Elliptisch gepolariseerd licht

ELLIPTISCH GEPOLARISEERD LICHT.

1. De bijzondere gevallen.

Wanneer lineair gepolariseerd licht een dubbelbrekend medium passeert, zodanig dat het vlak van lineaire polarisatie een willekeurige hoek, α, ($\alpha \neq \frac{\pi}{4}$) maakt met de hoofdvlakken van dubbele breking en de onderlinge retardatie in deze hoofdvlakken een willekeurige hoek, γ, ($\gamma \neq n.\frac{\pi}{2}$) bedraagt, ontstaat een lichtsoort, die in de literatuur elliptisch gepolariseerd wordt genoemd.

We kunnen hierin twee bijzondere gevallen onderscheiden namelijk:

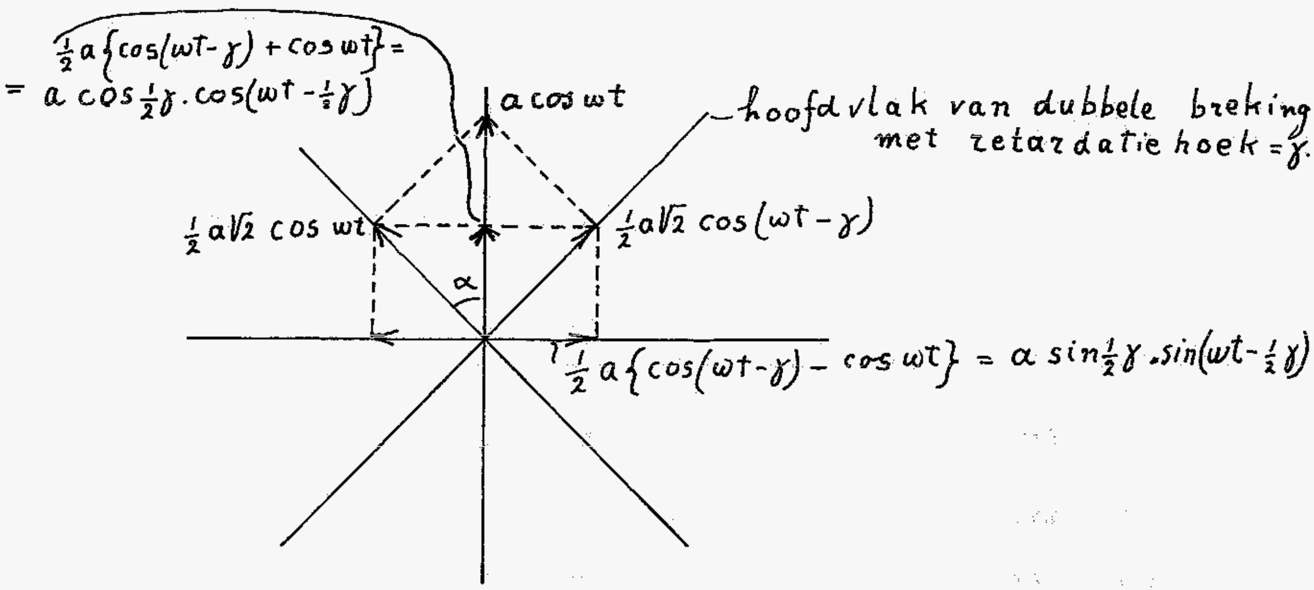
a) hoek $\alpha = \frac{\pi}{4}$

en

b) hoek $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

1.1. Geval a: $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

We kiezen voor de tekening het vlak, waarin het lineair gepolariseerde licht trilt, vertikaal.



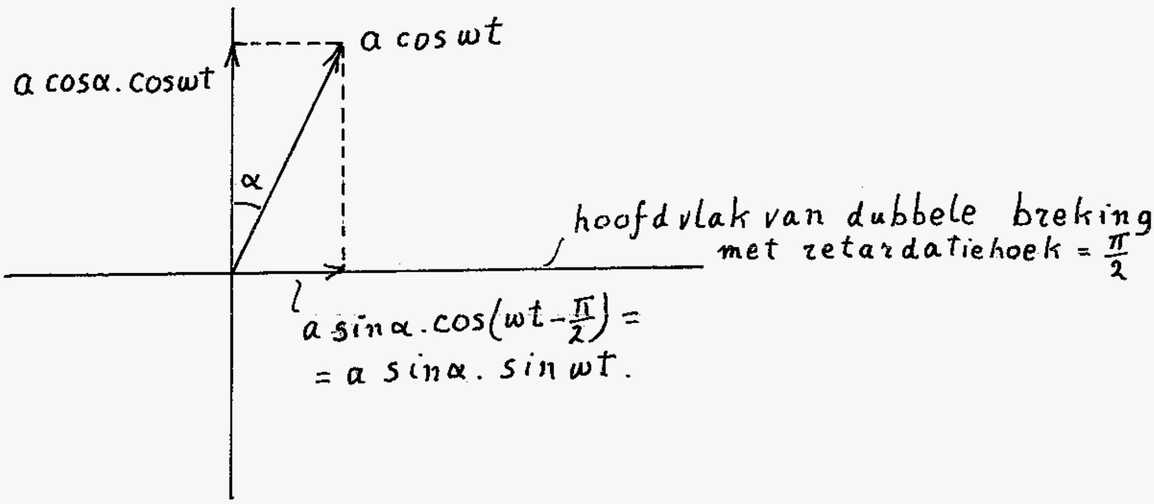
Het elliptisch gepolariseerde licht wordt dus beheerst door de formules:

in het vertikale vlak : $a \cos\frac{1}{2}\gamma.\cos(\omega t-\frac{\gamma}{2})$

in het horizontale vlak: $a \sin\frac{1}{2}\gamma.\sin(\omega t-\frac{\gamma}{2})$.

1.2. <u>Geval b: $\gamma = \frac{\pi}{2}$.</u>

We ~~kiezen~~ nu de hoofdvlakken van dubbele breking vertikaal en horizontaal.



We vinden dus voor het elliptisch gepolariseerde licht:

in het vertikale vlak : a cos α .cos(ωt)
in het horizontale vlak: a sin α .sin(ωt).

1.3. <u>Omschrijving van het wezen van het elliptisch gepolariseerde licht</u>.

Tussen het elliptisch gepolariseerde licht, dat in deze beide bijzondere gevallen ontstaat, bestaat geen wezenlijk verschil. Als we $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$ stellen, kunnen we voor beide de volgende omschrijving geven:
geprojecteerd in de richting van de voortplanting van het licht omschrijft het eindpunt van de resulterende vector een ellips, waarvan de assen zich verhouden als tg α = tg $\frac{1}{2}\gamma$; om op ieder moment de stand te kennen van deze resulterende vector, denken we ons een eenheidsvector, die met een constante hoeksnelheid ω roteert: de resulterende vector is dan voor iedere tijd t te vinden door de componenten van deze eenheidsvector in de richting van de assen van de ellips te vermenigvuldigen met resp. a sin α (a sin $\frac{1}{2}\gamma$) en a cos α (a cos $\frac{1}{2}\gamma$).

1.4. <u>Sénarmont</u>.

Door dit in wezen gelijk zijn en door de omkeerbaarheid van het licht kunnen we elliptisch gepolariseerd licht, dat ontstaan is volgens methode <u>a</u> weer volgens methode <u>b</u> terugformeren tot lineair gepolariseerd licht. Daardoor zijn we in staat retardaties, welke gebroken waarden van $\frac{\pi}{2}$ bevatten, te meten door de stand van de Analysator. Dit heet de <u>compensatie methode van Sénarmont</u>. De hoek α wordt dan gemeten, waardoor we de hoek γ kennen.

1.5. Voor 2-dimensionale metingen is de kennis van de bijzondere gevallen toereikend.

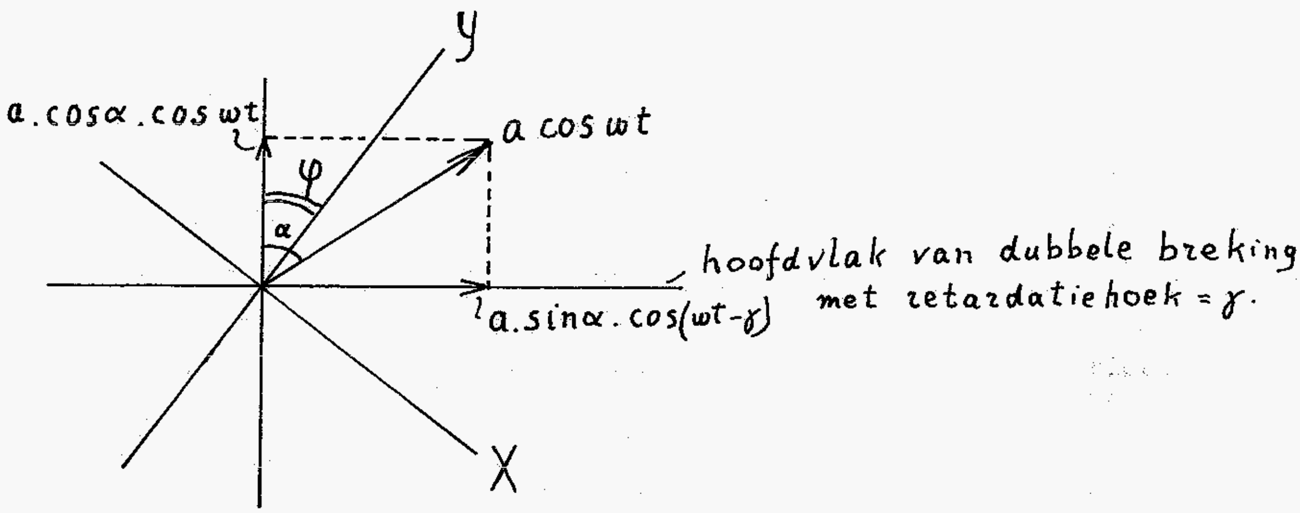
Bij het twee-dimensionale photo-spanningsonderzoek wordt voor de metingen altijd slechts gebruik gemaakt van elliptisch gepolariseerd licht afkomstig van één van deze bijzondere gevallen. Toch is het onbevredigend geen goed inzicht te hebben in het elliptisch gepolariseerde licht afkomstig van het algemene geval.

2. Het algemene geval.

Als eerste vraag zouden we daarbij willen stellen:
is er bij deze lichtsoort naast de door het eindpunt van de resulterende vector omschreven ellips ook de eenheidsvector aan te wijzen, die met een constante hoeksnelheid ω roteert, en die ons voor iedere tijd, t, door vermenigvuldiging in de richting van de assen van de ellips, de juiste stand van de resulterende vector aangeeft ?

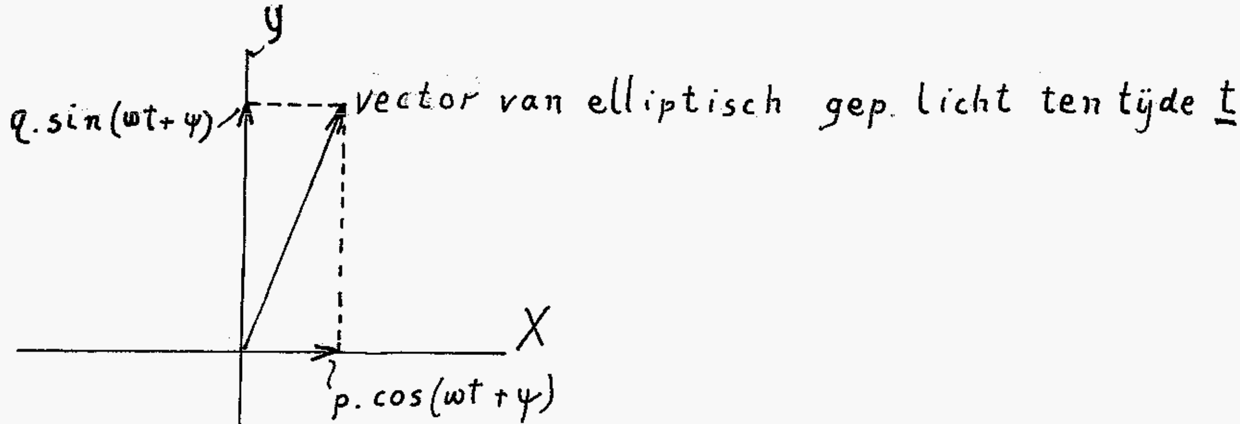
In het algemene geval hebben we een hoek $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ en een retardatiehoek $\gamma \neq n.\frac{\pi}{2}$.

2.1. De goniometrische behandeling.



Een willekeurig gekozen assenkruis, dat een hoek φ maakt met de hoofdvlakken van dubbele breking, levert de volgende formules voor de beide ontbondenen in X- en Y-richting:

$$\left.\begin{aligned} y &= a \cos\alpha.\cos\varphi.\cos(\omega t) + a \sin\alpha.\sin\varphi.\cos(\omega t-\gamma) \\ x &= a \sin\alpha.\cos\varphi.\cos(\omega t-\gamma) - a \cos\alpha.\sin\varphi.\cos(\omega t) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$



Wanneer de formules (1) voor y en x omgewerkt kunnen worden tot:

$$y = q \sin(\omega t + \psi) \quad \text{en}$$

$$x = p \cos(\omega t + \psi)$$

zouden we de hierboven gestelde "eerste vraag" bevestigend hebben beantwoord.

Om dit te onderzoeken werken we de formules (1) verder uit.

$$y = a(\cos\alpha.\cos\varphi.+\sin\alpha.\sin\varphi.\cos\gamma)\cos(\omega t) + a\sin\alpha.\sin\varphi.\sin\gamma.\sin(\omega t)$$

$$x = a(\sin\alpha.\cos\varphi.\cos\gamma.-\cos\alpha.\sin\varphi)\cos(\omega t) + a\sin\alpha.\cos\varphi.\sin\gamma.\sin(\omega t)$$

We stellen nu:

$$\left.\begin{aligned} a(\cos\alpha.\cos\varphi. + \sin\alpha.\sin\varphi.\cos\gamma) &= q.\sin\psi \\ a.\sin\alpha.\sin\varphi.\sin\gamma &= q\cos\psi \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

voor y krijgen we dan:

$$y = q.\sin\psi.\cos(\omega t) + q.\cos\psi.\sin(\omega t) = q.\sin(\omega t + \psi).$$

Ook stellen we:

$$\left.\begin{aligned} a(\sin\alpha.\cos\varphi.\cos\gamma - \cos\alpha.\sin\varphi) &= p.\cos\psi \\ -a.\sin\alpha.\cos\varphi.\sin\gamma &= p.\sin\psi \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

en krijgen voor x:

$$x = p.\cos\psi.\cos(\omega t) - p.\sin\psi.\sin\omega t = p.\cos(\omega t + \psi)$$

Het gaat er dus om na te gaan of er een bepaalde waarde van φ te kiezen is, waarbij voor q, p en ψ reële waarden ontstaan.

Zowel uit de eerste twee gelijkstellingen (2) als uit de tweede twee (3) kunnen we tg ψ halen. Deze beide waarden van tg ψ moeten dus aan elkaar gelijk zijn:

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{\cos\alpha.\cos\varphi + \sin\alpha.\sin\varphi.\cos\gamma}{\sin\alpha.\sin\varphi.\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha.\cos\varphi.\sin\gamma}{\cos\alpha.\sin\varphi.-\sin\alpha.\cos\varphi.\cos\gamma}$$

Deze vergelijking bevat maar één onbekende, namelijk φ.
We werken hem om tot:

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha.\sin^2\gamma.\sin\varphi.\cos\varphi = {} & \cos^2\alpha.\sin\varphi.\cos\varphi - \\ & - \sin\alpha.\cos\alpha.\cos^2\varphi.\cos\gamma + \\ & + \sin\alpha.\cos\alpha.\sin^2\varphi.\cos\gamma - \\ & - \sin^2\alpha.\cos^2\gamma.\sin\varphi.\cos\varphi. \end{aligned}$$

ofwel:

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha.\sin\varphi.\cos\varphi = {} & \cos^2\alpha.\sin\varphi.\cos\varphi - \\ & - \sin\alpha.\cos\alpha.\cos\gamma.(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{aligned} \quad \text{en:}$$

$$\tfrac{1}{2}(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\sin 2\varphi = -\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha.\cos\gamma.\cos 2\varphi \quad \text{en:}$$

$$\cos 2\alpha.\sin 2\varphi = \sin 2\alpha.\cos 2\varphi.\cos\gamma. \quad \text{en:}$$

$$\mathrm{tg}\,2\varphi = \mathrm{tg}\,2\alpha\,.\,\cos\gamma\,. \quad (4)$$

Het blijkt dus dat het altijd mogelijk is een hoek φ te kiezen zodanig dat de formules voor de coördinaten worden omgevormd tot:

$$y = q \sin(\omega t + \psi)$$
$$x = p \cos(\omega t + \psi).$$

Er blijkt dus ook een eenheidsvector te zijn, die met constante hoeksnelheid roteert, die ons voor iedere tijd, t, door vermenigvuldiging in de richting van de assen van de ellips, de juiste stand van de resulterende vector aangeeft. In wezen komt dus het elliptisch gepolariseerde licht van het algemene geval overeen met dat van de beide bijzondere gevallen.

Men kan uit de beide stellen gelijkstellingen (2) en (3) natuurlijk de waarde van q en p uitrekenen.

$$q=a\sqrt{(\cos\alpha.\cos\varphi+\sin\alpha.\sin\varphi.\cos\gamma)^2+\sin^2\alpha.\sin^2\varphi.\sin^2\gamma}$$

$$p=a\sqrt{(\sin\alpha.\cos\varphi.\cos\gamma-\cos\alpha.\sin\varphi)^2+\sin^2\alpha.\cos^2\varphi.\sin^2\gamma}$$

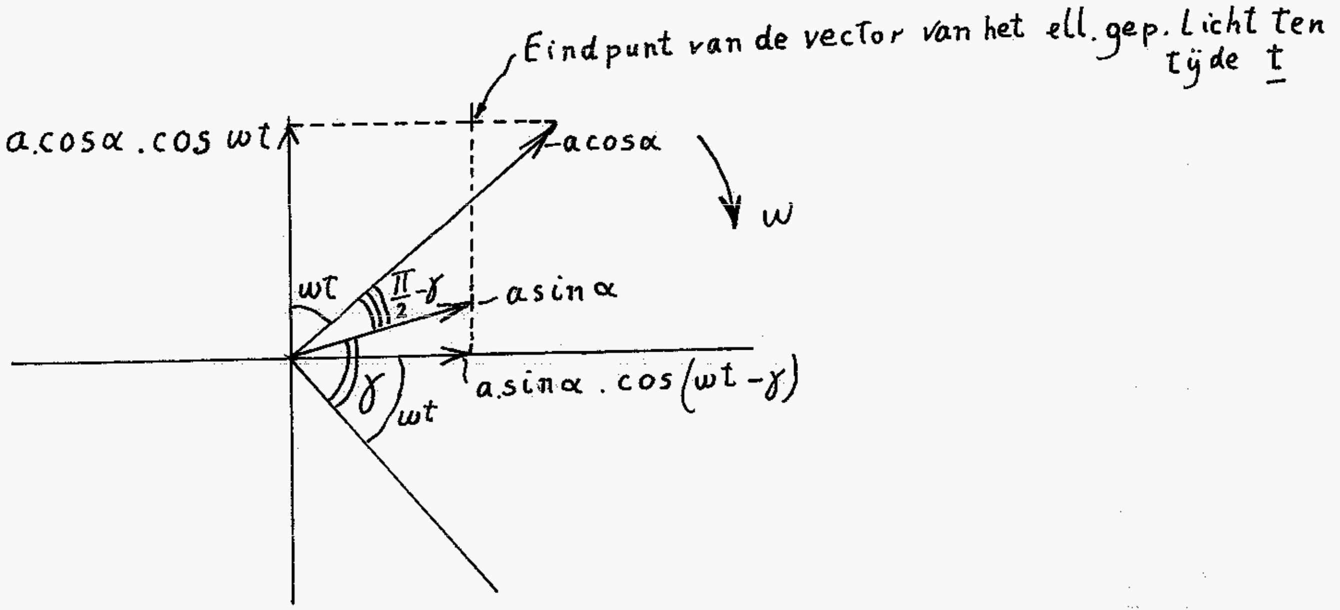
dit is om te vormen in:

$$q=a\sqrt{\cos^2(\alpha-\varphi)-\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha.\cos 2\varphi.(1-\cos\gamma)}$$

$$p=a\sqrt{\sin^2(\alpha-\varphi)+\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha.\cos 2\varphi.(1-\cos\gamma)}$$

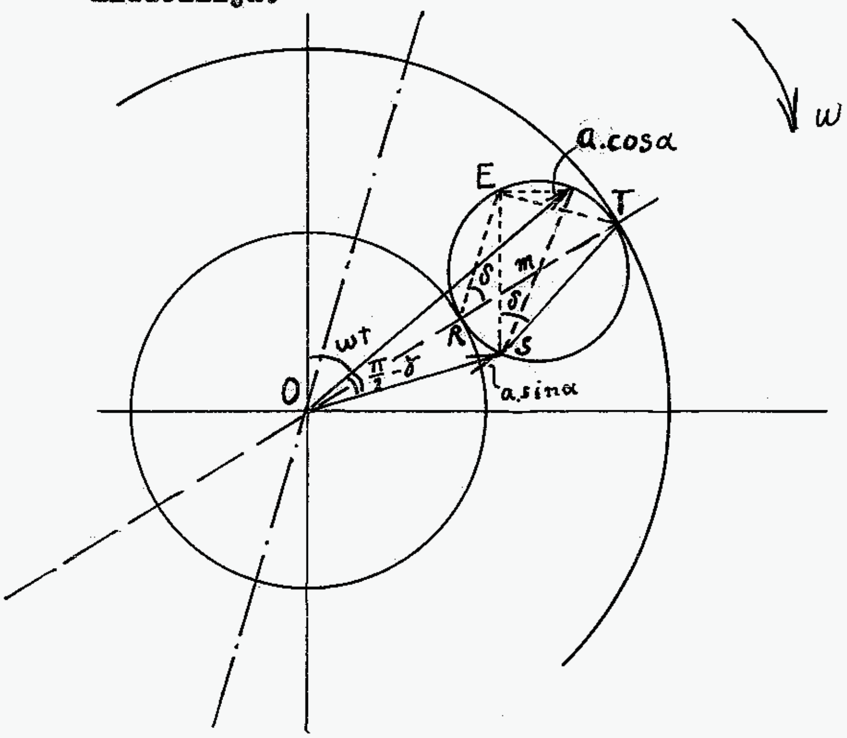
Met behulp van formule (4) zou men hoek φ in deze formules moeten kunnen elimineren. Ik heb daartoe geen kans gezien. Het resultaat lijkt me erg ingewikkeld en daardoor niet meer leerzaam.

2.2. Meetkundige behandeling.



De ordinaat van het eindpunt van de vector van het elliptisch gepolariseerde licht vinden we door de vector a cos α, die een hoek ωt maakt met de vertikale as, op die as te projecteren. De abscis van dat eindpunt vinden we door de vector a sin α, die een hoek $\frac{\pi}{2} - \gamma$ maakt met de vector a cos α, op de horizontale as te projecteren.

We moeten nu de kromme onderzoeken, die dit eindpunt E beschrijft.
Hiervoor tekenen we de beide vectoren a cos α en a sin α nog eens opnieuw en beschrijven een cirkel met de verbindingslijn van de beide eindpunten van deze vectoren als middellijn.



Alle punten van deze cirkelomtrek worden bij het wentelen van de getekende figuur op hun beurt beeldpunt van het eindpunt van de vector van het elliptisch gepolariseerde licht. De lengte van de halve assen van de ellips lezen we direct uit de figuur af door de verbindingslijn OT van O met het middelpunt M van de cirkel te trekken.
Om O kunnen we dus ook twee cirkels trekken, die omgeschreven en ingeschreven cirkel van de ellips zijn.

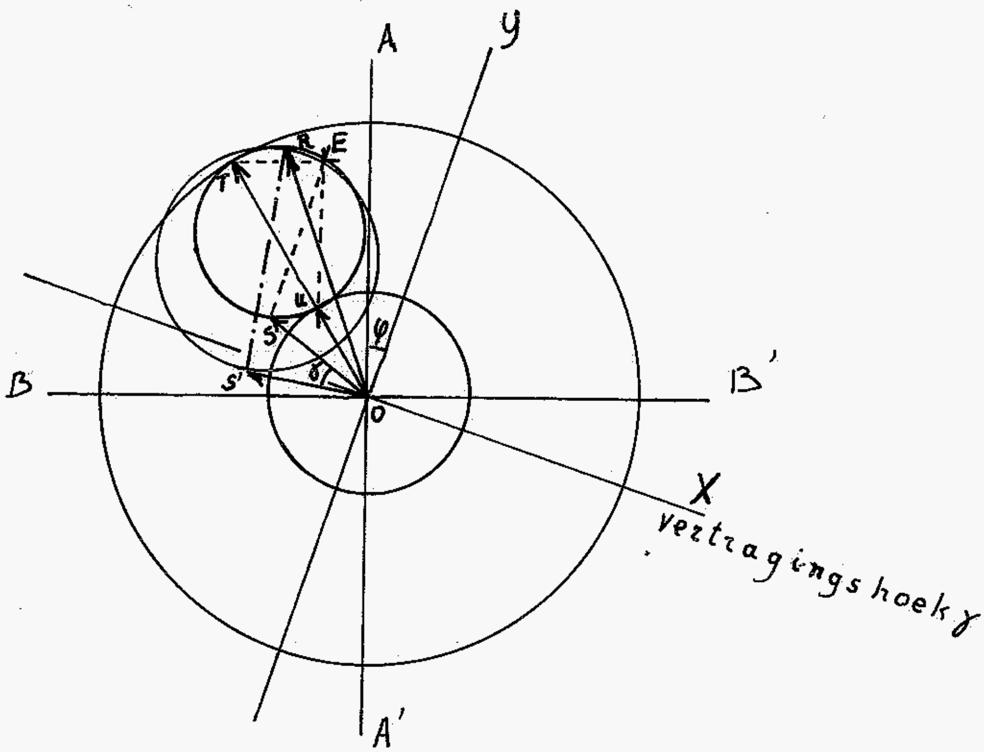
Om de stand van de assen van de ellips te vinden, moeten we zoeken naar de stand van de roterende figuur op het moment, dat het eindpunt T van OM beeldpunt is van de vector van het elliptisch gepolariseerde licht. Dit is het moment dat de lijn ST vertikaal staat, dus dat de figuur is teruggedraaid over de hoek EST = δ . Deze hoek δ is ook gelijk $\angle$ ERT. De lijn ER loopt dus evenwijdig aan de grote en de lijn ET aan de kleine as van de ellips die door de eindpunten van de vector van het elliptisch gepolariseerde licht wordt beschreven.

We zien dus: de klassieke manier van het tekenen van een ellips op de twee assen m.b.v. de omgeschreven en ingeschreven cirkel

Ook bij deze meetkundige behandeling van het probleem is makkelijk in te zien, dat er weer een eenheidsvector te denken is, die met constante hoeksnelheid ω roteert en waarvan men de ontbondenen in de richting van de assen van de ellips maar behoeft te vermenigvuldigen met de waarde van de halve assen om voor iedere tijd t de vector van het elliptisch gepolariseerde licht te verkrijgen. Deze eenheidsvector ligt namelijk op de lijn OR.

2.3. Elliptisch gepolariseerd licht passeert weer opnieuw een dubbelbrekend medium.

Nu we gezien hebben, dat het elliptisch gepolariseerde licht, dat in het algemene geval ontstaat, in wezen niet verschilt van dat van de beide bijzondere gevallen, stellen we de vraag, of er nog iets wezenlijks anders naar voren komt, als we elliptisch gepolariseerd licht een dubbelbrekend medium laten passeren, waarvan de hoofdvlakken van dubbele breking onder een willekeurige hoek staan met de assen van de ellips.



AA' en BB' zijn de assen van de ellips, die door het eindpunt E van het elliptisch gepolariseerde licht wordt beschreven (E is getekend op de klassieke manier met gebruikmaking van de omgeschreven en ingeschreven cirkel van de ellips).
Deze klassieke tekenmethode kunnen we ook als volgt omschrijven: het eindpunt E wordt gevonden, doordat de vertikale projectie (op AA') van vector OT wordt gekombineerd met de horizontale projectie (op BB') van de vector OU. We kunnen dit 2 genererende vectoren noemen; de éne geeft de vertikale, de andere de horizontale projectie van E. Omdat het assenkruis samenvalt met de assen van de ellips, vallen de beide vectoren langs elkaar.

Wanneer we nu een over een hoek φ gedraaid assenkruis XY kiezen, dan kunnen we ook voor dit assenkruis een stel "genererende vectoren" vinden, OR en OS, zodanig dat de projectie van OR op de Y-as de y-waarde en de projectie van OS op de X-as de x-waarde van E geeft.
Beide vectoren hebben een constante onderlinge hoek en roteren met hoeksnelheid ω.

Het feit dat we nu voor iedere ontbondene, resp. in de Y- en in de X-richting, een aparte genererende vector kennen, maakt het ons gemakkelijk het effect van de vertragingshoek, γ, in de X-as in rekening te brengen. Vector OS wordt daardoor namelijk over een hoek γ gedraaid tot de stand OS'.

Na het passeren van het dubbel-brekende medium hebben we dus voor het assenkruis X-Y de genererende vectoren: OR en OS'. Op dezelfde methode als aangegeven onder 2.2. kunnen we uit deze vectoren de grootte en de stand van de assen van het nu ontstane elliptisch gepolariseerde licht construeren.
In de figuur zijn we daaraan al begonnen door de cirkel met R en S' als middellijn reeds te tekenen. We zijn echter niet verder gegaan, omdat anders de figuur niet meer overzichtelijk zou zijn.
We behoeven ook niet verder te gaan, want in 2.2. hebben we aangetoond, dat licht, dat vastgelegd wordt door twee van dergelijke genererende vectoren, elliptisch gepolariseerd licht is met een eenheidsrichtvector, die een constante omwentelingssnelheid bezit.

Eindhoven, 5 oktober 1960

J. Bergmans.

dr ir J. Bergmans.