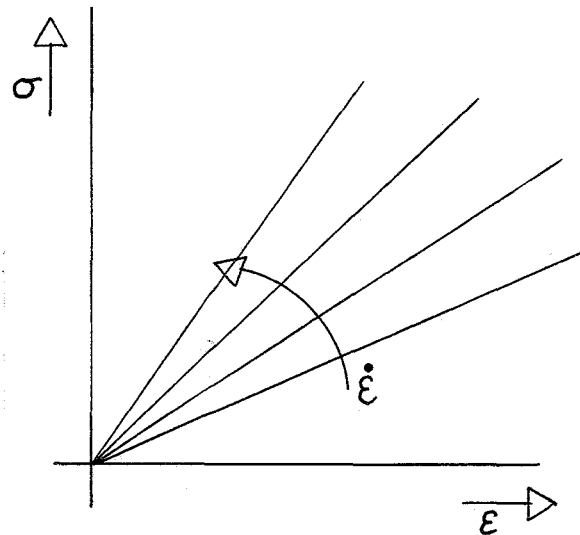
$$E(t) = \frac{1}{D(t)} \quad (4)$$

### 3.2.4. Hysterese.

Een andere kenmerk van visco-elastische materialen is de energiedissiperende eigenschap. Bij oprekking van het proefstuk wordt er energie aan het materiaal toegevoerd. Bij het ontlasten van het materiaal blijkt dat niet al de toegevoerde energie weer vrij komt. Een deel van de energie was opgeslagen als elastische energie en komt weer vrij, een ander deel is in het materiaal gedissipeerd. Deze energiedissipatie komt tot uitdrukking in de hysterese curve, de grafische weergave van de cyclische belasting (zie figuur 7). Het oppervlak begrenst door de heen- en teruggaande lijn is een maat voor de gedissipeerde energie.



figuur7: Hysterese curve



figuur8: Reksnelheid afhankelijkheid

### 3.2.5. Reksnelheden.

Visco-elastische materialen vertonen ook een zekere reksnelheid afhankelijk gedrag. Dit uit zich in het stijver worden van het materiaal bij toenemende reksnelheden. Het toenemen van de stijfheid kan worden verklaard doordat bij toenemende reksnelheid de tijd voor relaxatie verkort wordt. Het materiaal heeft een kortere effectieve tijd om te relaxeren, en zal bij het bereiken van de uiteindelijke maximale belasting dan ook minder gerelaxeerd zijn dan bij lagere reksnelheden.

### 3.3. Parameterschatten.

#### 3.3.1. Schattingsalgoritme.

Het schattingsprogramma maakt gebruik van een recursief algoritme. Dit heeft als effect dat telkens een schatting voor de materiaalparameters wordt gemaakt op basis van een deelverzameling van de meetdata. De schatting wordt bij elke nieuw brokje van de meetdata aangepast. Voor deze werkwijze is gekozen omdat bij tijdsafhankelijke problemen de hoeveelheid meetdata enorm kan oplopen.

Uit een vooronderzoek moet enig idee bestaan over hoe het model dat het materiaal gaat beschrijven eruit ziet. Het model bevat een kolom ( $\hat{a}$ ) met constante parameters, waarvan we de waarde willen bepalen met het experiment. Uit de meting komen meetgegevens beschikbaar die worden weggeschreven in kolommen  $y_i$  ( $i = 1, \dots, k-1, k, k+1, \dots, N$ ). Stel dat op basis van de eerste  $k-1$  kolommen meetdata een schatting  $\hat{a}_{k-1}$  gemaakt kan worden voor de set materiaalparameters, dan kan een nieuwe kolom  $y_k$  aan de meetgegevens toegevoegd worden. We gaan uit van het niet-lineaire systeem:

$$y_k = h_k(a) + v_k \quad (5)$$

Hierin is  $h_k(a)$  een niet-lineaire functie van  $a$  waarmee we de uitgang zouden kunnen berekenen mits we de echte kolom materiaalparameters  $\hat{a}$  kennen. De grootheid  $v_k$  wordt verondersteld een witte ruis te zijn. Hieruit kan het volgende recursieve schema (6) tot en met (8) afgeleid worden:

$$\hat{a}_k = \hat{a}_{k-1} + K_k (y_k - h_k(\hat{a}_{k-1})) \quad (6)$$

$$K_k = P_{k-1} H_k^T (H_k P_{k-1} H_k^T + R)^{-1} \quad (7)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k-1} (I - H_k^T K_k^T) + K_k R K_k^T \quad (8)$$

De matrix  $H_k$  is opgebouwd uit de partiële afgeleiden van de functie  $h_k$  naar de componenten van  $a$  rond  $\hat{a}_{k-1}$ .

Bovenstaand recursieve schema is overgenomen uit een lineaire situatie, met de niet-lineaire matrix  $H_k(a)$ . Dit heeft een aantal consequenties tot gevolg die omzeild kunnen worden met een aantal trucs.

In tegenstelling tot de lineaire situatie,  $h_k$  is dan een lineaire functie van  $\ddot{a}$ , geldt nu niet dat de schatters die met dit schema gevonden worden opgevat mogen worden als minimum-covariantie schatters. Als beste resultaat kan hoogstens verwacht worden dat de schatter dicht bij de werkelijke  $a$  in de buurt komt. Tevens kunnen foute schattingen als gevolg van het gebruik van niet lineaire modellen op bepaalde punten in het iteratieproces volledig uit de hand lopen. Dit kan gebeuren doordat een volgende stap berekend wordt vanuit een verkeerde beginschatting. Een oplossing hiervoor kan zijn om een oude meting een aantal malen te gebruiken voor het "updaten" van de schatter alvorens men overgaat tot het toevoegen van nieuwe meetdata.

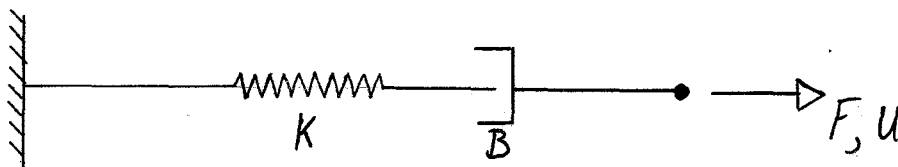
### 3.3.2. Model.

Op basis van het verloop van de relaxatiecurve wordt getracht een lineair-visco-elastisch model te fitten. Evenals bij de relaxatie proef vraagt ook het parameterschattingprogramma om een verplaatsingsveld als input. De output is dan vanzelfsprekend de bijpassende krachtenkolom. Het model waarvoor hier gekozen is ziet er als volgt uit:

$$F(t) = \int_{\tau=0}^t [x_1 + x_2 e^{x_3(t-\tau)}] \frac{du}{d\tau} d\tau \quad (9)$$

In dit model zijn  $x_1$ ,  $x_2$  en  $x_3$  de materiaalparameters. De parameters  $x_1$  en  $x_2$  hebben te maken met de stijfheid van het materiaal (dimensie N/m) en  $x_3$  met de tijdconstante die het materiaal beheerst (dimensie 1/s).

Dit model is afgeleid uit veer-demper modellen. We kunnen twee modellen onderscheiden, het Maxwell model en het Kelvin-Voigt model. Beide modellen zijn gebaseerd op een combinatie van veren en dempers in de vorm van een differentiaalvergelijking waarmee respectievelijk relaxatie en kruip beschreven kunnen worden. Het Maxwell model is een één-dimensionale seriële schakeling van een demper en een veer (figuur 9).



figuur9: Maxwell model

Dit fysische model is te beschrijven met de differentiaalvergelijking:

$$f(t) + \frac{b}{k} \dot{f}(t) = b \dot{u}(t) \quad (10)$$

Voor relaxatie wordt de kracht, die als uitgang fungeert, vrijgemaakt uit de differentiaalvergelijking. Dit levert:

$$f(t) = \int_{\tau=-\infty}^t \{k e^{-\frac{k}{b}(t-\tau)} \dot{u}(\tau)\} d\tau \quad (11)$$

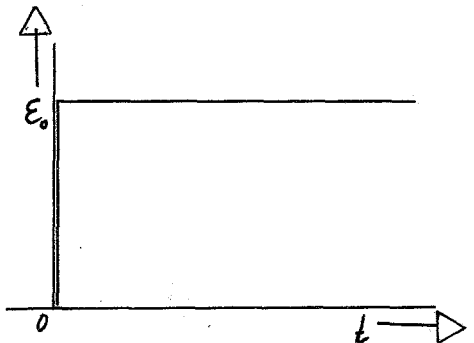
Om het verloop van de kruipcurve te beschrijven is, voor het bestudeerde materiaal, het Maxwell model minder geschikt, want als de kracht verondersteld wordt constant te zijn (de afgeleide is dan nul) dan is de kracht een lineaire functie van een demper en de afgeleide van de verplaatsing. De verplaatsing  $u(t)$  zal hier dus niet verder vrijgemaakt worden. Als we nu voor de verplaatsing als input op  $t=t_0$  een stapfunctie nemen:

$$u(t) = \varepsilon_0 * t ; \Leftrightarrow \dot{u}(t) = \varepsilon_0 \quad (12)$$

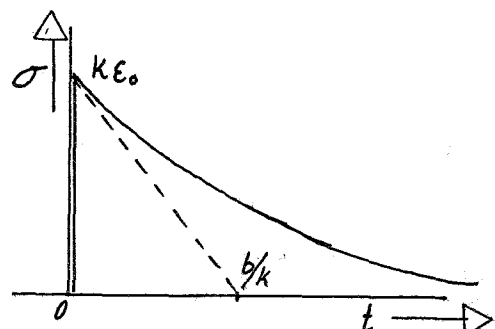
dan geldt voor het spanningverloop het volgende:

$$\sigma(t) = k \varepsilon_0 e^{-\frac{k}{b}t} \quad (13)$$

Hierin is  $(k/b)^{-1}$  de tijdconstante van de relaxatie. Grafisch ziet dit er als volgt uit:



figuur10: Input

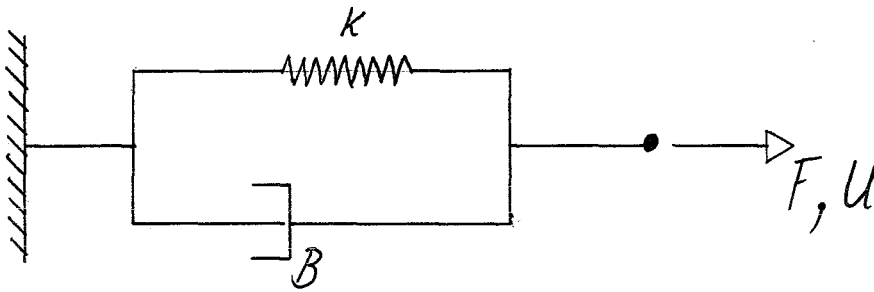


figuur11: Relaxatie

Het tweede model, het Kelvin-Voigt model, gaat uit van een parallelle schakeling van de veer en de demper (zie figuur 12).

Dit leidt tot differentiaalvergelijking (14) (volgende pagina).

Bij een opgelegde verplaatsing zoals hiervoor beschreven is, is eenvoudig te zien dat de kracht naar oneindig zal verlopen. Dit model is dan ook niet geschikt om het



figuur12: Kelvin-Voigt model

$$f(t) = ku(t) + b\dot{u}(t) \quad (14)$$

verloop van de relaxatie te beschrijven. Het model is echter wel geschikt om de kruipcurve te beschrijven. Hiertoe schrijven we eerst de verplaatsing als functie van de tijd.

$$u(t) = \frac{1}{k} \int_{\tau=-\infty}^t \{1 - e^{-\frac{k}{b}(t-\tau)}\} \dot{f}(\tau) d\tau \quad (15)$$

Nemen we nu als input de stapfunctie voor de spanning dan krijgen we het volgende resultaat:

$$\text{stapfunctie: } f(t) = \sigma_0 t \quad (16)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{b}t}) \quad (17)$$

Ook hier is de tijdconstante de inverse breuk van de veerconstante en de dempingscoëfficiënt,  $b/k$ . Formule 16 en 17 zijn weergegeven in figuur 13 en 14.

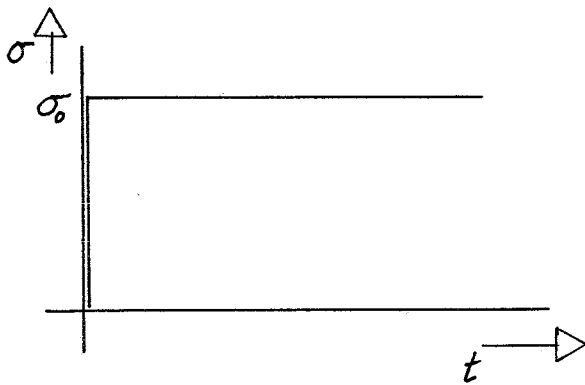
Uit het bovenstaande bleek dat beide modellen slechts één helft van het probleem beschrijven. De gedachte is nu om door de combinatie van beide modellen het volledige probleem te beschrijven. Deze combinatie bestaat uit twee veren en één demper in de volgende configuratie (zie figuur 15):

Dit fysisch model is ook weer met een differentiaalvergelijking te beschrijven:

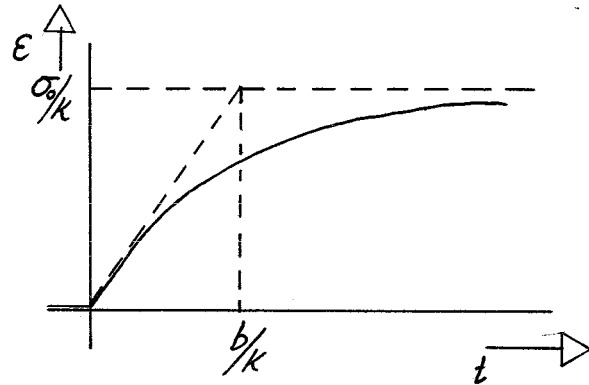
$$f(t) + \frac{b}{s} \dot{f}(t) = pu(t) + \frac{b}{s}(p+s)\dot{u}(t) \quad (18)$$

Oplossen van deze differentiaalvergelijking naar  $f(t)$  en  $u(t)$  voor respectievelijk relaxatie en kruip, levert:

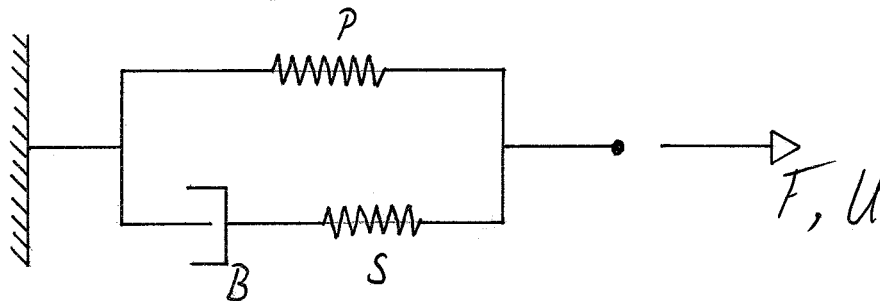




figuur13: Stapfunctie spanning



figuur14: Kruip



figuur15: Standaard lineair model

$$f(t) = \int_{\tau=-\infty}^t \{ \rho + s e^{-\frac{s}{B}(t-\tau)} \} \dot{u}(\tau) d\tau \quad (19)$$

$$u(t) = \frac{1}{\rho} \int_{\tau=-\infty}^t \{ 1 - \frac{s}{\rho+s} e^{-\frac{\rho s}{B(\rho+s)}(t-\tau)} \} \dot{f}(\tau) d\tau \quad (20)$$

Ook nu weer zal de input bestaan uit een stapfunctie, één voor relaxatie en één voor kruip (zie figuren 16, 17, 18 en 19). Het invullen van deze inputs in de formules 19 en 20 geeft de relaties voor relaxatie en kruip die een goede beschrijving kunnen geven van de realiteit.

$$\text{Relaxatie: } \sigma(t) = \epsilon_0 \{ \rho + s e^{-\frac{s}{B}t} \} \quad (21)$$

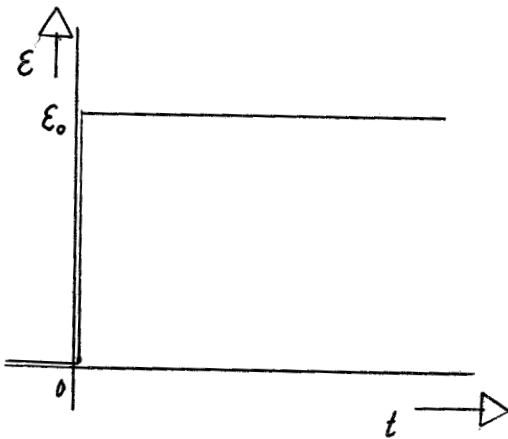
Nu rest nog het leggen van de link tussen het numerieke model en het zojuist afgeleide standaard lineaire model (zie (9) en (19)). Bij vergelijking van deze twee

$$\text{Kruip: } \epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\rho} \left\{ 1 - \frac{s}{p+s} e^{-\frac{p}{b(p+s)}t} \right\} \quad (22)$$

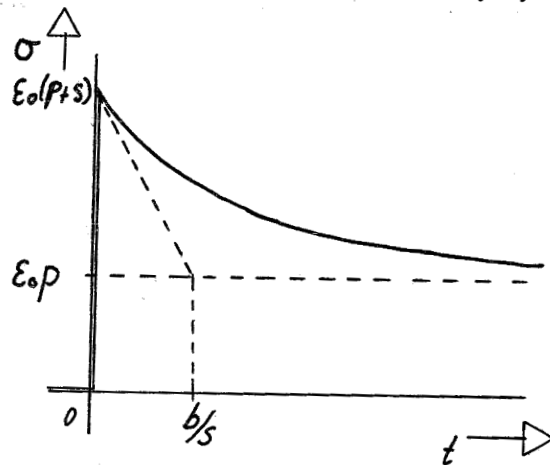
formules blijken de te schatten parameters  $x_1$ ,  $x_2$  en  $x_3$  overeen te komen met de volgende fysische grootheden:

$$x_1 = \rho; \quad x_2 = s; \quad x_3 = -\frac{s}{b} = -\frac{1}{\tau}; \quad (23)$$

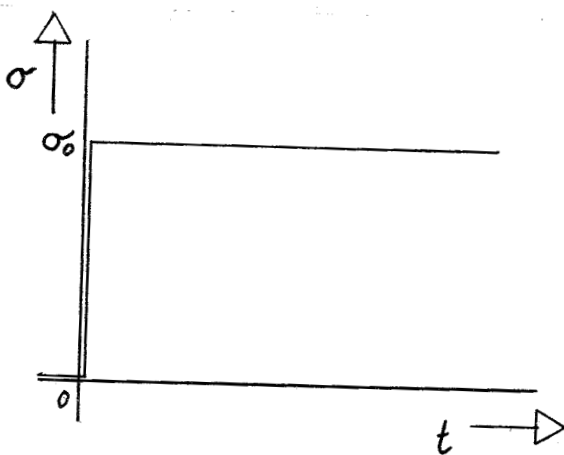
Dit wil derhalve zeggen dat  $x_1$  en  $x_2$  staan voor de twee veerconstanten en  $x_3$  voor de inverse karakteristieke relaxatietijd. Als nu de drie schattingsparameters bekend zijn kan het spanningverloop bij relaxatie beschreven worden met formule (21).



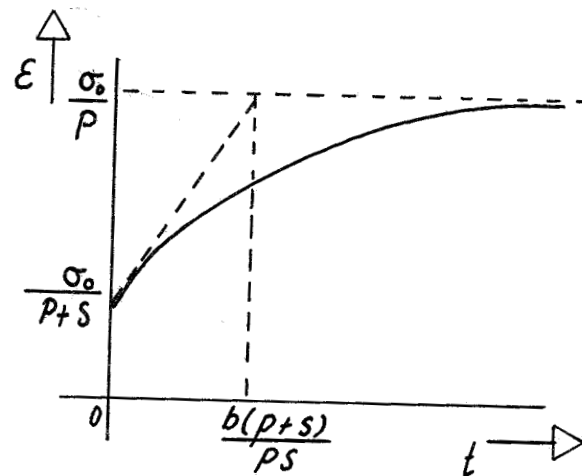
figuur16: Input verlenging



figuur17: Verloop relaxatie



figuur18: Input spanning



figuur19: Verloop kruip

## **4. Meetconfiguratie.**

### **4.1. Inleiding.**

Om meer te weten te komen over het materiaalgedrag van het PUR-schuim zijn er één-dimensionale trekproeven uitgevoerd. In paragraaf 4.2. wordt beschreven welke trekbanken hiervoor zijn gebruikt. Ook wordt de motivatie voor de keuze van de trekbank in deze paragraaf nader belicht. Paragraaf 4.3. beschrijft kort de modificaties aangaande de natte meting, terwijl in de daaropvolgende paragraaf het proefstuk besproken wordt. Ten slotte volgt in paragraaf 4.5. een overzicht van de verrichte experimenten.

### **4.2. De proefopstelling.**

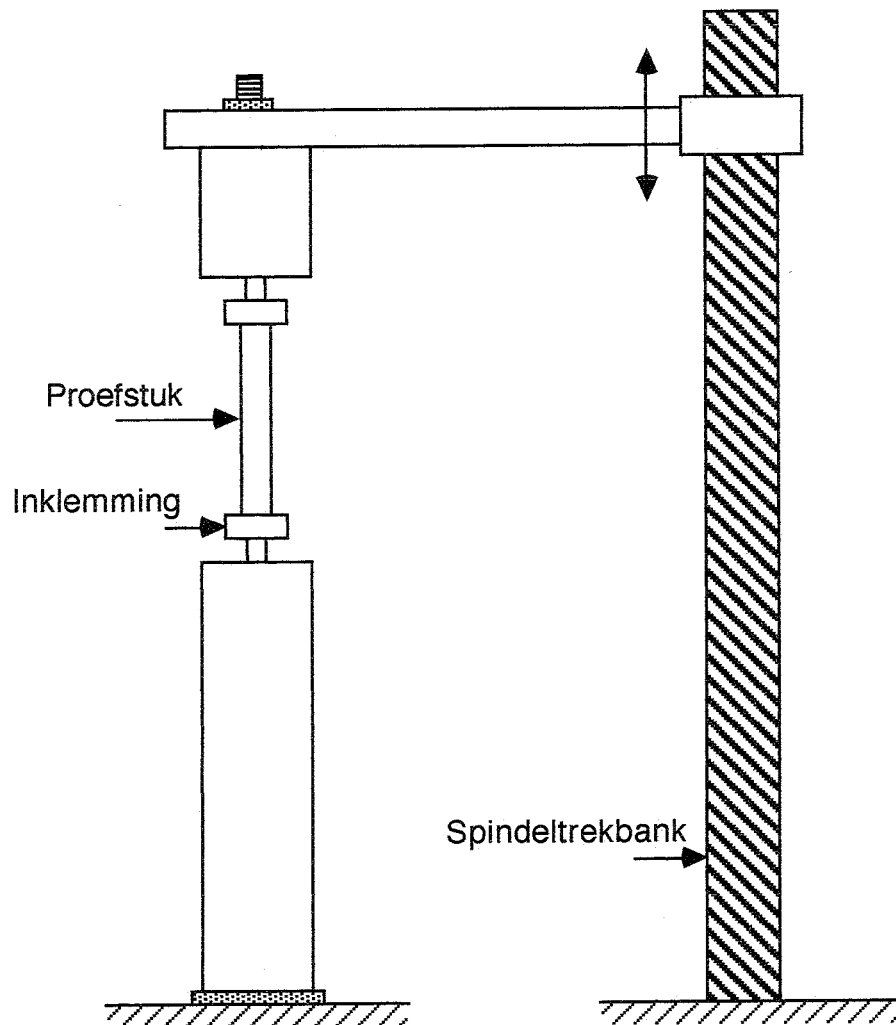
Vanwege het geïntegreerde meet- en dataverwerkingssysteem en de voorgeprogrammeerde rekprogramma's wordt in eerste instantie voor de experimenten gebruik gemaakt van de Frank trekbank. Daar het te testen materiaal slechts een geringe treksterkte heeft wordt er gekozen voor een meetdoos van 500 Newton. Dit om de verhouding meetruis/meetwaarde binnen de perken te houden en derhalve een meer nauwkeurig meetresultaat te verkrijgen.

Helaas echter is halverwege het meetprogramma de meetdoos van de Frank trekbank gesneuveld en dit maakte het noodzakelijk een andere trekbank te gaan gebruiken. De keuze viel op de Zwick trekbank, welke helaas niet beschikt over een adequate digitale dataverwerking. Dit vereiste een speciale verwerking van de meetgegevens.

De enige mogelijkheid die de proefopstelling bood was het uitlezen van de gegevens in files van een vreemdsoortig formaat. Deze file bestond uit twee reeksen getallen, de kracht en de verplaatsing, gesampled met een zekere tijd/meetfrequentie. Met behulp van de op de penrecorder geplote meetcurves was het mogelijk om deze files om te rekenen naar bruikbare datafiles. Dit laatste kon verwezenlijkt worden met van het dataverwerkingsprogramma Quattro Pro, een rekenveld vergelijkbaar met Lotus 1-2-3.

### **4.3. De natte meting.**

De Zwick-trekbank is uitgerust met een glazen stolp waarmee het mogelijk is natte trekproeven uit te voeren. Er wordt gebruik gemaakt van een extra staaf, die er voor zorgt dat het proefstuk tijdens het oprekken niet boven het vloeistofoppervlak uitkomt en zo de metingen zou kunnen beïnvloeden. Van deze staaf is de maat van de doorsnede bekend zodat het mogelijk is de vloeistofverplaatsing te berekenen. Met het bekend zijn van de dichtheid is het dan mogelijk de verandering in opwaartse kracht te berekenen en hiermee rekening te houden bij de vergelijking van de resultaten.



#### **4.4. Het proefstuk.**

Het te testen materiaal is een rubber op polyetherbasis van de firma Recticel. Het is een opgeschuimde rubbersoort waarvan de poriën met het blote oog duidelijk waarneembaar zijn. Het beste is dit materiaal te vergelijken met de vulling van een kunstmatig schuimrubber matras. Het materiaal heeft een porositeit van ongeveer 85 % en er wordt verwacht dat het grote elastische vervormingen aankan (informatie fabrikant zie bijlage 4.4).

Gezien de nogal geringe treksterkte van het materiaal en om toch een betrouwbare meting te verkrijgen is er gekozen voor vrij forse afmetingen<sup>2</sup>. In tegenstelling tot de gangbare trekstaaf is hier gekozen voor een "rechttoe-rechtaan" proefstuk. Dit is gedaan om drie redenen. Ten eerste is het vrij lastig om van dit materiaal een goed gevormd model te maken zonder dat er onregelmatigheden optreden, waardoor het trekstaafje snel scheurt. Ten tweede is de trekstaaf zo lang dat de spanningen verhoudingsgewijs vrij snel homogeen worden. En als laatste gaat het er niet om dat de maximale treksterkte gevonden wordt en er hoeft dus geen rekening mee gehouden te worden waar een eventuele breuk optreedt.

Het materiaal is beschikbaar in drie verschillende dichtheden te weten 30, 40 en 120 kg/m<sup>3</sup>. In de loop van de proefnemingen bleek dat het proefstuk met een dichtheid van 30 kg/m<sup>3</sup> een dermate lage treksterkte had dat metingen aan dit proefstuk weinig zinvol waren en derhalve verder achterwege gelaten zijn. Het materiaal laat zich vrij lastig tot nauwkeurige proefstukken verwerken omdat het nogal zacht is. Dit komt de onderlinge vergelijkbaarheid van de resultaten niet ten goede, iets waar terdege rekening gehouden zal moeten worden.

#### **4.5. Experimenten.**

Over alle hieronder genoemde experimenten kan opgemerkt worden dat ze allemaal in tweevoud uitgevoerd moeten worden, in droge en natte omstandigheden. Dit omdat het van belang is om te weten of het materiaal wezenlijk anders reageert in droge cq. natte omstandigheden daar het, zoals al eerder opgemerkt, in het experimentele model in een met vloeistof verzadigde hoedanigheid toegepast gaat worden. Als vloeistof zal voorlopig nog gewoon water gebruikt worden om te kijken of het inderdaad andere resultaten zal opleveren. Als opmerking kan nog worden toegevoegd dat het materiaal een grote hoeveelheid vloeistof op kan nemen. Metingen hebben uitgewezen dat het materiaal ongeveer vijf tot zeven maal het eigen gewicht in water kan opnemen. Kijken we naar de hoeveelheid water dat een proefstukje op kan nemen, dan blijkt dat ondanks het kleinere volume van het proefstukje met een dichtheid van 120 kg/m<sup>3</sup> deze toch een grotere hoeveelheid water op kan nemen dan het proefstukje met een dichtheid van 40 kg/m<sup>3</sup>. Hoogstwaarschijnlijk spelen hier factoren mee als adhesie en cohesie en vooral in welke

<sup>2</sup> Voor de afmetingen zie bijlage 4.4

mate het materiaal door en door verzadigd is met water.

In onderstaande tabel staan voor beide dichtheden de meetgegevens in natte en droge situatie. De volumina van de beide proefstukjes zijn bij benadering even groot en staan eveneens in de tabel vermeld.

	Dichtheid 40	Dichtheid 120
Volume proefstuk (m <sup>3</sup> )	0,515*10 <sup>-4</sup>	0,445*10 <sup>-4</sup>
Droog gewicht (gram)	2,1	5,4
Nat gewicht (gram)	14,4	24,3
Volume opgenomen water (m <sup>3</sup> )	0,123*10 <sup>-4</sup>	0,189*10 <sup>-4</sup>
Berekend volume 85% porositeit (m <sup>3</sup> )	0,437*10 <sup>-4</sup>	0,378*10 <sup>-4</sup>

Te zien is dat het door de porschuim geabsorbeerde watervolume aanmerkelijk lager is dan het berekende volume op basis van de porositeit doet vermoeden. Dit kan veroorzaakt worden doordat het schuim niet door en door verzadigd geweest is. Een andere reden kan zijn dat de porositeits waarde niet juist is, deze is als gegeven overgenomen en niet geverifieerd.

Om voldoende te weten te komen over het materiaal, met name of en in welke mate het zich visco-elastisch gedraagt, zullen de volgende metingen uitgevoerd worden: reksnelheidsmeting, relaxatie, kruip en hysteresis.

## **5.Resultaten.**

### **5.1. Inleiding.**

Van de in hoofdstuk drie besproken metingen zullen hier kort de resultaten gepresenteerd worden. Een uitgebreid overzicht van alle metingen in grafische vorm is te vinden in de gelijk genummerde bijlagen. In paragraaf twee komen de resultaten van zowel de natte als de droge metingen aan de orde. In paragraaf drie zullen de droge en natte metingen naast elkaar gezet worden, en waar mogelijk de verschillen cq. overeenkomsten aangegeven worden. In eerste instantie zullen alleen de resultaten van het polyether rubber met een dichtheid van  $40 \text{ kg/m}^3$  besproken worden. In eerste instantie zal geprobeerd worden met enkel deze resultaten het materiaalgedrag te beschrijven. Mocht het rubber met een hogere dichtheid een ander beeld laten zien dan zal dit uiteraard vermeld worden.

### **5.2. Metingen.**

#### **5.2.1. Reksnelheden.**

De snelheden zijn zo gekozen dat het gehele bereik van de trekbank wat de reksnelheden aangaat ten volle benut is. De snelheden variëren van 10 mm/min. tot 1000 mm/min. De eerste afbeelding in bijlage 5.3.2 toont de trekcurves van drie trekproeven met drie verschillende reksnelheden.

Zoals uit de metingen op te maken valt heeft de reksnelheid nauwelijks invloed op het verloop van de trekkromme. Dit ondanks de procentueel gezien enorme verlengingen. De modulus is blijkbaar niet of nauwelijks afhankelijk van de reksnelheid. Dit lijkt erop te duiden dat het materiaal nauwelijks visco-elastische eigenschappen vertoont.

#### **5.2.2. Relaxatie.**

Uit de metingen blijkt dat de relaxatie eigenschappen van het materiaal zeer gering zijn. In het experiment met het materiaal met dichtheid 40 in de natte situatie vindt er gedurende 200 seconde een relaxatie plaats van ongeveer 5%. En dit bij een rek van bijna 50%. Voor de droge situatie geldt een nog lager relaxatie percentage, namelijk 1,5%. Bij het fitten van een geschikte curve bleek het recursieve algoritme niet in staat een bevredigend resultaat af te leveren voor een relaxatie lager dan een procent of vijf. Er wordt dan ook alleen een benadering gepresenteerd voor de relaxatie in een natte omgeving.

Na het herhaaldelijk doorlopen van de schattingsprocedure zijn met de volgende invoer de eindschattingen voor de drie parameters gevonden.

	Dichtheid 40 nat (24)	Dichtheid 120 droog (25)	Dichtheid 120 nat (26)
Tijdstap	2.1739 sec	2.1739 sec	1 sec
Aantal tijdstappen	90	100	175
Beginwaarde $x_1$	0.113	0.5240	0.4723
Beginwaarde $x_2$	0.0175	0.0300	0.0356
Beginwaarde $x_3$	0.055	0.0300	0.0478
Meetfout	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$
Stapgrootte	1	1	1
Aantal iteraties	1	1	1
Eindschatting $x_1$	0.1127	0.5251	0.4712
Eindschatting $x_2$	0.0169	0.0330	0.0363
Eindschatting $x_3$	0.0551	0.0605	0.0364
Verplaatsing (mm)	25.21	26.80	20.543

Als deze schattingen omgerekend worden naar de fysische grootheden dan kunnen de volgende vergelijkingen genoteerd worden:

$$\text{Relaxatie; } F(t) = 2.84 + 0.43e^{(-18.1t)} ; \quad (24)$$

$$\text{Relaxatie; } F(t) = 14.07 + 0.88e^{(-16.5t)} ; \quad (25)$$

$$\text{Relaxatie; } F(t) = 9.68 + 0.75e^{(-27.5t)} ; \quad (26)$$

Zoals de metingen reeds doen vermoeden blijkt ook uit deze formules dat er nauwelijks sprake is van visco-elasticiteit. Dit blijkt ondermeer uit de kleine tijdsconstantes waardoor de e-macht zeer snel naar nul gaat en er dan dus sprake is van een stapfunctie. Dit verschijnsel is ook duidelijk terug te vinden in de grafische weergave van bovenstaande formules. Zie hiervoor bijlage 5.2.2.



### 5.2.3. Kruip.

Voor kruip geldt feitelijk hetzelfde als voor relaxatie. Er is in zeer geringe mate sprake van kruip. Uit de hierboven benaderde formules voor relaxatie kunnen de vergelijkingen voor kruip afgeleid worden. Dit is gedaan voor één situatie, te weten de kruipproef van materiaal met dichtheid 120 in een droge omgeving. Dit ter controle van de gevonden resultaten.

Gebruikt wordt de in hoofdstuk drie (paragraaf 3.2.2.) afgeleide relatie voor kruip:

$$\text{Kruip: } \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\rho} \left\{ 1 - \frac{s}{\rho+s} e^{-\rho \frac{s}{b(\rho+s)} t} \right\} \quad (27)$$

Ook nu geldt weer dat de geschatte parameters overeenkomen met de fysische grootheden:

$$x_1 = \rho; \quad x_2 = s; \quad x_3 = -\frac{s}{b} = -\frac{1}{\tau}; \quad (28)$$

Vullen we dit alles in, samen met de opgelegde trekkracht  $F_0 = 20 \text{ N}$ , dan vinden we de volgende relatie:

$$u(t) = 38.1 - 2.24 e^{(0.057t)} \quad (29)$$

In bijlage 5.2.3. wordt dit resultaat grafisch weergegeven en vergeleken met de meting. Op te merken valt dat het verloop van de geschatte kruipkromme opmerkelijk goed de gemeten kromme volgt. De gevonden waarden uit de vorige paragraaf lijken dus ook te gelden voor de kruipproef en dat terwijl de kruipproef op een andere trekbank is uitgevoerd dan de relaxatieproef.

Het volgen van de juiste "ramp"functie geeft duidelijk meer problemen. Dit is het gevolg van de verschillende reksnelheden waarmee de verlengingen zijn aangebracht. Bij de metingen op de Frank trekbank is een lagere reksnelheid gebruikt dan bij de Zwick trekbank. Deze beide opmerkingen zijn voor de hand liggend omdat de berekende stijfheden van de veer uit het standaard lineaire model groot is vergeleken bij tijdsconstanten.

### 5.2.4. Isochronen.

Van zowel relaxatie als kruip zijn de isochronen gemaakt. Het eerste wat opvalt is het tot grote rekken (50%) lineaire verloop van de isochronen. Het materiaal voldoet uitermate goed aan het proportionaliteit beginsel en er kan dan ook gesproken worden van een lineair materiaal gedrag.

Uit de isochronen zijn de relaxatiemodulus en de kruipcompliantie afgeleid op tijdstip  $t=60 \text{ sec}$  (zie bijlage 5.2.4 voor de grafieken en de berekende waarden).

### **5.2.5. Hysterese.**

Het oppervlak tussen de heen- en teruggaande curve blijkt erg klein te zijn. Dit wil dus zeggen dat de hoeveelheid energie die gedissipeerd wordt erg klein is en feitelijk verwaarloosd kan worden. Ook hier geldt, evenals in het voorgaande, dat de aanname incompressibiliteit niet geheel terecht is, maar ook ondanks dat is de conclusie "zeer geringe energiedissipatie" hier op zijn plaats. (zie bijlage 5.2.5).

## **5.3. Natte versus droge metingen.**

### **5.3.1. Relaxatie en kruip.**

Opvallend bij de relaxatie- en kruipexperimenten is het verschil in de mate waarin het materiaal zich visco-elastisch gedraagt. Bij de relaxatie zien we twee opvallende zaken. Ten eerste blijkt dat bij een zelfde kracht de verplaatsing in de natte situatie aanmerkelijk hoger ligt (ongeveer 20%). Na berekening blijkt dit niet veroorzaakt te worden door de opwaartse kracht. De opwaartse kracht als gevolg van het ondergedompeld zijn in vloeistof blijkt slechts enkele tienden van procenten te zijn ten opzichte van de totale kracht (berekening zie bijlage 5.3.1.).

Ten tweede relaxeert het materiaal veel meer in de natte situatie dan in de droge situatie. De oorzaak zal waarschijnlijk gezocht moeten worden op micro niveau. De vloeistof maakt het materiaal blijkbaar zacht en derhalve minder stijf.

### **5.3.2. Reksnelheden.**

Bij de reksnelheden zien we dat de trekcurves in droge toestand een fractie hoger liggen dan in natte toestand. Zoals eerder opgemerkt lijkt het materiaal zich stijver te gedragen in droge toestand. Het verschil tussen de droge en natte situatie binnen dezelfde reksnelheid is groter dan het verschil tussen twee reksnelheden in gelijke omgevingstoestand. Hieruit kan geconcludeerd worden dat de invloed van de omgeving op het materiaal belangrijker is dan de invloed van de reksnelheden (zie bijlage 5.3.2).

## **6. Conclusies.**

### **6.1. Conclusies.**

Uit de metingen en berekeningen kunnen de volgende conclusies ten aanzien van het constitutieve gedrag van het polyether rubber getrokken worden.

Het blijkt dat het materiaal in geringe mate visco-elastisch gedrag vertoont. Uit de constructie van isochronen volgt dat het visco-elastische gedrag lineair is. Echter, de relaxatie- en kruipeffecten zijn zeer gering en het is dan ook de vraag of het van grote invloed zal zijn op het functioneren van het materiaal als basismateriaal voor een te realiseren experimenteel model van de tussenwervelschijf. De relaxatie- en kruipeffecten manifesteren zich in iets grotere mate in een natte omgeving. In hoeverre dit afhankelijk is van de soort vloeistof is niet bekend en verdient ook zeker de aandacht.

Het polyether rubber is in staat zeer grote rekken te ondergaan. Bij de experimenten is tot 50% rek gegaan zonder dat het materiaal daar zichtbare schade van ondervond. Dat dit gepaard gaat met een minimum aan energiedissipatie en een maximum aan een vloeistof absorberend vermogen maakt dat het materiaal geschikt lijkt voor een eventuele toepassing als basismateriaal voor de tussenwervelschijf.

### **6.2. Aanbevelingen voor verder onderzoek.**

Zoals in de vorige paragraaf vermeld zou het zinnig zijn om te weten hoe het materiaal zich gedraagt onder frequente en langdurige vervormingen.

De invloed van een vloeistof op het basis materiaal bleek redelijk groot te zijn en verdient bij verder onderzoek zeker de aandacht. Vooral de invloeden van verschillende soorten vloeistoffen.

Als laatste doe ik nog een aanbeveling, die verder los staat van dit materiaal onderzoek, in de richting van de dataverwerking van de Zwick-trekbank. Het zou zeer wenselijk zijn als er een adequate koppeling komt tussen fysische meetinstrumenten en de reeds aangesloten PC. Dit zou kunnen in de vorm van een redelijk eenvoudig Pascal programma.

## **7. Literatuurlijst.**

- (1) Oomens C. (1989) Het schatten van constitutieve parameters bij materialen die tijdsafhankelijk gedrag vertonen. WFW rapport 89.063
- (2) Lankveld M. van (1989) Parameterschatting aan niet-lineaire modellen. WFW rapport 89.045
- (3) Schouten J. (1990) Constitutief gedrag van elastisch materiaal. WFW rapport 90.008
- (4) Tervoort, Govaert (1989) Experimenten aan visco-elastische materialen. Module drie uit bijzondere onderwerpen.
- (5) Veldpaus F.E. (1985) Inleiding continuumsmechanica. Dictaatnr. 4612

## Bijlagen.

### 4.4. Informatie proefstukken.

#### a. Afmetingen.

De relevante afmetingen van de proefstukken hierna vermeld zijn geldig voor de meeste situaties. Wanneer deze in een specifiek geval af mochten wijken is dat ter plekke vermeld.

trekbank	dichtheid (kg/m <sup>3</sup> )	oppervlak A <sub>0</sub> (mm <sup>2</sup> )	lengte l <sub>0</sub> (mm)
Frank	120	174.08	50
Frank	40	146.73	50
Zwick	120	178.50	56
Zwick	40	161.88	56

#### b. Informatie fabrikant.

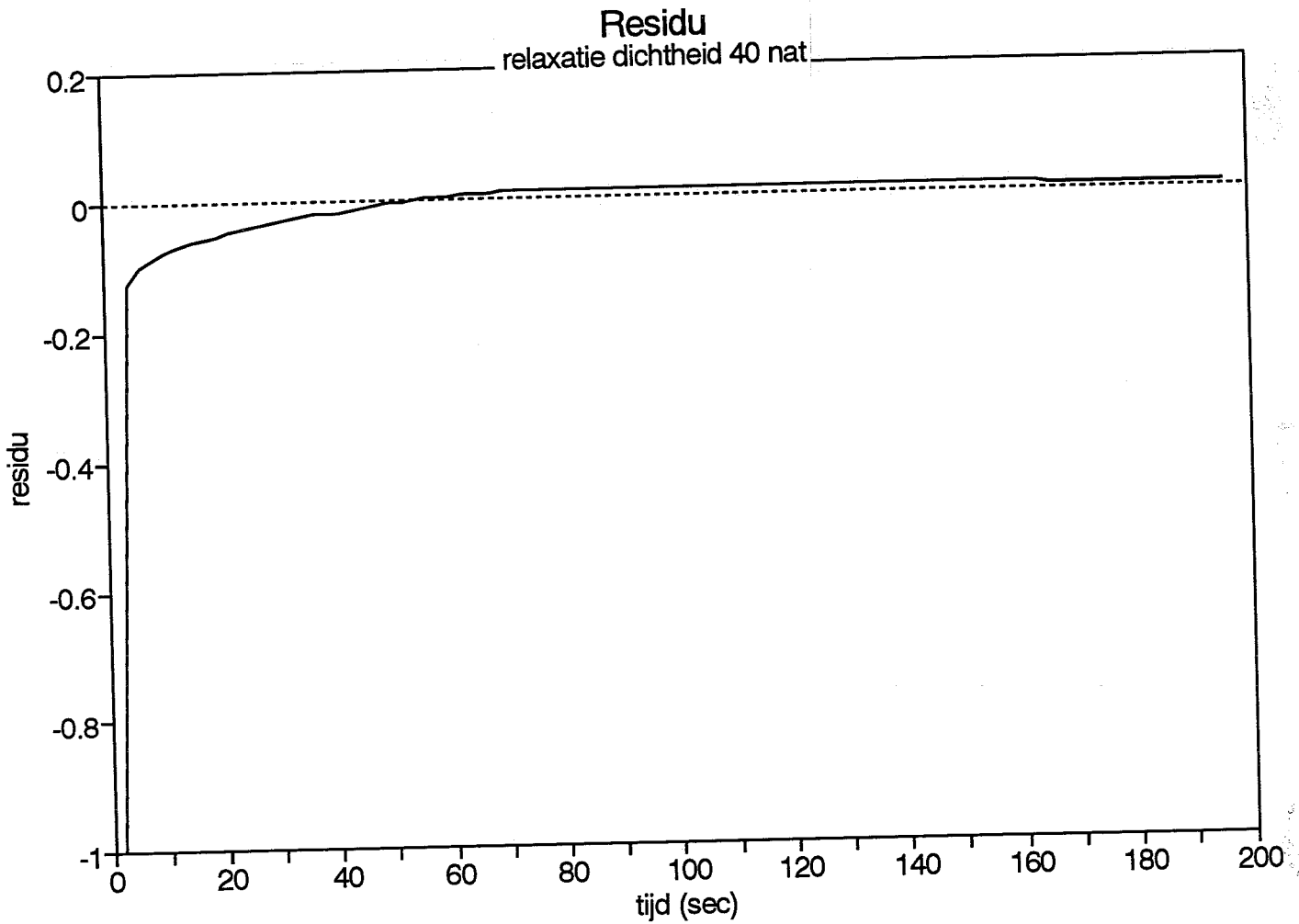
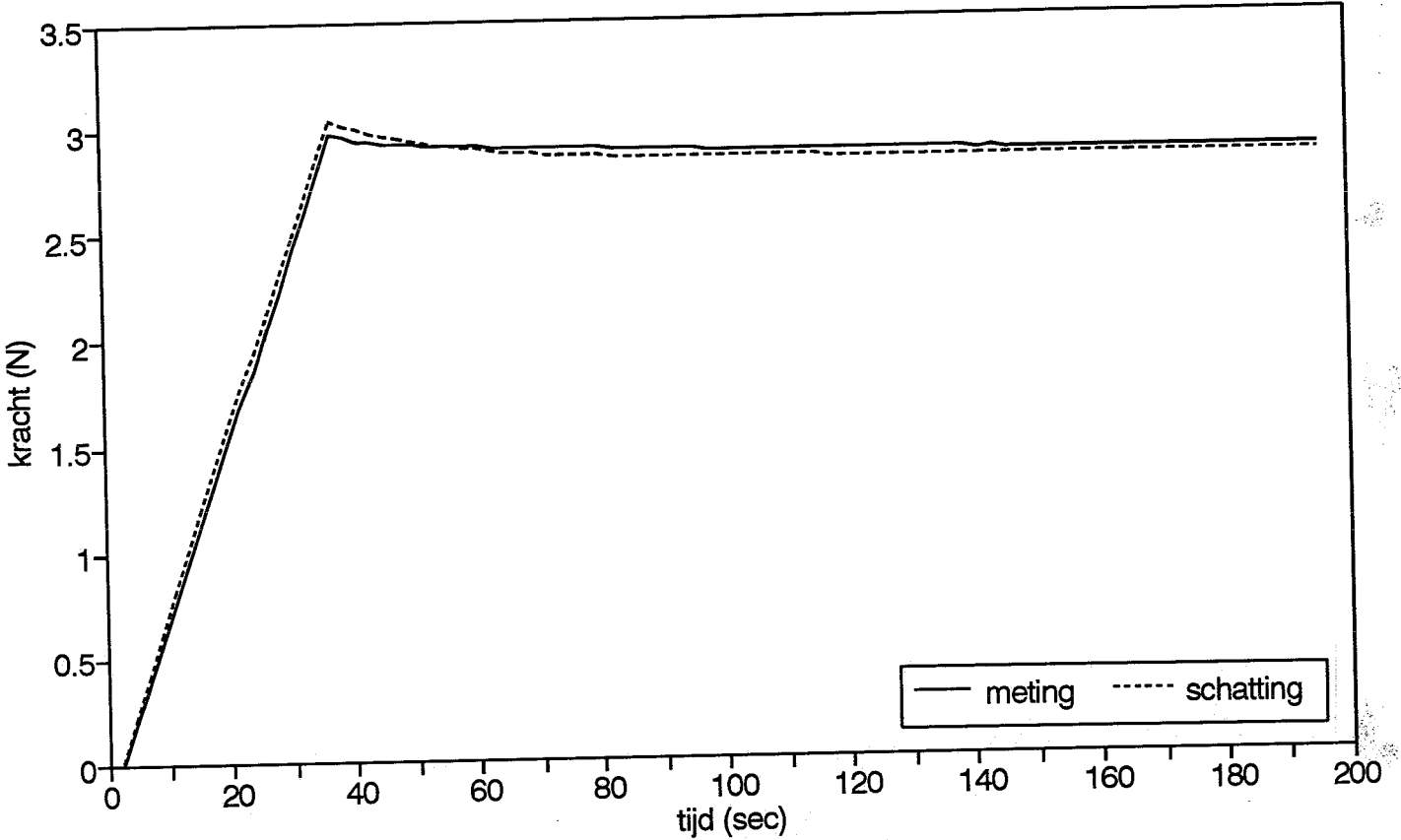
Firmanaam: Recticel-comfort.

Kwaliteits-aanduiding	Soortelijk gewicht (kg/m <sup>3</sup> )	Treksterkte (KPa)	Rek bij breuk (%)	Blijvende vervorming (%)
T20090	20	80	175	7
T40115	40	100	180	5
T120550	120	130	100	3

Vermeld kan nog worden dat de laatste twee schuimen zonder het gebruik van C.F.K.'s geproduceerd worden.

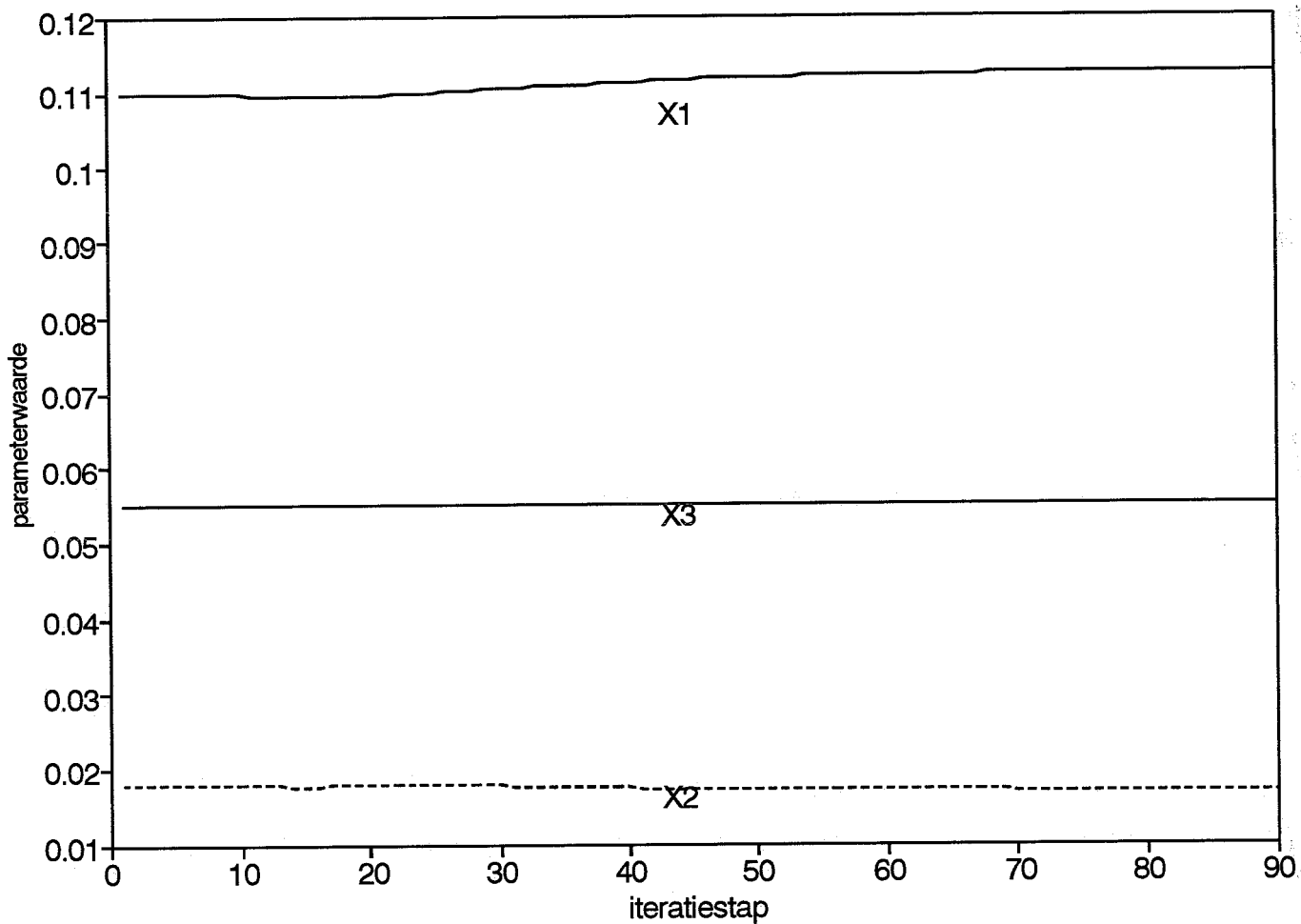
5.2.2. Relaxatie.

Schatting versus meting  
relaxatie dichtheid 40 nat

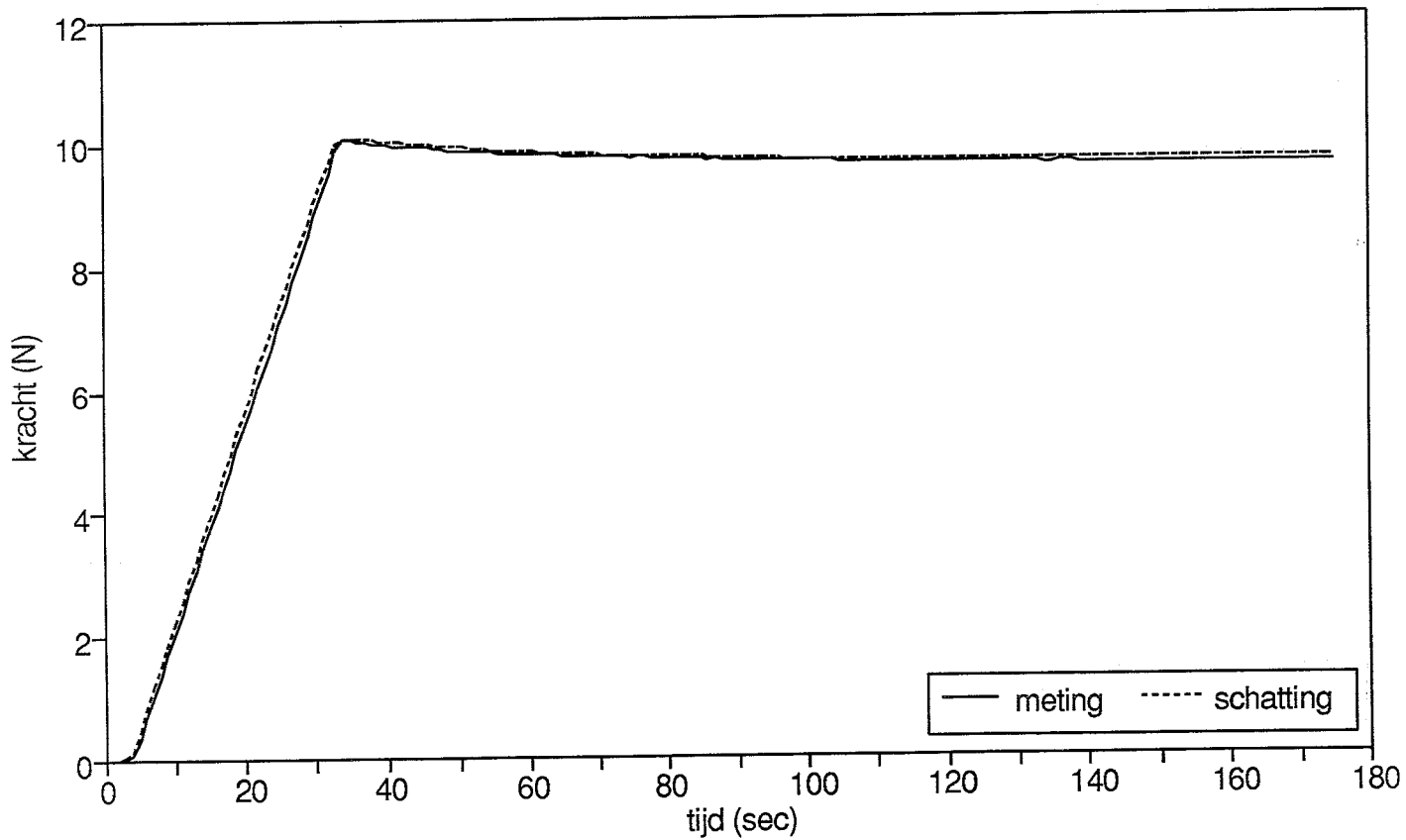


bijlage

Parameterverloop  
relaxatie dichtheid 40 nat

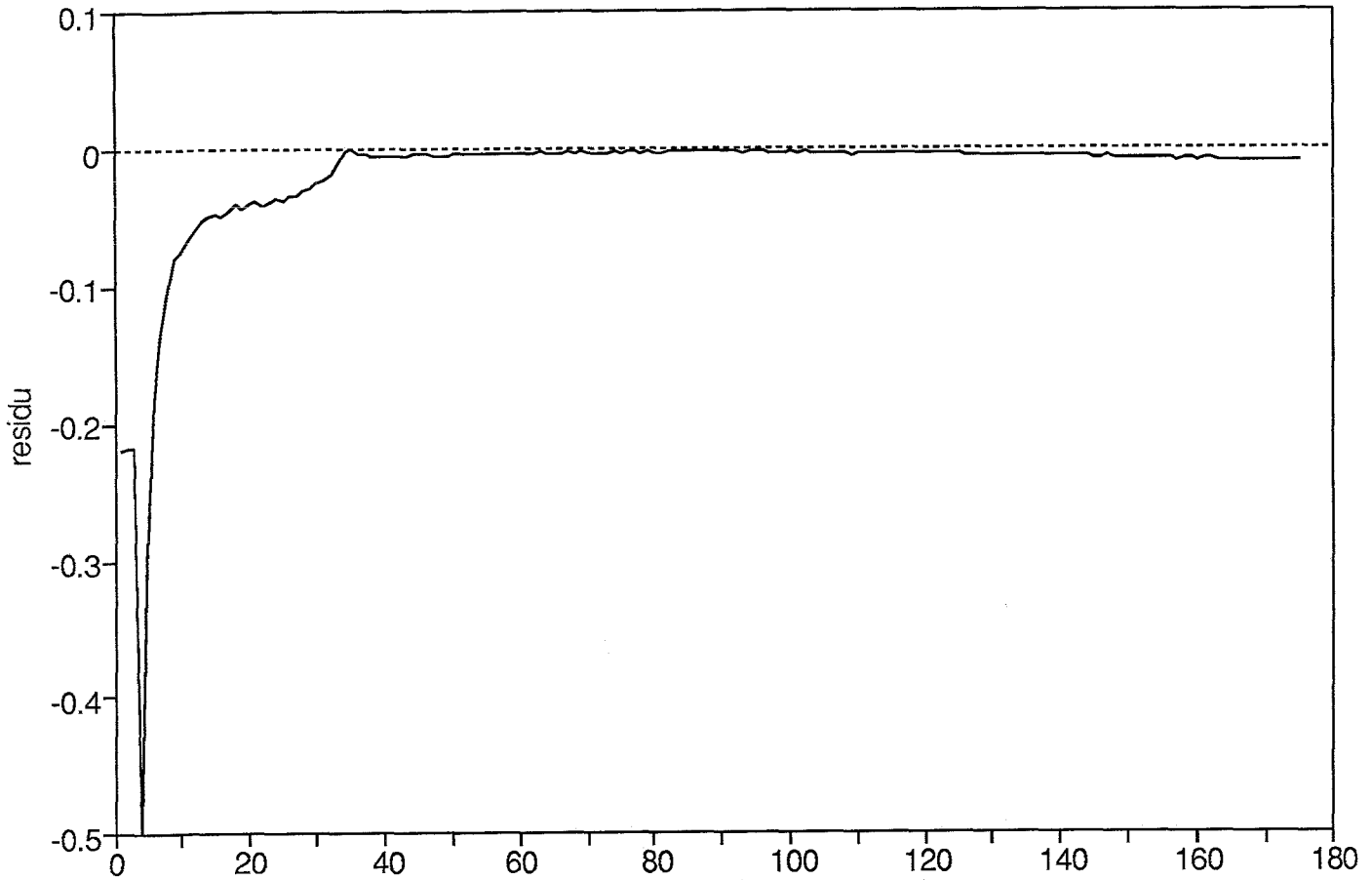


Schatting versus meting  
relaxatie dichtheid 120 nat

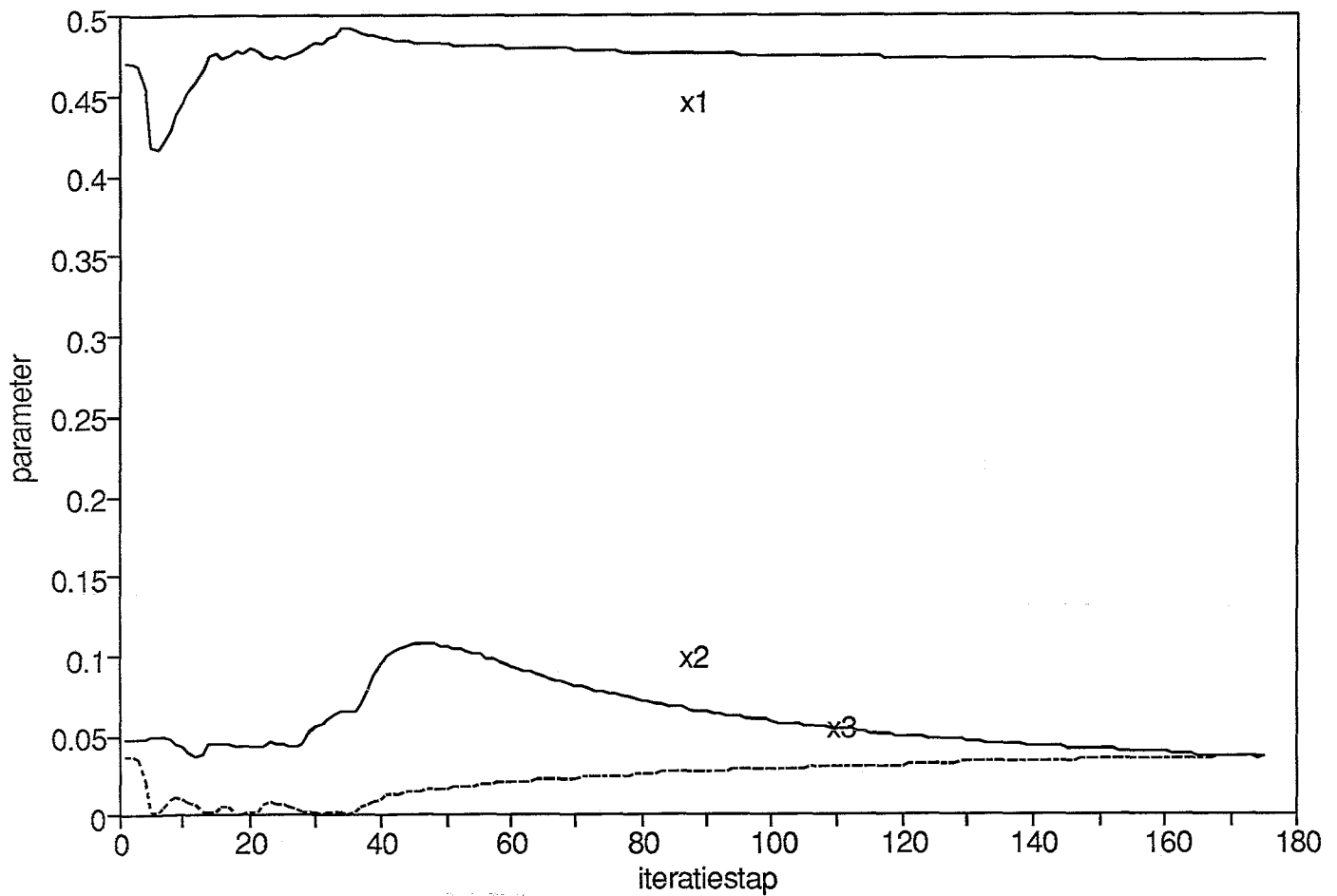


*bijlage*

Residu  
relaxatie dichtheid 120 nat



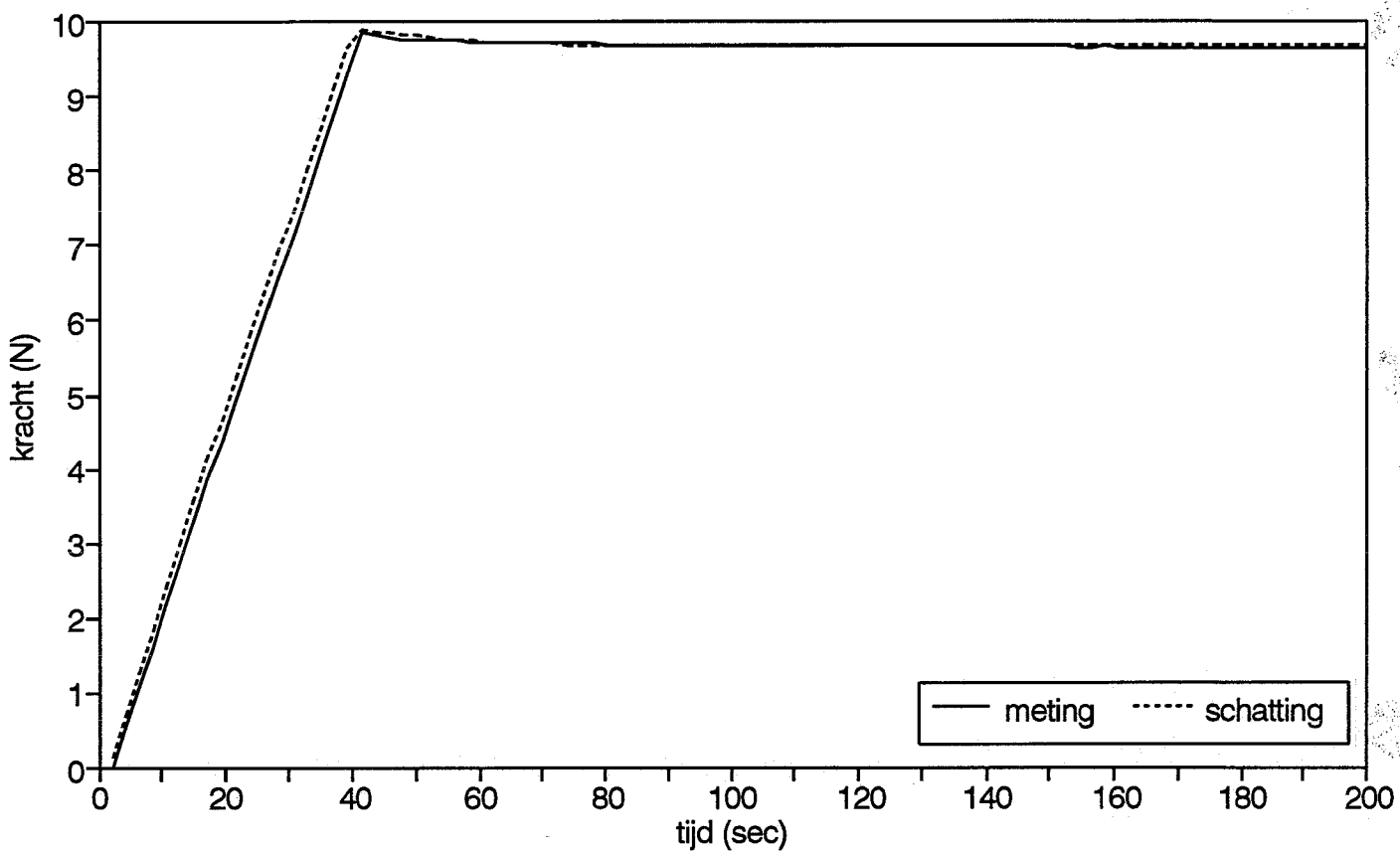
Parameterverloop  
relaxatie dichtheid 120 nat



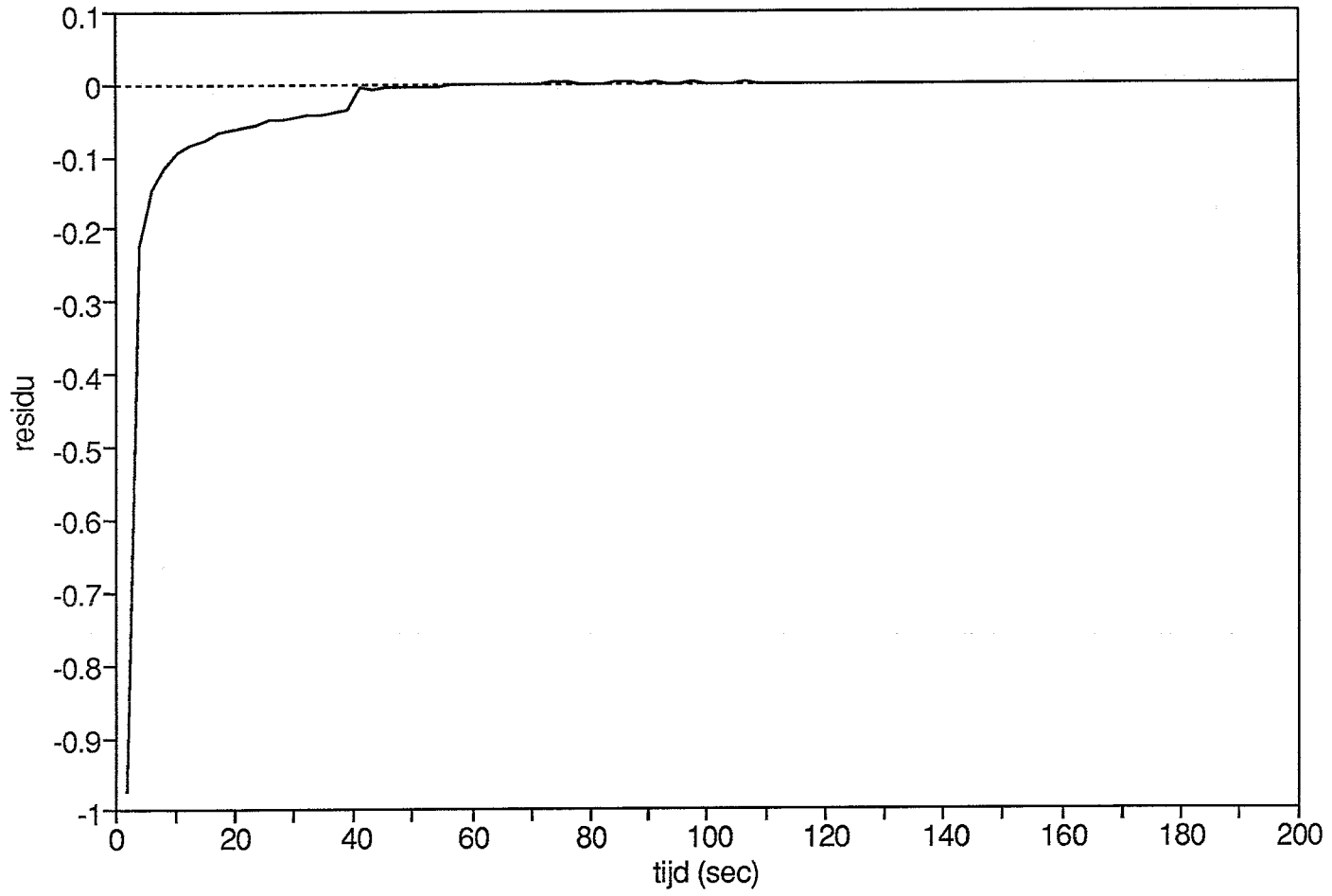


bijlage

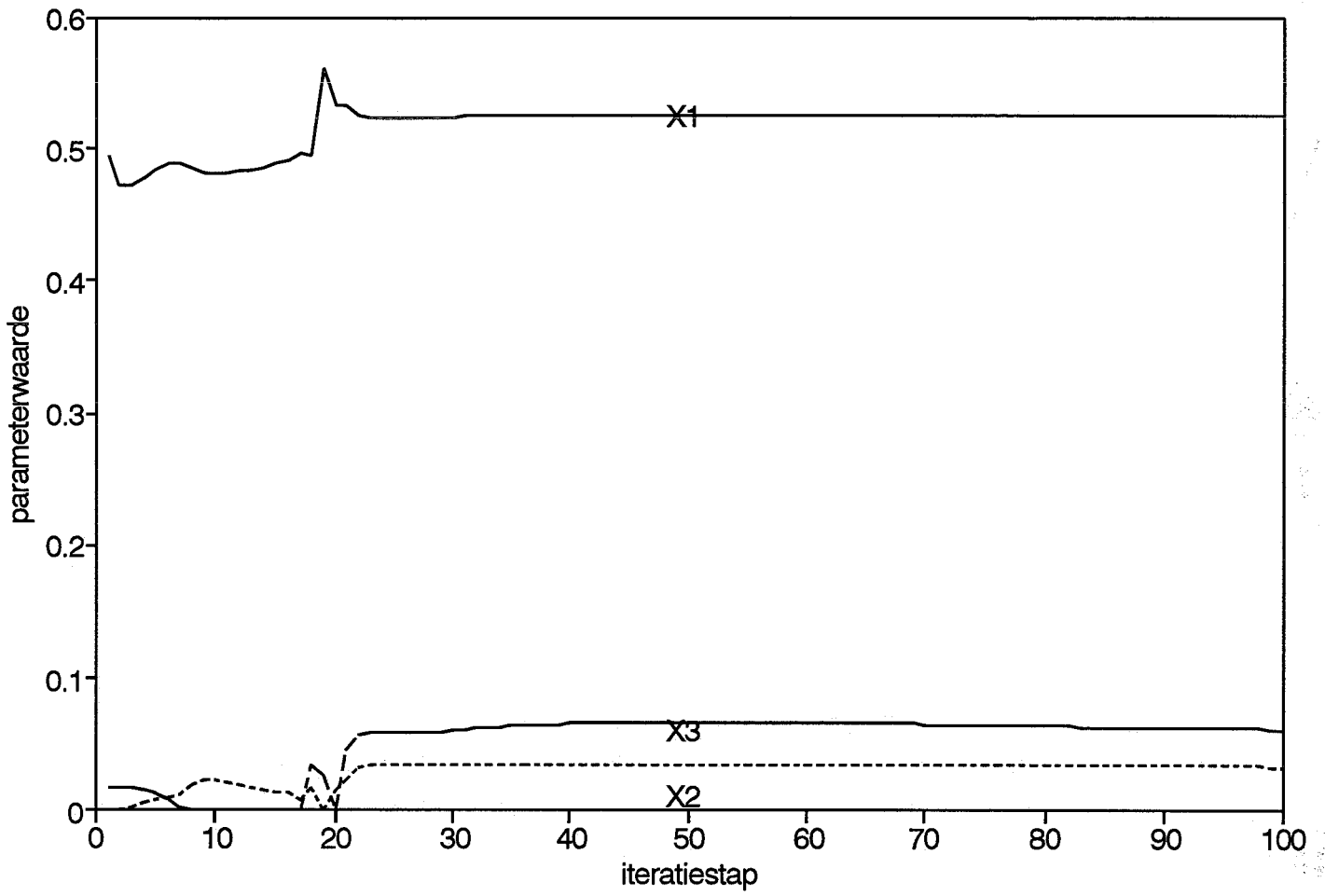
### Schatting versus meting relaxatie dichtheid 120 droog



### Residu relaxatie dichtheid 120 droog

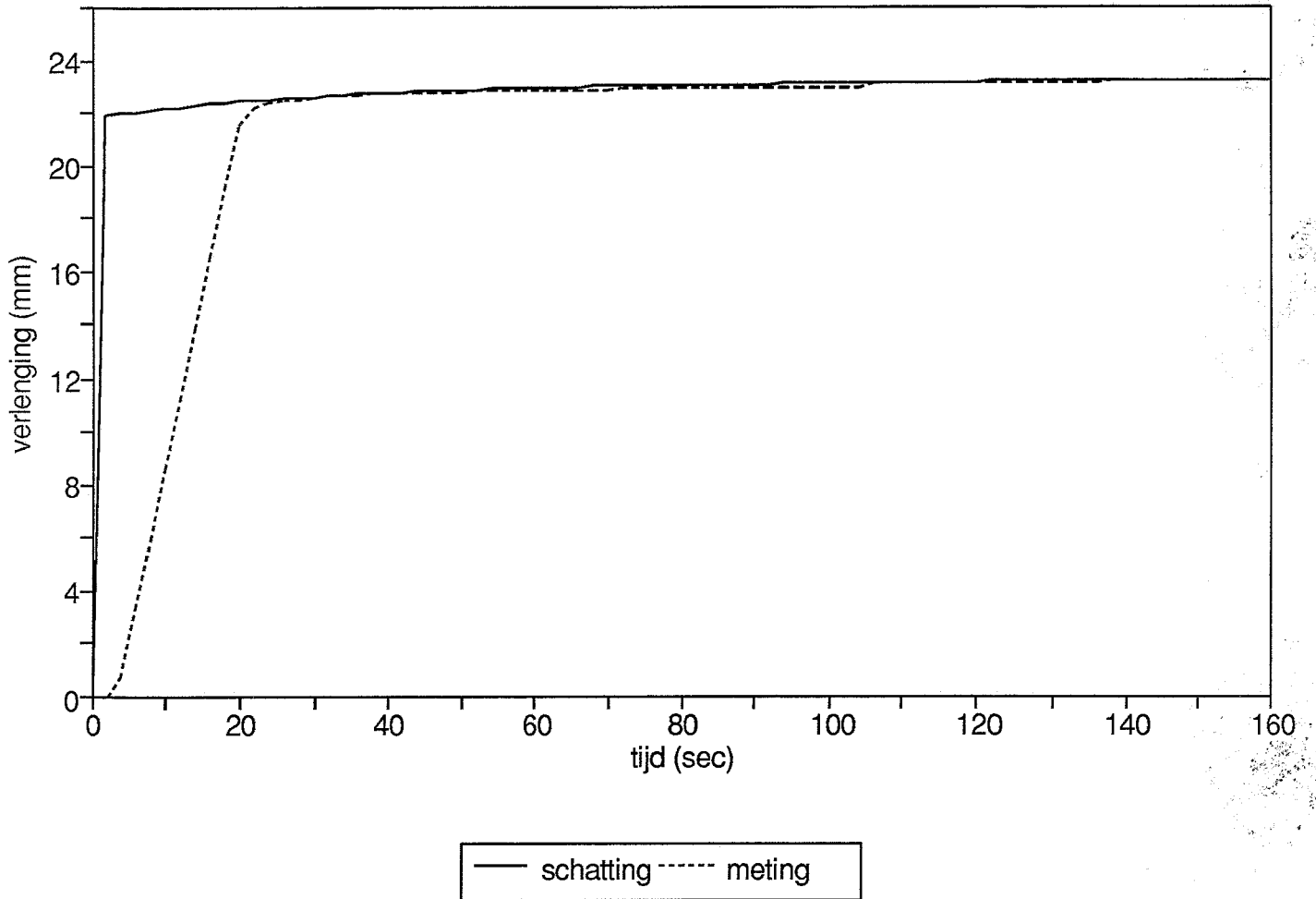


### Parameterverloop relaxatie dichtheid 120 droog



5.2.3. Kruipcurve en de recursieve benadering.

Schatting versus meting  
dichtheid 120 droog (Frank 20 N)



#### 5.2.4. Isochronen. Grafieken, berekeningen en tabellen.

Isochroon kruip voor de situatie dichtheid 120 in droge omgeving.

Rek	Normaalspanning (N/mm <sup>2</sup> )
0.118	0.0287
0.239	0.0574
0.362	0.0862
0.462	0.115

#### Berekening normaalspanning:

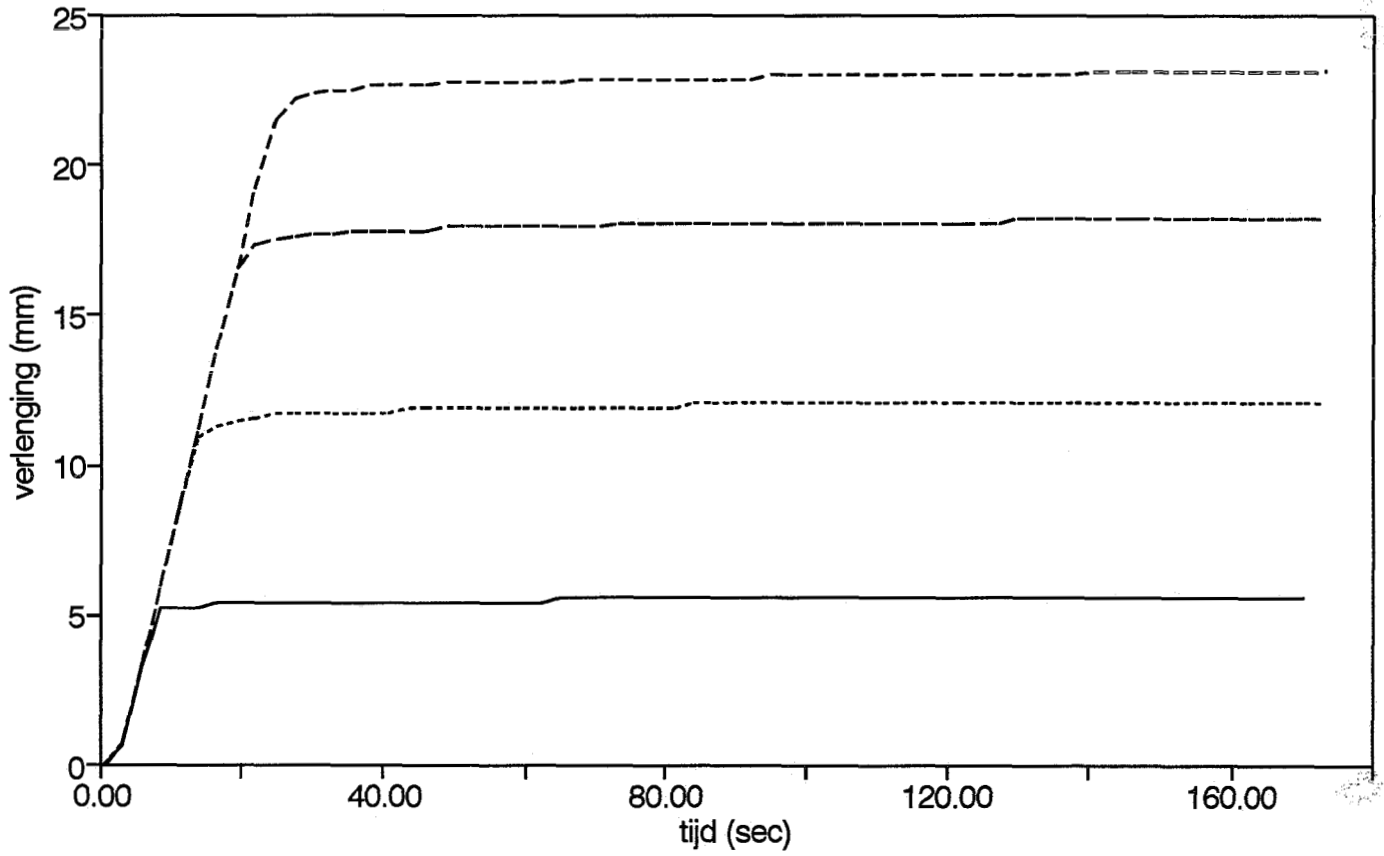
Voor de berekening van de normaalspanning wordt de aanname gedaan dat het materiaal incompressibel is. Dan geldt dus dat er geen volumeverandering optreedt ( $V_0 = V_{\text{momentaan}}$ ). Aan de hand hiervan is het momentane oppervlak van de dwarsdoorsnede te berekenen en dus de spanning. Zie voor de gegevens bijlage 4.4.

$$A = A_0 * \frac{L_0}{L_0 + \Delta L} \quad (30)$$

#### Berekening van de kruipcompliantie:

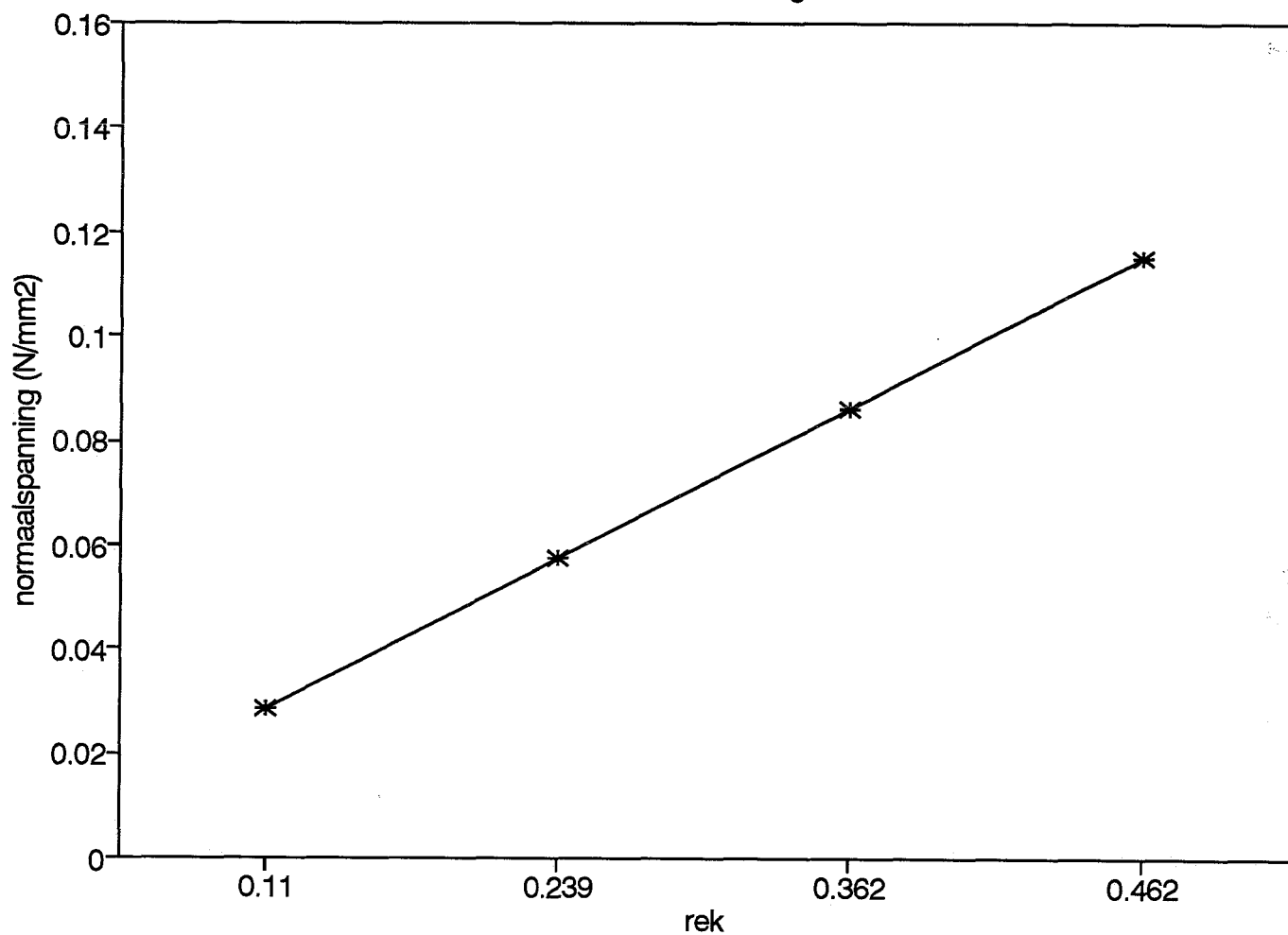
$$\text{Kruipcompliantie ; } D(t_1) = \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta \sigma} = 4.212 \frac{\text{mm}^2}{\text{N}} \quad (31)$$

Kruip  
dichtheid 120 droog (Frank)



— 5 Newton    ..... 10 Newton    - - - 15 Newton    - . - . 20 Newton

Isochroon kruip  
dichtheid 120 droog



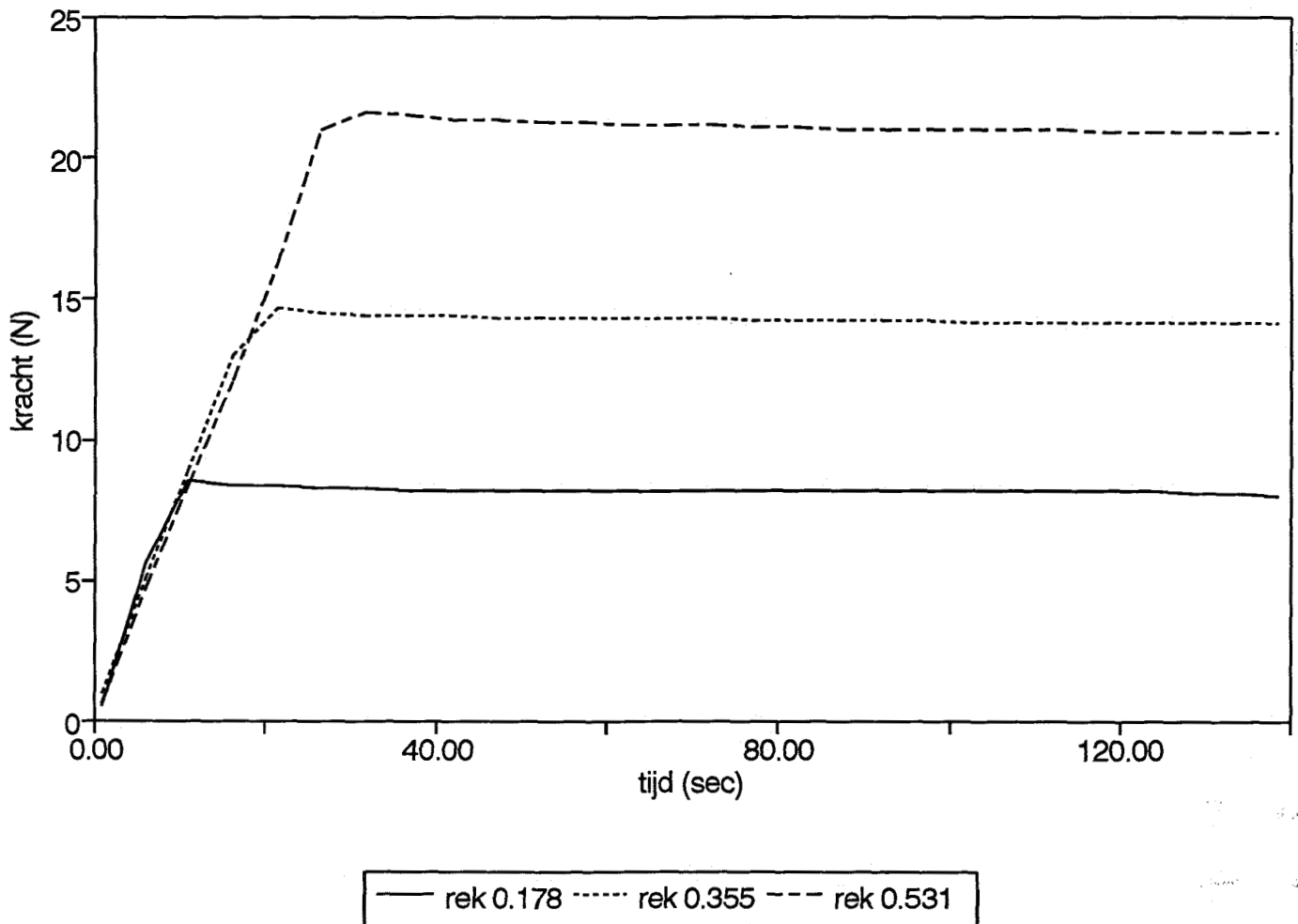
Isochroon relaxatie voor dichtheid 120 in droge omgeving.

Rek	Normaalspanning (N/mm <sup>2</sup> )
0.178	0.0126
0.355	0.0488
0.531	0.0885

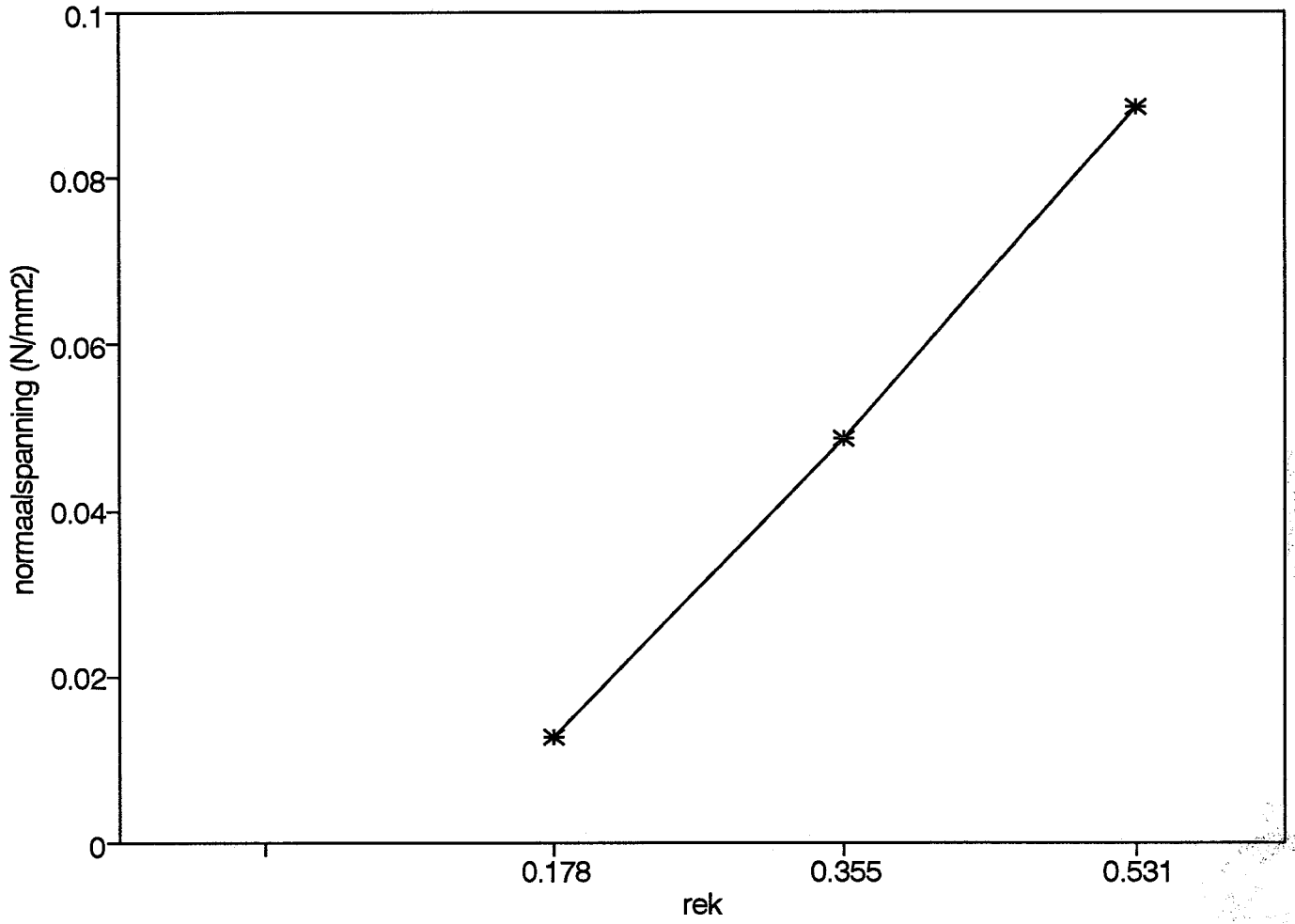
Berekening van de relaxatiemodulus:

$$\text{Relaxatiemodulus; } E(t, \epsilon) = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \epsilon} = 0,201 \frac{N}{mm^2} \quad (32)$$

Relaxatie  
Dichtheid 120 (Frank)



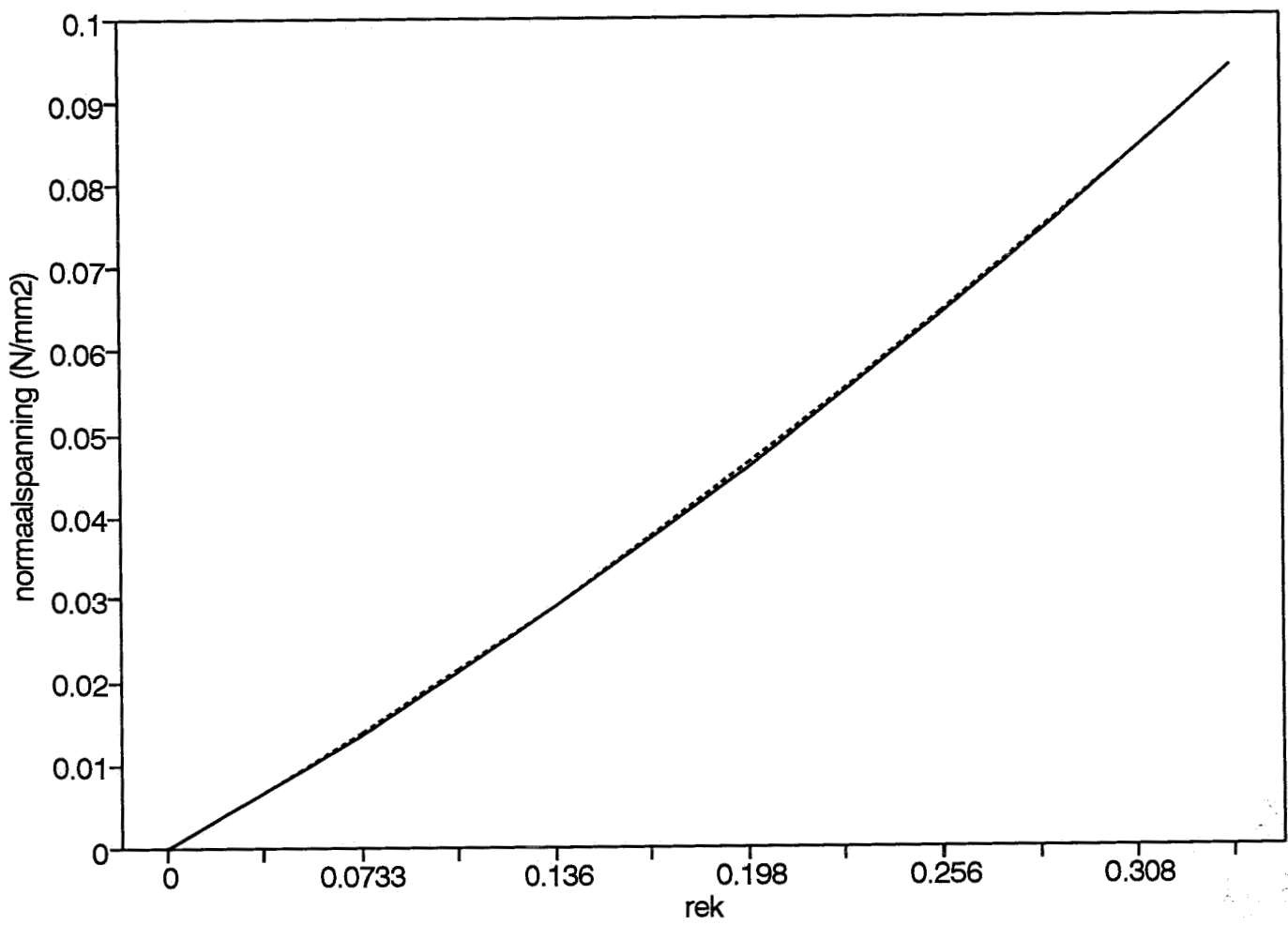
Isochroon relaxatie  
dichtheid 120 droog





### 5.2.5. Hysterese

Hysterese curve  
dichtheid 120

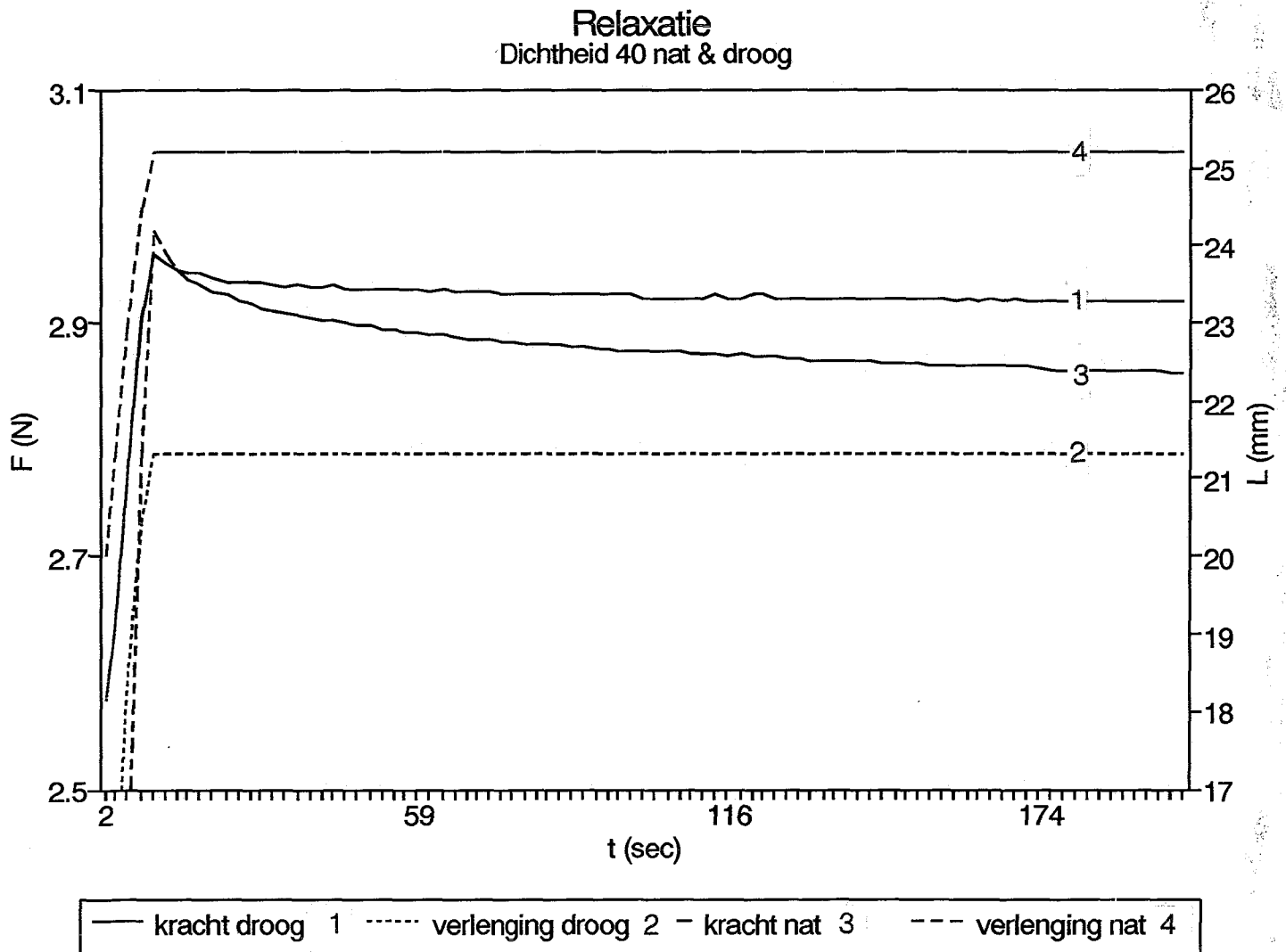


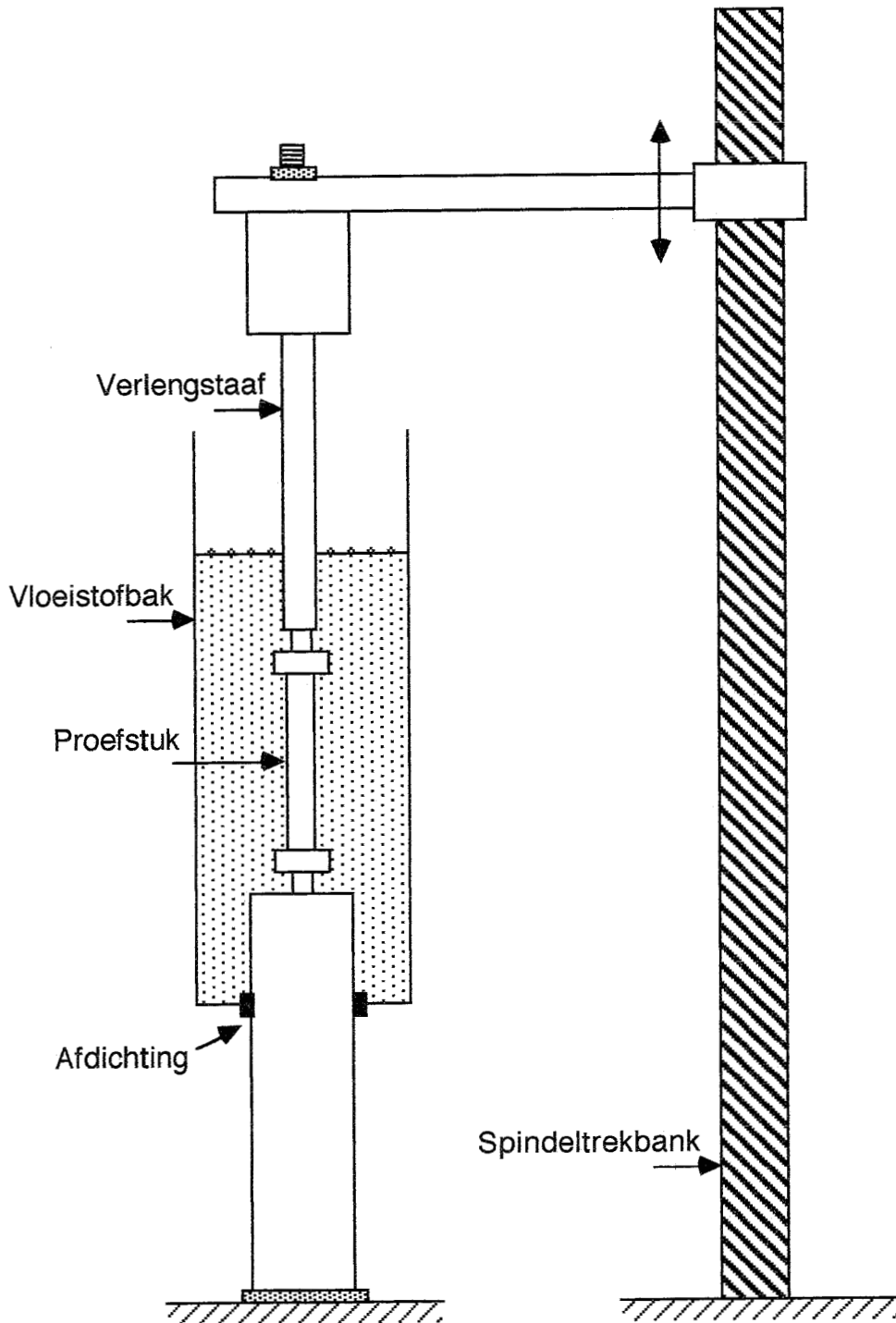
**5.3.1. Berekening opwaartse kracht.**

Inhoud verlengstaafje dat het traject onder en boven het vloeistofoppervlak overbrugt.

$$Volume = \Delta l * \Pi R^2 = 1,267 \cdot 10^{-6} m^3 \quad (33)$$

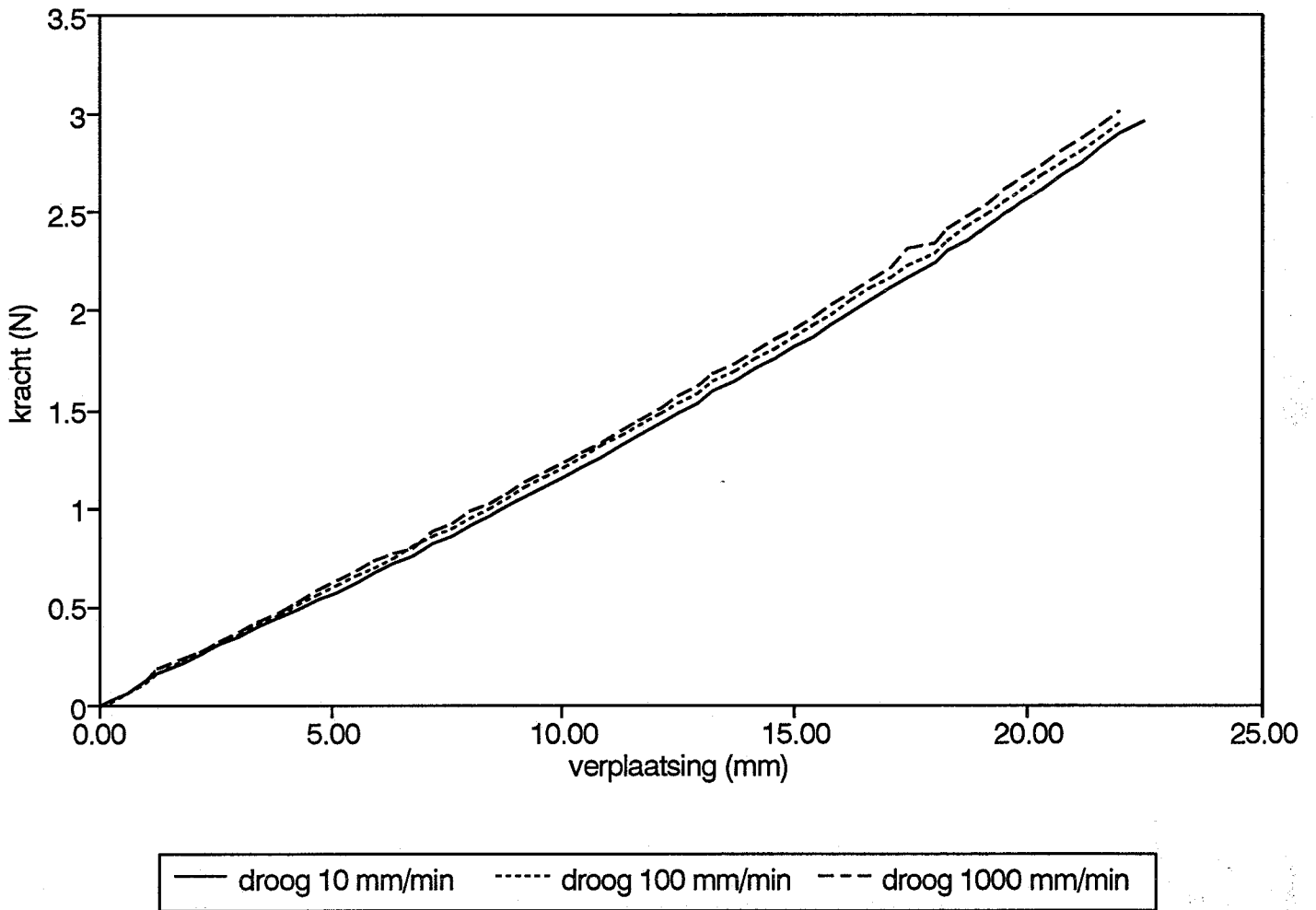
$$Opwaartsekracht = Volume * Dichtheid = 1,26 \cdot 10^{-3} \quad (34)$$



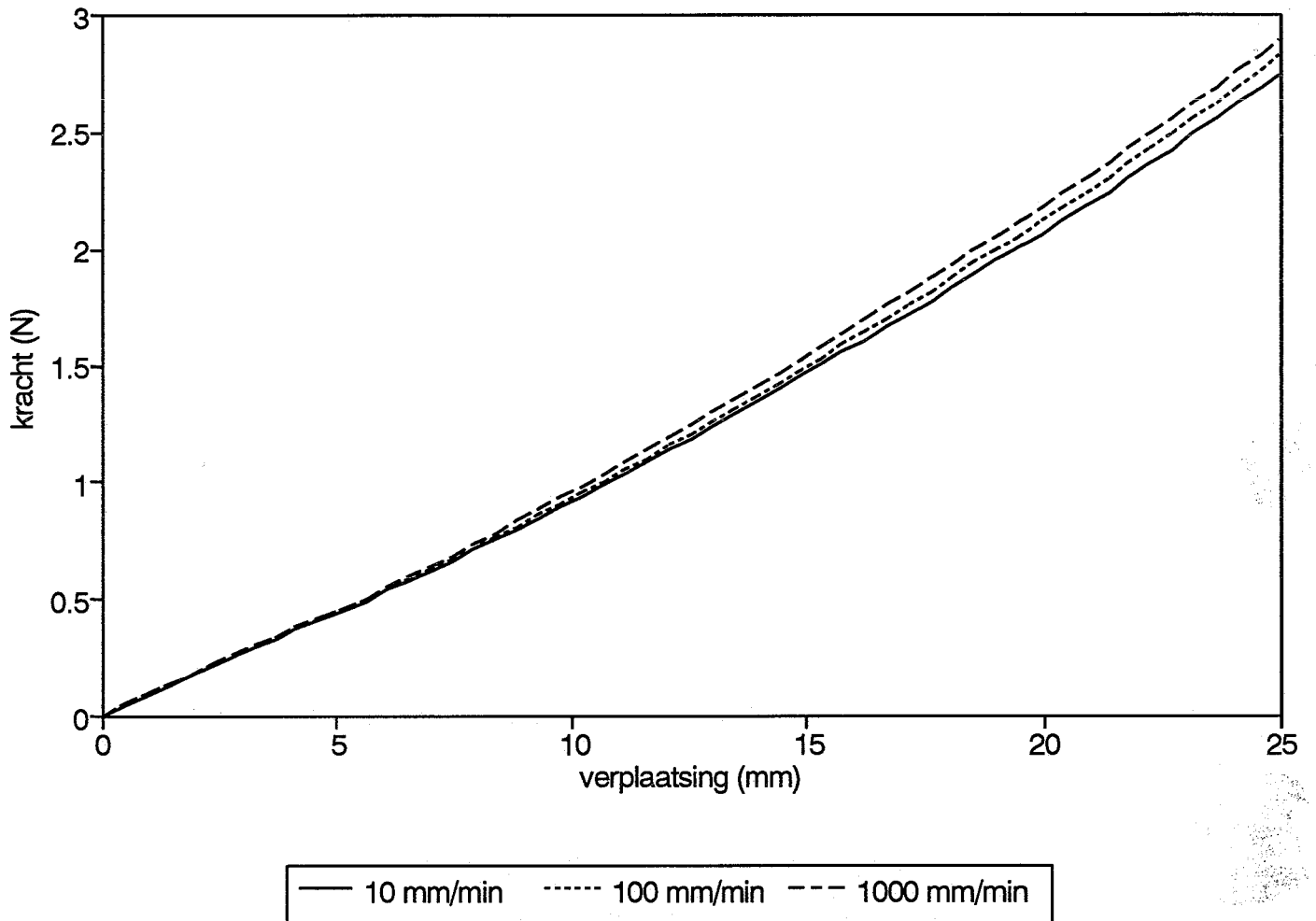


5.3.2. Reksnelheden.

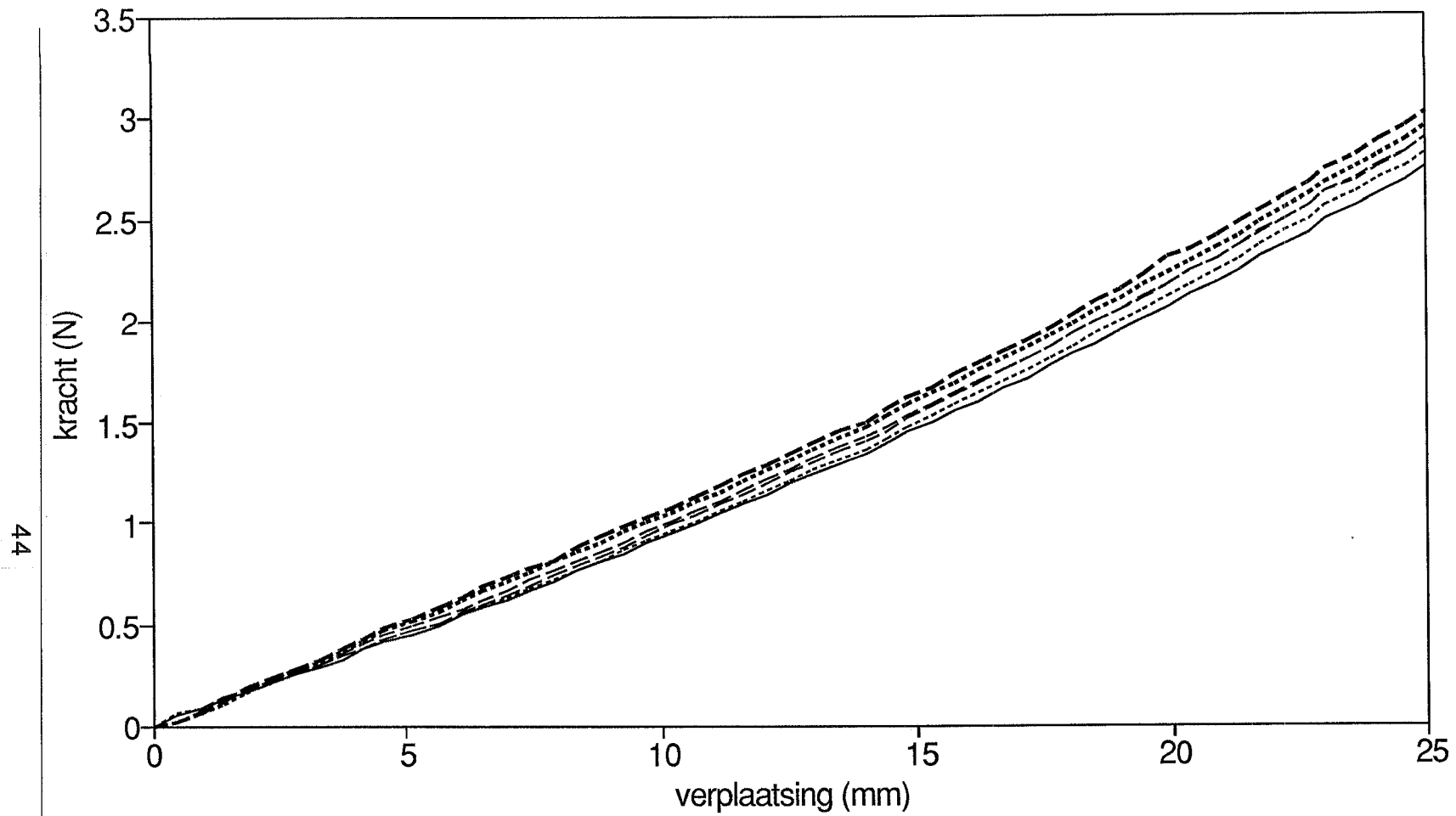
reksnelheden  
dichtheid 40 droog (Zwick)



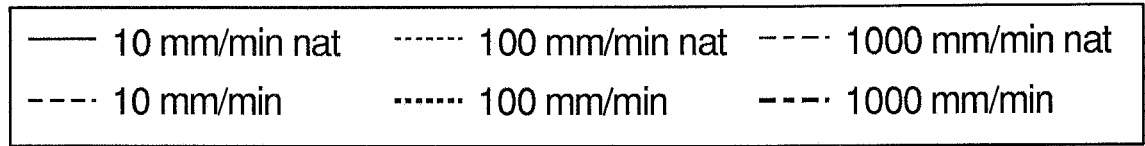
reksnelheden  
dichtheid 40 nat (Zwick)



reksnelheden  
dichtheid 40 nat & droog (Zwick)



44



bijlage

## Appendix A.

### A.1. Inleiding.

Omdat het visco-elastische model geen bevredigend resultaat heeft opgeleverd, is er nog een aanvullende poging gedaan een elastisch model te vinden dat het materiaalgedrag beter zou kunnen beschrijven. Het Mooney model (zie afbeelding A1) vertoont een recursieve kromming, dit in tegenstelling tot de gemeten kromme. Deze kromme laat namelijk juist een toenemende stijfheid zien bij grotere rekken. Het Mooney-Rivlin model lijkt derhalve geen juiste keuze voor dit materiaal en zal daarom niet verder uitgewerkt worden.

Een op het eerste gezicht beter alternatief wordt geboden door een lineair verband tussen de Green-Lagrange rektensor en de tweede-Piola-Kirchhoff tensor. Dit zal dan ook in de volgende paragraaf uitgewerkt worden. In paragraaf A.2. wordt beschreven onder welke aannamen en veronderstellingen in de continuumsmechanica het bovengenoemde verband afgeleid is. Het voert te ver de complete afleiding hier te reproduceren vandaar dat volstaan wordt met het vermelden van de resultaten. In paragraaf A.3. volgt een eerste berekening met een korte discussie van de resultaten.

Deze appendix is verre van compleet en moet dan ook meer gezien worden als een eerste aanzet voor verder onderzoek.

### A.2. Theorie.

Als eerste en misschien wel belangrijkste aanname wordt er een materiaalgedrag verondersteld zonder geheugen. Dit heeft als direct gevolg dat alle tijdsafhankelijke factoren uit de vergelijkingen wegvallen.

Een tweede niet onbelangrijke aanname is het buiten beschouwing laten van de thermische effecten. Er wordt dan verondersteld dat er geen inwendige warmteproductie is en dat de temperatuur overal in het lichaam en op alle tijdstippen hetzelfde is. Er treedt dan geen warmtestroom op.

De Green-Lagrange rektensor ( $E$ ) is dan te schrijven als een lineaire functie van de deformatietensor ( $F$ ) of als functie van de rechtse Cauchy-Green tensor ( $C$ ).

$$E = \frac{1}{2} [F^c \cdot F - I] = \frac{1}{2} [C - I] \quad (35)$$

De elastische potentiaal ( $U$ ), welke een maat is voor de inwendige energietoename per eenheid referentie volume, is een functie van de Green-Lagrange rektensor ( $E$ ).

$$U = (I+2E)^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

Verder wordt voor de eenvoud aangenomen dat het lichaam in de referentie-toestand ( $G_0$ ) spanningsloos is en het materiaal isotroop.

Met behulp van de wet van behoud van massa is af te leiden dat de tweede Piola-Kirchhoff spanningstensor ( $P_2$ ) via de afgeleide van de elastische potentiaal gekoppeld is aan de Green-Lagrange rektensor volgens onderstaande vergelijking

$$P_2 = \rho_0 \frac{dU}{dE} \quad (37)$$

waarbij  $\rho_0$  staat voor de soortelijke massa in de referentietoestand. De elastische potentiaal te schrijven als functie van de invarianten van de Green-Lagrange tensor.

$$U = U(I_E, II_E, III_E) \quad (38)$$

Waarbij de invarianten van E geschreven kunnen worden als

$$\begin{aligned} I_E &= \text{tr}(E) = E:I \\ II_E &= \frac{1}{2}(I_E^2 - E:E) \\ III_E &= \det(E) \end{aligned} \quad (39)$$

De tweede Piola-Kirchhoff spanningstensor ( $P_2$ ) is dan te schrijven als functie van de afgeleiden van de invarianten van de Green-Lagrange rektensor (E).

$$P_2 = \rho_0 \left( \frac{\delta U}{\delta I_E} \frac{dI_E}{dE} + \frac{\delta U}{\delta II_E} \frac{dII_E}{dE} + \frac{\delta U}{\delta III_E} \frac{dIII_E}{dE} \right) \quad (40)$$

Voor de elastische potentiaal kan nu een functie gekozen worden in de trant van

$$U = \alpha I_E + \beta II_E + \gamma III_E \quad (41)$$

Als we dit uitwerken voor een isotroop, lineair elastisch materiaal vinden we een lineair verband tussen de tweede Piola-Kirchhoff spanningstensor en de Green-Lagrange rektensor

$$P = \lambda \text{tr}(E) + 2\mu E \quad (42)$$

Beschouwen we kleine vervormingen dan zien we dat deze wet over gaat in de wet van Hook. Bij de één-dimensionale trekproef, die aan bovenstaand verband voldoet, kan de volgende deformatie genoteerd worden



$$F = \lambda_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 (\vec{e}_2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \vec{e}_3)$$

$$\text{met: } \lambda_1 = \frac{l}{l_0} \tag{43}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\left(\frac{A}{A_0}\right)}$$

Als deze deformatie ingevuld wordt in bovengenoemde constitutieve wet is voor de spanning in de  $e_1$ -richting de volgende vergelijking een beschrijving van de uniaxiale spanningstoestand

$$P_{11} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \frac{1}{2} (\lambda_1^2 - 1) = E \frac{1}{2} (\lambda_1^2 - 1) \tag{44}$$

Vermenigvuldigen we deze factor van de tweede Piola-Kirchhoff spanningstensor met het momentane oppervlak dan vinden we de uitdrukking voor de trekkracht (K), uitgeoefend op het trekstaafje.

$$K = \frac{1}{2} A_0 E \lambda_1 (\lambda_1^2 - 1) \tag{45}$$

Als nu de verlenging, de kracht en de dwarscontractie tijdens het uitvoeren van de trekproef gemeten worden is het dus mogelijk de elasticiteitsmodulus te berekenen. Als de dwarscontractie niet bekend is, is het mogelijk het momentane oppervlak te benaderen door aan te nemen dat het materiaal incompressibel is. Dit laatste is bij dit materiaal twijfelachtig maar omdat er geen gegevens beschikbaar zijn over de doorsnede verandering is deze veronderstelling toch gemaakt.

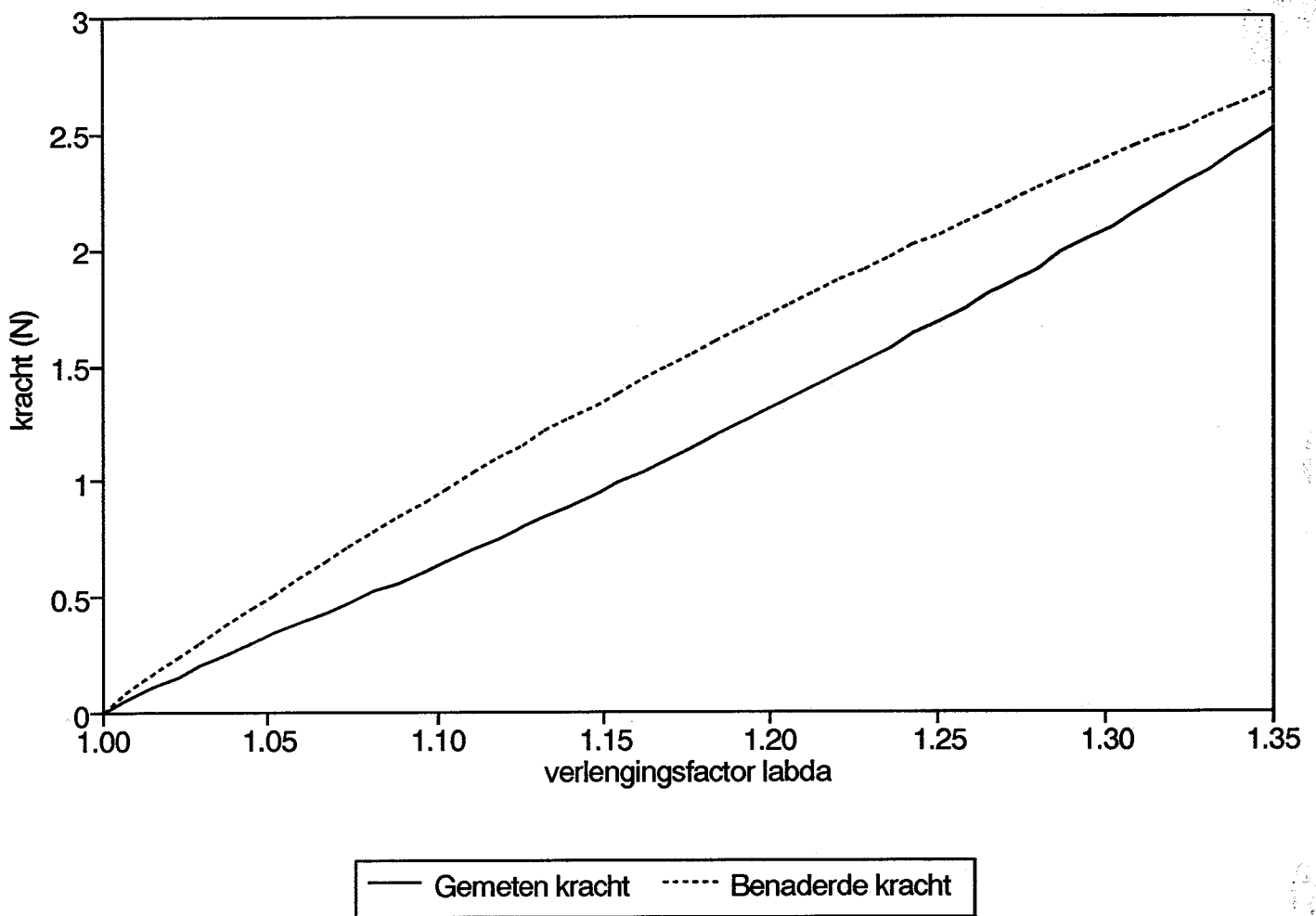
### A.3. Resultaten en discussie.

In de onderstaande figuur (A2) is de kracht uitgezet tegen de verlengingsfactor  $\lambda$ , welke hierboven reeds gedefinieerd is. Met behulp van het spreadsheetprogramma Quattro is een zo goed mogelijk passende curve gefit op de uit experimenten verkregen curve. De geschatte elasticiteitsmodulus is 0,030 N/mm<sup>2</sup>. De meting is verricht op de Frank trekbank aan een proefstuk met een dichtheid van 40 kg/m<sup>3</sup> in een droge omgeving. De reksnelheid bedroeg 100 mm per minuut.

Uit de grafiek valt op te maken dat het verloop van de geschatte kromme redelijk overeenkomt met het gemeten resultaat, bij toenemende verlenging zien we inderdaad een toenemende stijfheid, alleen neemt de stijfheid van de geschatte kromme teveel toe. De oorzaak van deze afwijking kan wellicht gevonden worden in

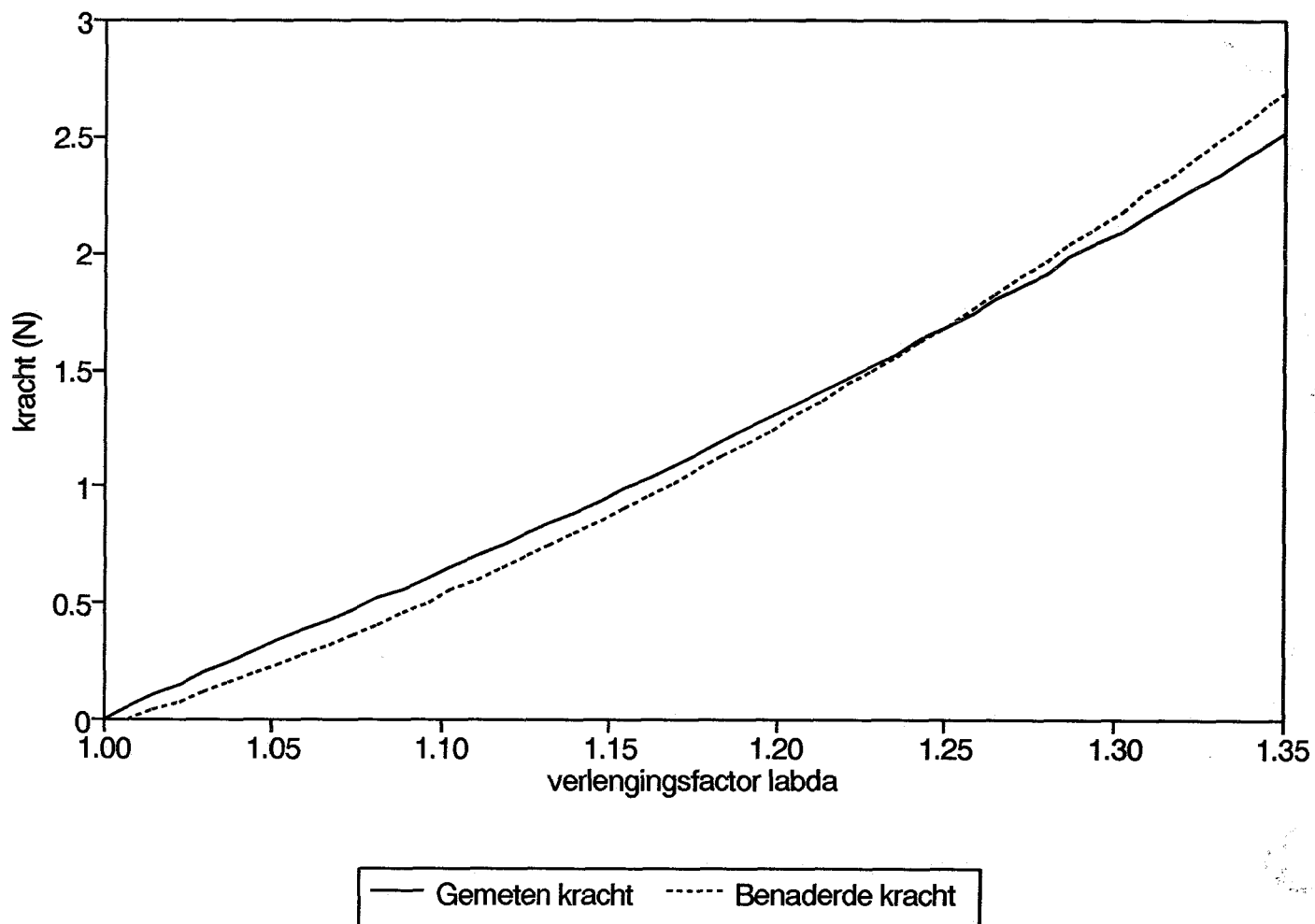
kromme teveel toe. De oorzaak van deze afwijking kan wellicht gevonden worden in de aanname van incompressibiliteit. In de laatste stap van de afleiding wordt de spanning omgeschreven naar kracht, waarbij de spanning vermenigvuldigd wordt met het oppervlak van de momentane doorsnede. Ik verwacht dat deze in werkelijkheid kleiner zal zijn dan berekend is. Dit in verband met de aanwezigheid van holten in het materiaal, waardoor er meer dwarscontractie zal optreden. De overschatting van het oppervlak zal daarom bij hogere rekken steeds meer gaan toenemen waardoor ook de kracht in toenemende te hoog geschat gaat worden. Dit is inderdaad terug te vinden in de grafiek.

Krachtverloop volgens Mooney  
trekproef dichtheid 40 droog (Frank)



figuurA1: Schatting verloop kracht versus verlengingsfactor (Mooney model)

Krachtverloop volgens Piola-Kirchhoff  
 trekproef dichtheid 40 droog (Frank)



figuurA2: Schatting verloop kracht versus verlengingsfactor