

# Bepaling van de nauwkeurigheid van een moire-meetsysteem

**Citation for published version (APA):**

Hulst, A. P. A. J., & Paro, J. (1965). *Bepaling van de nauwkeurigheid van een moire-meetsysteem*. (TH Eindhoven. Afd. Werktuigbouwkunde, Laboratorium voor mechanische technologie en werkplaatstechniek : WT rapporten; Vol. WT0133). Technische Hogeschool Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1965

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.



technische hogeschool eindhoven

laboratorium voor mechanische technologie en werkplaatstechniek

rapport van de sectie: meettechniek

titel: bepaling van de nauwkeurigheid van een  
moiré - meetsysteem

auteur(s): A.P.A.J. Hulst  
J. Paro

sectieleider: drs. J. Koning

hoogleraar: Prof.dr. P.C. Veenstra

**samenvatting**

Dit rapport is het resultaat van metingen ter afsluiting van het college bijzondere onderwerpen uit de lengtemeettechniek.

De opdracht was de systematische fouten te bepalen van een moiré rooster met een steek van  $4 \mu\text{m}$  en van de daarbij behorende hulpmiddelen. De metingen zijn gedaan door vergelijking met een glazen lineaal, die met een spiraalmicroscop werd afgelezen. De positie van het moiré systeem werd op een oscillograaf afgelezen, een elektronische telschakeling werd niet gebruikt. De meetonzekerheid was ca.  $1,2 \mu\text{m}$  de invloed van onbekende systematische fouten wordt geschat op  $0,5 \mu\text{m}$ . Het rooster blijkt een periodieke fout te hebben met een periode van ca.  $30 \text{ mm}$ . en een amplitude van ca.  $1 \mu\text{m}$ . De gemiddelde steek van het rooster is een fractie  $7 \times 10^{-5}$  te groot.

**prognose**

Incidenteel onderzoek

blz. 1 van 25 blz.

rapport nr. 0133

codering:

M 8d

trefwoord:

lengtemeting  
moiré

datum:

5-2-1965

aantal blz. 18

+ 5 bijl. (7 pag.)

geschikt voor  
publicatie in:

2. Inleiding.

2.1 Buigingsroosters.

Wanneer evenwijdig licht valt op een buigingsrooster met steek  $a$  als in figuur 1 wordt dit in het algemeen afgebogen volgens de formule:

$$\frac{a}{2} (-\sin \alpha_1 + \sin \beta_1) = k_1 \lambda; \quad k_1 = \pm (0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

waarin  $\lambda$  de golflengte van het invallende licht is en  $k_1$  de orde van de afgebogen lichtbundel.

Indien achter dit eerste rooster een tweede geplaatst wordt met dezelfde steek  $a$  vindt daar eveneens een afbuiging plaats volgens:

$$\frac{a}{2} (-\sin \alpha_2 + \sin \beta_2) = k_2 \lambda; \quad k_2 = \pm (0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

Het licht dat uit het tweede rooster treedt voldoet, zoals figuur 2 toont, achtereenvolgens aan formule (1) en (2), zodat met  $\alpha_2 = \beta_1$ , volgt door optellen:

$$\frac{a}{2} (-\sin \alpha_1 + \sin \beta_2) = (k_1 + k_2) \lambda = r \lambda \quad (3)$$

Als  $r$  de totale orde voorstelt van het door beide roosters doorgelaten licht, blijkt, dat licht van dezelfde som-orde ook dezelfde hoek van uitval,  $\beta_2$  heeft en dus evenwijdig is.

Plaatst men achter rooster 2 een divergencerende lens  $L$  en het men in het brandvlak van deze lens een scherm  $S$  (figuur 3) dan zie men op  $S$  een aantal lichtvlekken voor de orde  $r = \pm (0, 1, 2, \dots)$  indien het invallende licht monochromatisch was.

Bij niet-monochromatisch licht worden de lichtvlekken breder en ziet men voor elke orde een spectrum ontstaan in overeenstemming met formule (3).

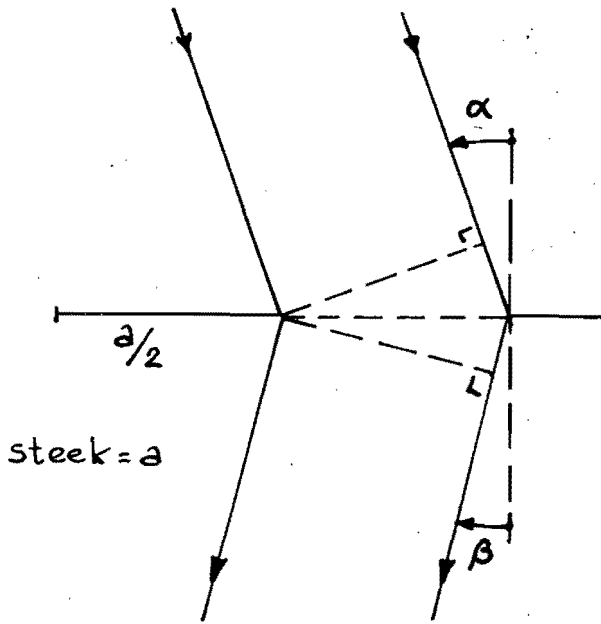
2.2 Moiréroosters.

De gebruikte moiréopstelling bestaat in principe uit twee evenwijdig opgestelde buigingsroosters, waarvan de strepen onderling een kleine hoek  $\theta$  maken.

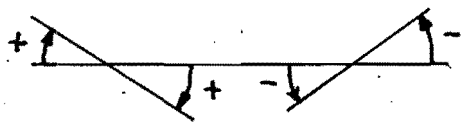
Definieert men het vlak  $V_1$   $\perp$  het rooster  $R_1$  en  $\perp$  de streep-richting van dit rooster, en het vlak  $V_2$  op gelijke wijze met betrekking tot  $R_2$ , dan maken deze vlakken een hoek  $\theta$  met elkaar, die door het medianvlak  $V$  ( $X$ - $Y$  vlak) in twee gelijke hoeken wordt verdeeld (zie figuur 4).

Worlt nu rooster  $R_1$  vast opgesteld gedacht (indexrooster) en wordt  $R_2$  bewogen in de  $X$ -richting dan ontstaan in het  $XY$ -vlak moiré- of interferentiebanden, die evenwijdig gericht zijn met de  $X$ -as en die zich verplaatsen in de  $Y$ -richting.

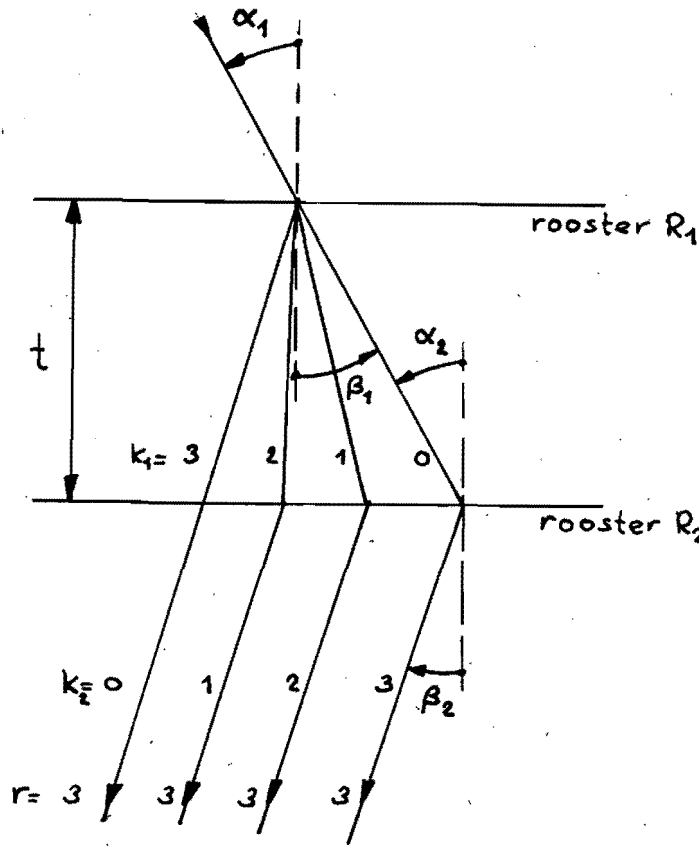
Als  $R_2$  één steek  $a_2$  opschuift langs de  $X$ -as schuift het moirépatroon één steek  $A$  op langs de  $Y$ -as dus:  $\frac{Y}{A} = \frac{X}{a}$ .  
Hierbij is:



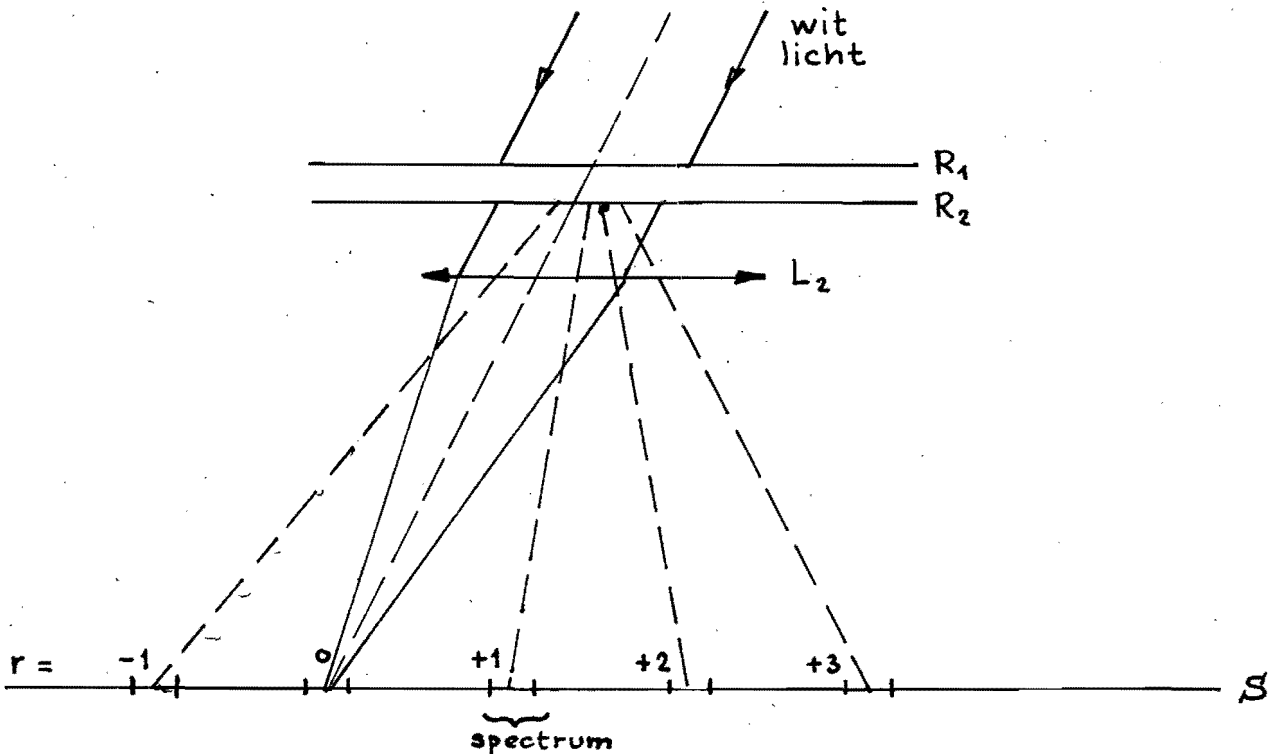
figuur 1: Buigingsrooster



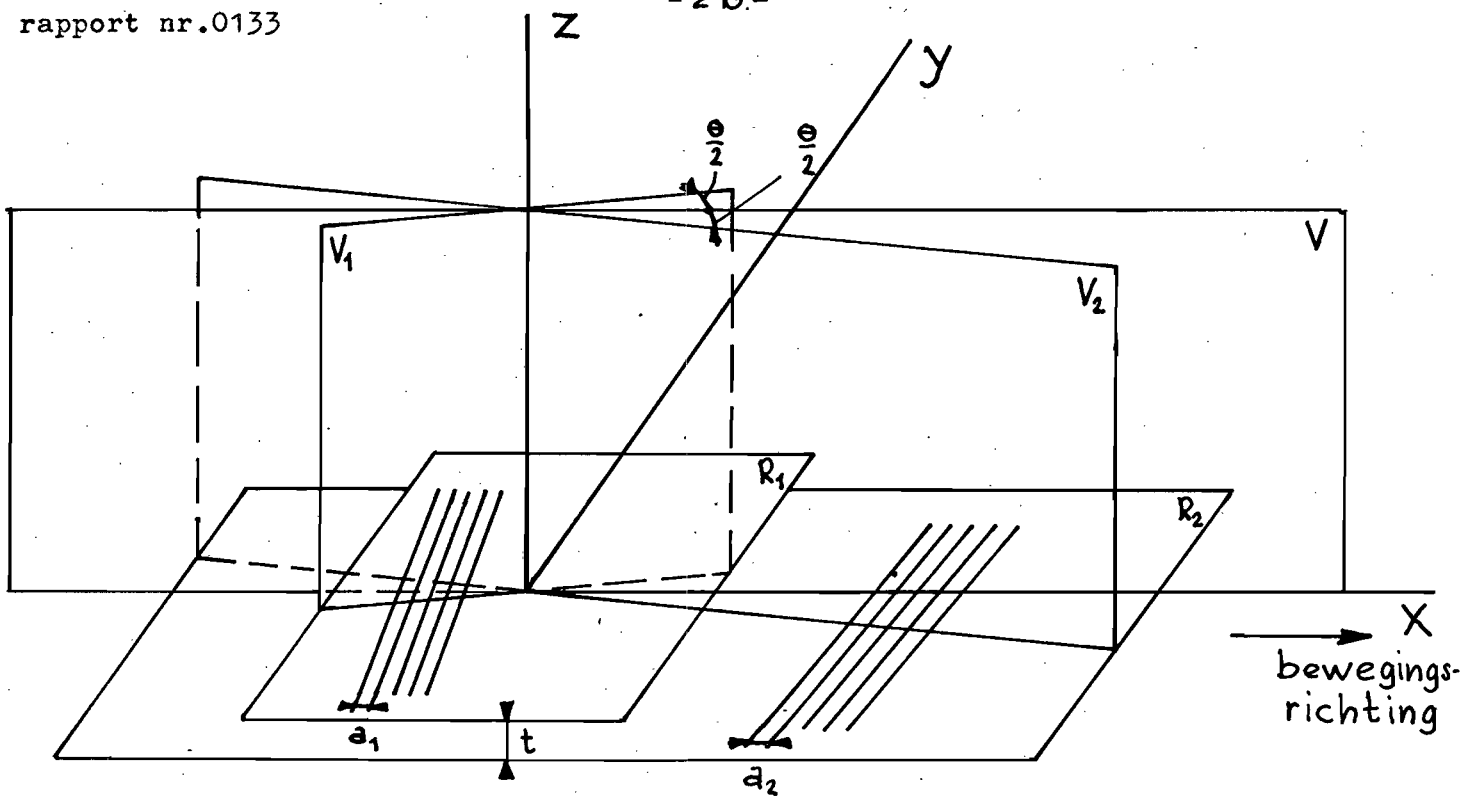
tekenafpraak hoeken



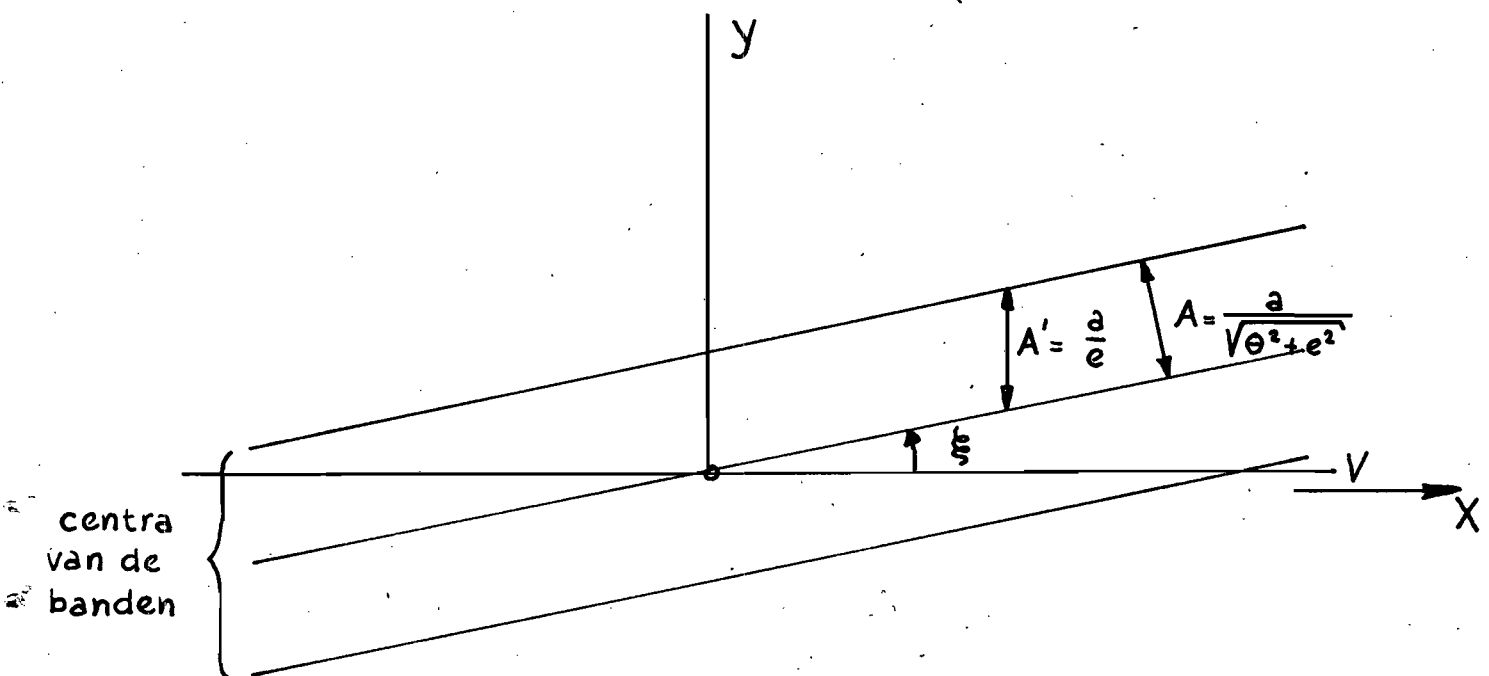
figuur 2: Dubbelrooster



figuur 3: Principe van de opstelling



figuur 4: Moiré configuratie



figuur 5: Moiré banden

$$A = \frac{a}{\theta} ; \text{ als } a_1 = a_2 = a \quad (4)$$

Wanneer de steken  $a_1$  en  $a_2$  van de beide roosters niet precies gelijk zijn zodat  $a_1 = (1+e)a_2$  met  $e \ll 1$ , maken de banden een kleine hoek  $\xi$  met de X-as (zie figuur 5) waarbij  $\tan \xi = e/a$ . De afstand tussen de banden, gemeten langs de Y-as, blijft echter voldoen aan (4) met  $a = a_2$ , de steek van het bewegende rooster.

Plaast men nu één of meerdere fotocellen achter een spleet // Y-as, in het scherm 3 van figuur 3 dan varieert de opvallende hoeveelheid licht bij het verschuiven van de moirébanden volgens:

$$I(y) = 1 + B \cos \left\{ \frac{2\pi}{A} (y - y_0) \right\}$$

ofwel

$$I(x) = 1 + B \cos \left\{ \frac{2\pi}{a} (x - x_0) \right\} \quad (5)$$

waarin  $|B| < 1$  afhankelijk van de opstelling.

### 3. Proefopstelling.

Een schematisch beeld van de opstelling is gegeven in figuur 6.

Hierin is:

- A lichtbron
- $L_1, L_2$  lenzen
- $L_3$  facettenlens
- $R_1$  indexrooster
- $R_2$  bewegendrooster
- $C_1 - C_4$  fotocellen
- E oscilloscoop
- B optische lineaal
- D microscoop
- F micrometerspil
- S slede
- G geleidingen

We kunnen bij deze opstelling een drietal verschillende delen onderscheiden.

- 1 Het bewegende rooster met indexrooster en een stel lenzen, om de gewenste Moiré-banden te verkrijgen.
- 2 Het electrisch gedeelte. Dit bestond uit een viertal fotocellen, waarvan het signaal werd toegevoerd aan de oscilloscoop.

- 3 Een optische lineaal met microscoop.  
Deze lineaal diende als vergelijkingsobject voor het te onderzoeken rooster.

De opstelling was zodanig, dat de slede, waarop het te onderzoeken rooster en de lineaal waren bevestigd, ten opzichte van indexrooster en lenzenstelsel beweegbaar was over een tweetal geleidingen.

Het indexrooster bezat een instelmogelijkheid voor die rotaties en een translatie.

Ook was de stand van lichtbron en fotocellen ten opzichte van indexrooster instelbaar.

De diverse oplettingen waren kinematisch bepaald uitgevoerd.

### 3. 1

Lens  $L_1$  is zodanig opgesteld, dat de lichtstralen evenwijdig op het indexrooster vallen.

Lens  $L_2$  dient, om het evenwijdige licht, dat van het bewegend rooster komt te focuseren.

De fotocellen ontvangen de infra-rode straling van het tweede orde spectrum.

Door de strepen van indexrooster en bewegend rooster een hoek  $\theta$  met elkaar maken ontstaan de zogenaamde moiré-banden.

De facettenlens  $L_3$  dient nu, om deze banden ondanks de werking van Lens  $L_2$  gescheiden te houden in een vlak, dat evenwijdig is met de roosters.

### 3. 2

De hoek  $\theta$  tussen de strepen van de roosters is zo ingesteld, dat de onderlinge afstand tussen de fotocellen gelijk is aan een vierde deel van de bandbreedte (fig. 7);  $\frac{1}{4}A$ .

Deze waarde kan eventueel vermeerderd worden met een geheel aantal malen de afstand  $A$ .

Beschouwd wordt nu de variatie in lichtintensiteit, die de cellen ontvangen bij beweging van het te onderzoeken rooster.

Deze variatie zal sinusvormig zijn en de cellen zullen onderling een faseverschil vertonen van  $90^\circ$ .

Cel 1 en cel 3, die een faseverschil hebben van  $180^\circ$ , zijn zo in een brug geschakeld dat hun signalen elkaar versterken (fig. 7)

Hetzelfde is gedaan met cel 2 en 4. De gecombineerde signalen hebben een faseverschil van  $90^\circ$  en worden toegevoerd aan de horizontale en verticale afbuigplaten van de oscilloscoop.

Als de faseverschillen en de versterkingen goed zijn ingesteld ontstaat op de oscilloscoop een cirkel, als het rooster bewogen wordt.

Bij onjuiste instelling ontstaat een ellips als interferentiebeeld.

Dit beeld geeft de mogelijkheid om de stand van de strepen van het indexrooster ten opzichte van de strepen van het bewegend rooster nauwkeurig in te stellen.

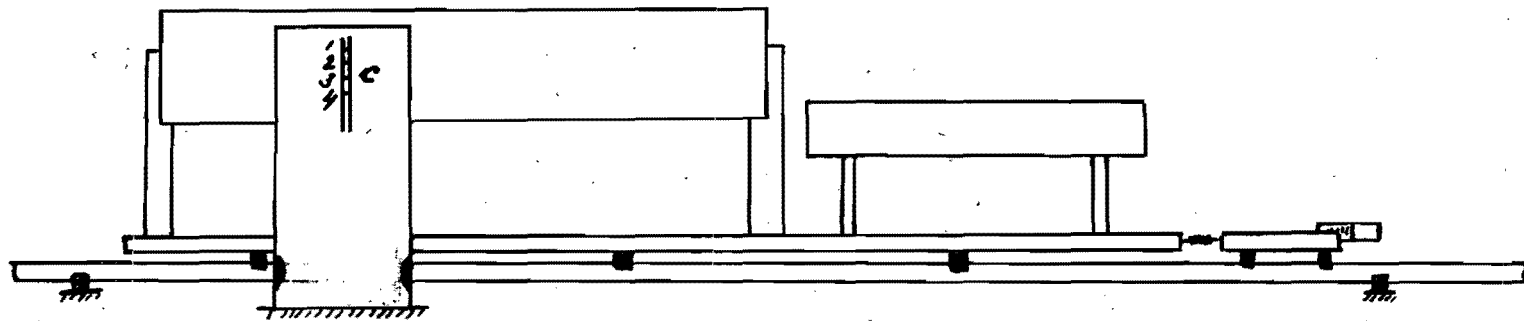
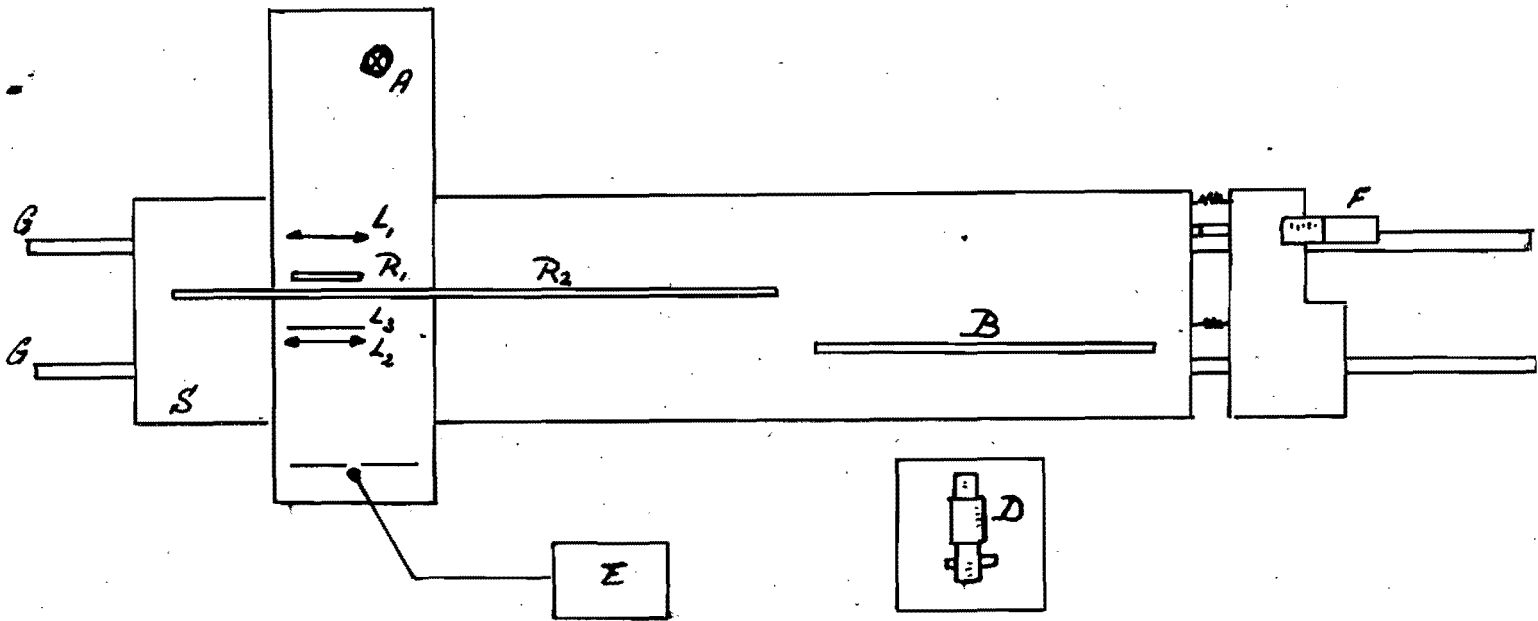


fig. 6 PRINCIPLE VAN DE OPSTELLING.



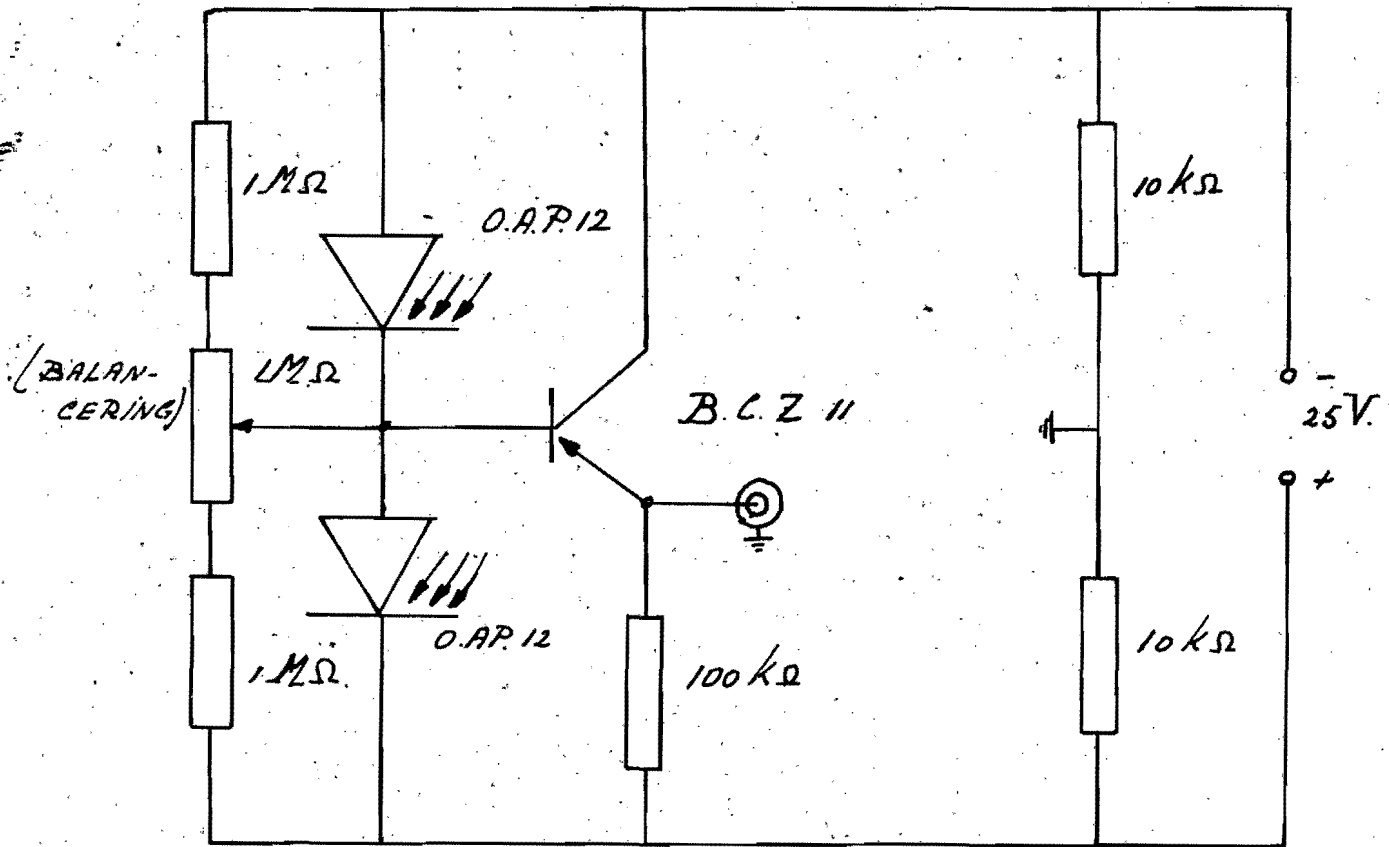
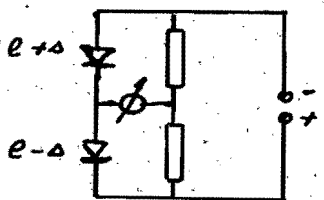
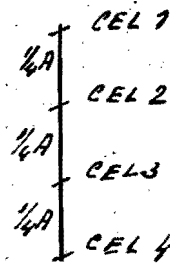


Fig. 7.



PRINCIPE.

ELECTRISCHE  
SCHEMELING.



4. Waarnemingen.4. 1 Uitvoering.

Met behulp van de optische lineaal werden de af te lezen waarden  $X'$  ruwweg ingesteld en wel zo dat zij ongeveer equidistant waren. Daarna werd zodanig bijgesteld dat de spot op de oscilloscoop steeds op dezelfde plaats terecht kwam, namelijk zover mogelijk naar een zijde. Met behulp van de richtkijker<sup>1)</sup> werd daarna de juiste waarde van  $X'$  afgelezen. Voor elke waarde van  $X'$  werd deze meting tweemaal herhaald.

In bijlage II en III zijn de gemiddelden van deze metingen genoteerd terwijl tevens de spreidingsbreedte  $w$  van het drietal bijbehorende waarden werd aangegeven.

$$w = (X'_{max} - X'_{min}) \quad (10^{-4} \mu m) \quad (6)$$

Wanneer de steek van het bewegende rooster overal exact  $4 \mu m$  geweest zou zijn moest gelden:

$$X'_i = n_i \cdot 4 + \tau, \quad n_i \text{ geheel}; \quad \tau < 4 \mu \quad (7)$$

$\tau$  is een toevallige beginwaarde, die voor alle metingen hetzelfde is. Het moiré-rooster vertoont echter systematische, en-of, periodieke fouten. Om de systematische afwijking te bepalen werd gesteld:

$$y'_i = x'_i - n_i \cdot 4 \quad (8)$$

De waarden van  $y'_i$  volgens deze formule, waarbij  $n_i$  in het begin maximaal werd gesteld en voor grotere waarden van  $X'$  zodanig dat de meetpunten ongeveer op een aan een gesloten rechte lagen, zijn eveneens aangegeven in de bijlagen II en III. Daarnaast zijn in de grafieken A, B en C de waarden voor  $X'$  en  $Y'$  lineair uitgezet voor de meetseries I, II en III.

4. 2 Resultaten

Uit de grafieken A, B en C blijkt, dat de waarden van  $y'_i$  t.o.v.  $x'_i$  een systematische afwijking vertonen. Om de grootte hiervan te bepalen werd gesteld:

$$y' = \lambda x' + \tau \quad (9)$$

1) Voor het woord "richtkijker" dient hier (en in 't vervolg) "spiraalmicroscop" gelezen te worden.

Voor de drie meetseries werden de waarden van  $\lambda$  en  $\tau$  bepaald m.b.v. een regressie-analyse.

Men zie hiervoor de bijlagen IV en V, voor de drie meetseries. De gemeten steek  $a$  kan afwijken van de werkelijke steek  $a_0$  indien tussen de X-richting van figuur 4 (snijlijn mediaanvlak V met rooster) en de X'-richting, dit is de richting waarin gemeten werd, een hoek  $\xi$  bestaat. Voor de definities van de gebruikte hoeken zie men figuur 8. Er geldt dan:

$$x'_i = n_i \cdot a = n_i \cdot \frac{a_0}{\cos \xi} \quad (10)$$

Combinatie van de formules (8), (9) en (10) levert:

$$\frac{a_0}{\cos \xi} (1 - \lambda) = 4 + \frac{\tau}{n}$$

Voor  $N > 100$ , dus  $X' > 0,4$  mm. is  $\frac{\tau}{n}$  te verwaarlozen zodat:

$$\frac{a_0}{4} (1 - \lambda) = \cos \xi = 1 - \frac{1}{2} \xi^2 \quad (11)$$

Nu zijn  $a_0$ , zowel als  $\xi = j + \varepsilon$ , onbekend.

Uit figuur 8 blijkt, dat:

$j$  = de hoek tussen bovenzijde bewegend rooster en bovenzijde optische lineaal (gemeten)

$\varepsilon$  = de hoek tussen bovenzijde rooster en X-richting.  
ingevuld in formule (11) geeft:

$$\frac{a_0}{4} (1 - \lambda) = 1 - \frac{1}{2} (j + \varepsilon)^2 = 1 - \frac{1}{2} j^2 - j\varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2$$

Ofwel:

$$\lambda(j) = \frac{k}{2} j^2 + (k\varepsilon) j + \left( \frac{k}{2} \varepsilon^2 + 1 - k \right) \quad (12)$$

hierin is:

$$k = \frac{4}{a_0}$$

Om uit formule (12) nu  $k$  en  $\varepsilon$  te bepalen werden de meetseries I, II en III uitgevoerd.

Voor serie I was:

$$j = 1,722 \cdot 10^{-6} \quad (\text{rad}) ; \quad \lambda = 0,697 \cdot 10^{-4} \quad (\text{bijlage IV})$$

Serie II

$$j = 16,98 \cdot 10^{-3} \quad (\text{rad}) ; \quad \lambda = 1,235 \cdot 10^{-4} \quad (\text{bijlage V})$$

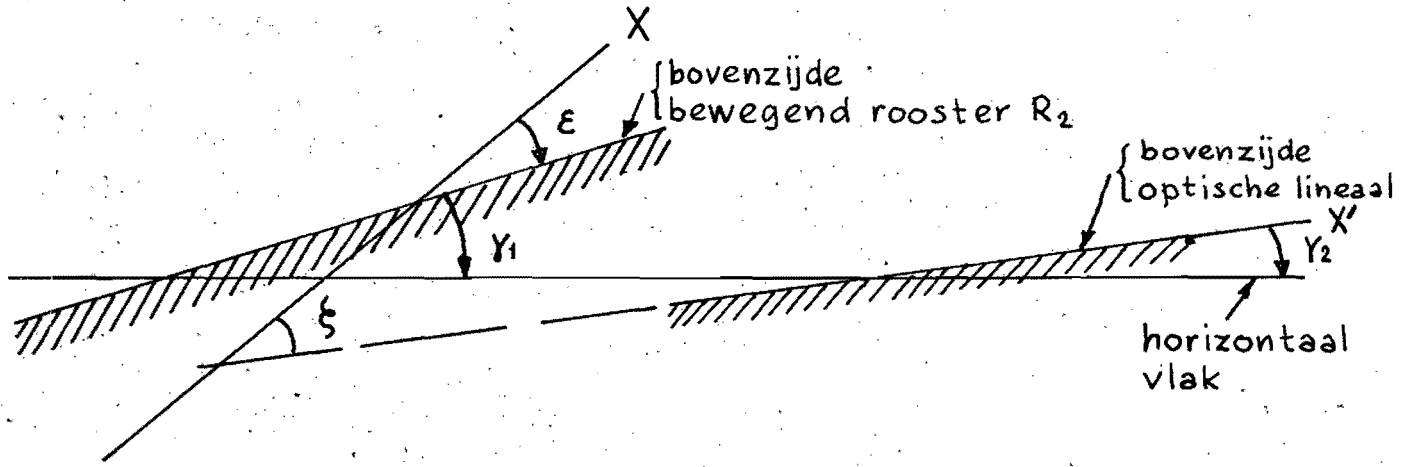
Serie III

$$j = -13,22 \cdot 10^{-3} \quad (\text{rad}) ; \quad \lambda = 1,338 \cdot 10^{-4} \quad (\text{bijlage VI})$$

Op grond van deze resultaten werd grafiek D voor  $\lambda(j)$  getekend.

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$$

$$\xi = \gamma + \epsilon$$



figuur 8: Definitie van de gebruikte hoeken

Uit deze grafiek volgt:

$$\varepsilon = -3 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = -0^{\circ} 10' 20''$$

en

$$\lambda (\varphi = 0^{\circ}) = 0,69 \cdot 10^{-4}$$

dus, m. b. v. formule (11):

$$\frac{a_0}{4} = [1 + \lambda] = \underline{\underline{1,000069}}$$

### 5. Foutendiscussie.

De bepaling van de kantelfout is beschreven in 4.2; we bepalen hier de invloed van de overige fouten.

#### 5.1 Toevallige fouten.

De voornaamste bronnen zijn:

- a) de fout bij het zodanig plaatsen van de bewegende lineaal dat de spot op de oscilloscoop op de juiste plaats stond;
- b) de fout gemaakt bij het instellen van de richtkijker tijdens het aflezen van de meting.

De spreiding  $s$  ten gevolge van beide effecten is bepaald door achter elkaar 10 metingen te doen waarbij de tafel telkens werd ingesteld op dezelfde plaats en de richtkijker opnieuw werd afgelezen. Deze berekening is uitgevoerd in bijlage I waarbij bleek:

$$s = 0,6 \mu\text{m}.$$

Uit de gegeven spreidingsbreedten in bijlagen II en III blijkt dat de aflezingen bijna steeds voldeden aan:

$$w \leq 2s$$

#### 5.2 Optische lineaal.

De optische lineaal, waarmee de periodieke fout in het bewegende rooster bepaald is kan zelf ook een dergelijke fout hebben. Hoewel voor de gebruikte lineaal geen ijktabel aanwezig was tonen gegevens, voor een vergelijkbare lineaal, dat met afwijkingen tot  $\pm 1 \mu\text{m}$ . rekening gehouden moet worden.

## 5. 3 Uitzettingseffecten.

Een gedeelte van de metingen werd uitgevoerd bij een omgevingstemperatuur van  $24,8^{\circ} \text{C}$ . De grootte van de uitzettingscoëfficiënten van het rooster noch van de lineaal zijn bekend.

Bij een aanname dat het verschil tussen beide uitzettingscoëfficiënten een grootte orde heeft van  $1 \cdot 10^{-6} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$  is de fout die door een temperatuurstijging van  $4^{\circ}$  veroorzaakt ongeveer gelijk aan  $\Delta X = 0,5 \mu\text{m}$ .

## 5. 4 Slede geleiding

Periodieke hoogteverschillen van het bed van de slede kan leiden tot kantelfouten als in 5.1 of tot spleetlengte variaties als in 5.7. In beide gevallen zijn echter de hoekverdraaiingen van een kleinere orde dan in bedoelde paragrafen gemeten is, zodat deze foutenbron verwaarloosd kan worden.

## 5.5 Electriche schakeling.

Wanneer de onderlinge afstand van de fotocellen niet overeenkomt met de gewenste waarden is het faseverschil tussen de signalen niet precies  $90^{\circ}$ . Dit geeft een elips op het scherm in plaats van een cirkel. De nauwkeurigheid van de instelling blijft echter gehandhaafd. Hetzelfde geldt voor versterkingsverschillen tussen beide kanalen van de oscilloscoop. De conclusie is dat het electriche gedeelte geen fouten kan introduceren.

## 5. 6 Indexrooster.

Zoals in de inleiding reeds is opgemerkt heeft de grootte van de hoek  $\theta$  geen invloed op de meting. Afwijkingen van de steek  $\alpha_1$  van het indexrooster hebben eveneens geen invloed op de gemeten waarden van  $X$ .

## 5. 7 Spleet tussen de roosters.

Wanneer de luchtspleet tussen het indexrooster en bewegendrooster varieert kan in de gemeten waarden van de steek een fout ontstaan gelijk aan:

$$\delta x = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \beta_2) \delta t$$

Hierin is  $\delta t$  de variatie in spleetlengte,

$\alpha_1$ , de hoek die het invallende licht, en

$\beta_2$  de hoek die het uitvallende licht maakt met de X-as.

Bij meting bleek  $\delta t$  een relatieve waarde van  $7 \cdot 10^{-5}$  te hebben, terwijl  $\alpha_1 \approx \beta_2$  bleek te zijn. Uitgaande van een maximaal verschil van  $1^{\circ}$

tussen  $\alpha_1$  en  $\beta_2$  is  $\frac{1}{2} (\alpha_1 + \beta_2) \approx \frac{1}{2}^{\circ} \approx 0,01 \text{ rad}$ .

De maximale fout  $\delta x$  bedraagt dan  $7 \cdot 10^{-7}$  dit is een afwijking van  $\pm 0,14 \mu$  over de totale lengte van 200 mm.

## 6. Conclusies.

Op grond van de berekeingen in hoofdstuk 4 en de grafische voorstelling van fig. D concluderen we dat:

de strepen op het moiré-rooster een kleine hoek

$$\xi = -10'20''$$

maken met de in fig. 4 gedefinieerde Y-richting;

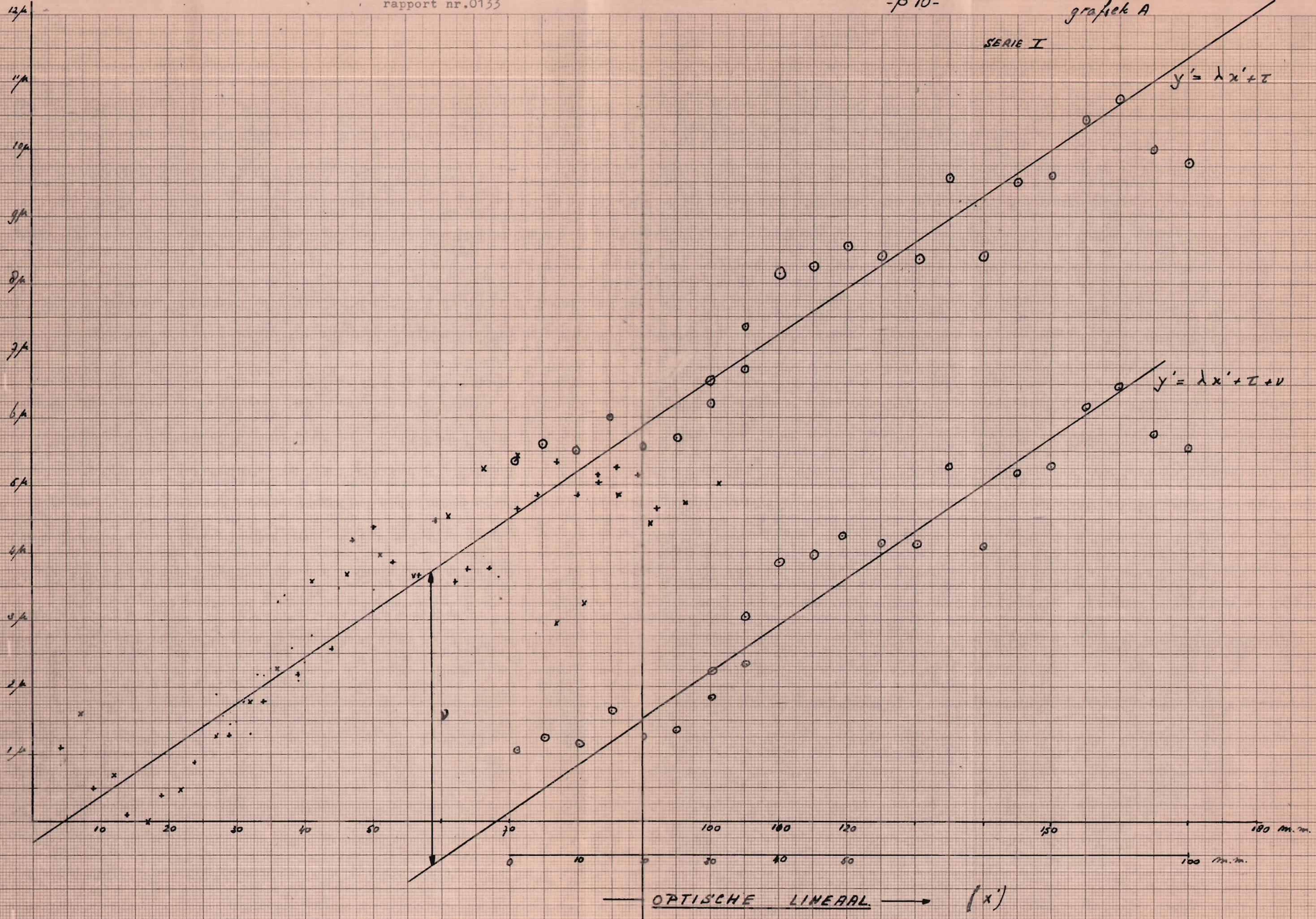
de steek van het rooster een waarde

$$a_0 = 4,00628 \mu\text{m} \quad \text{heeft}$$

Uit grafiek A blijkt dat er een periodieke fout aanwezig is, waarvan de periode ongeveer 30 mm. is en de amplituden van de grootte orde  $\mu$  is. Nauwkeuriger bepalingen zijn op grond van de aanwezige geachte foutenbronnen niet mogelijk.



BEWYKING VAN EEN STEEK VAN 4 μm.



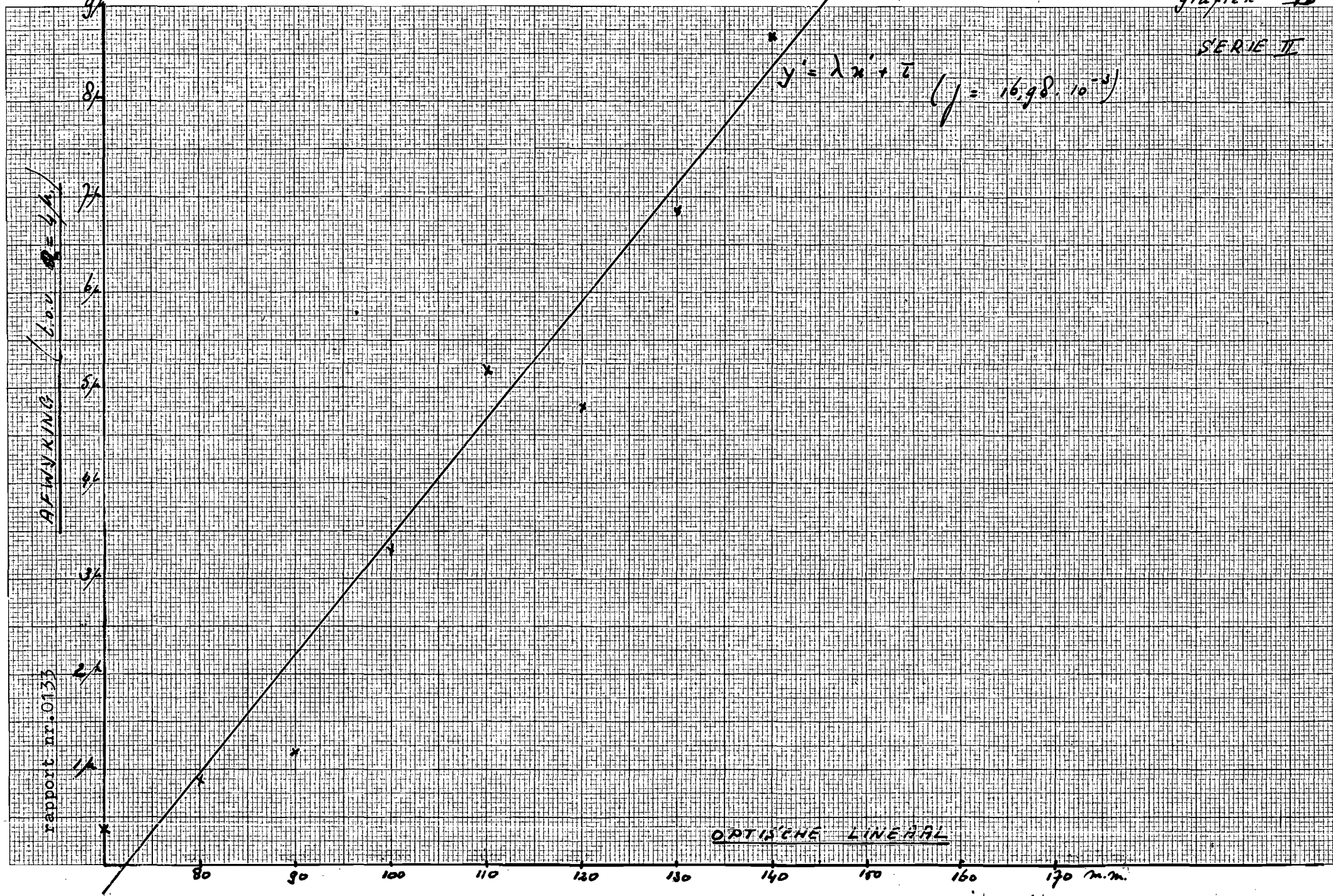


$$y' = \lambda x' + \bar{z} \quad (\lambda = 16,98 \cdot 10^{-3})$$

AFWINKING (600  $\mu$ )

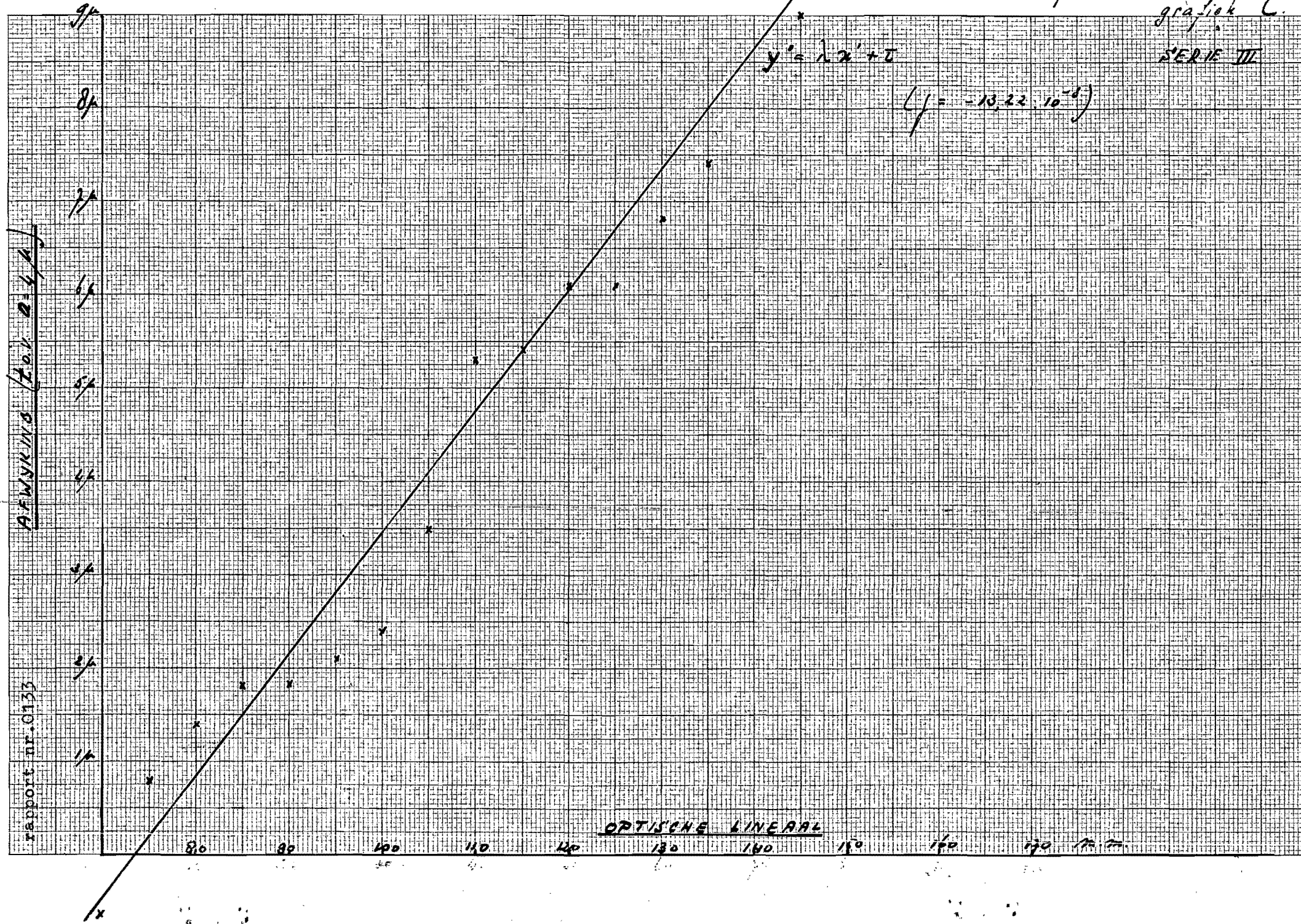
rapport nr. 0133

OPTISCHE LINEAAL



AFWINKLING / TOEGANG

rapport nr. 0133

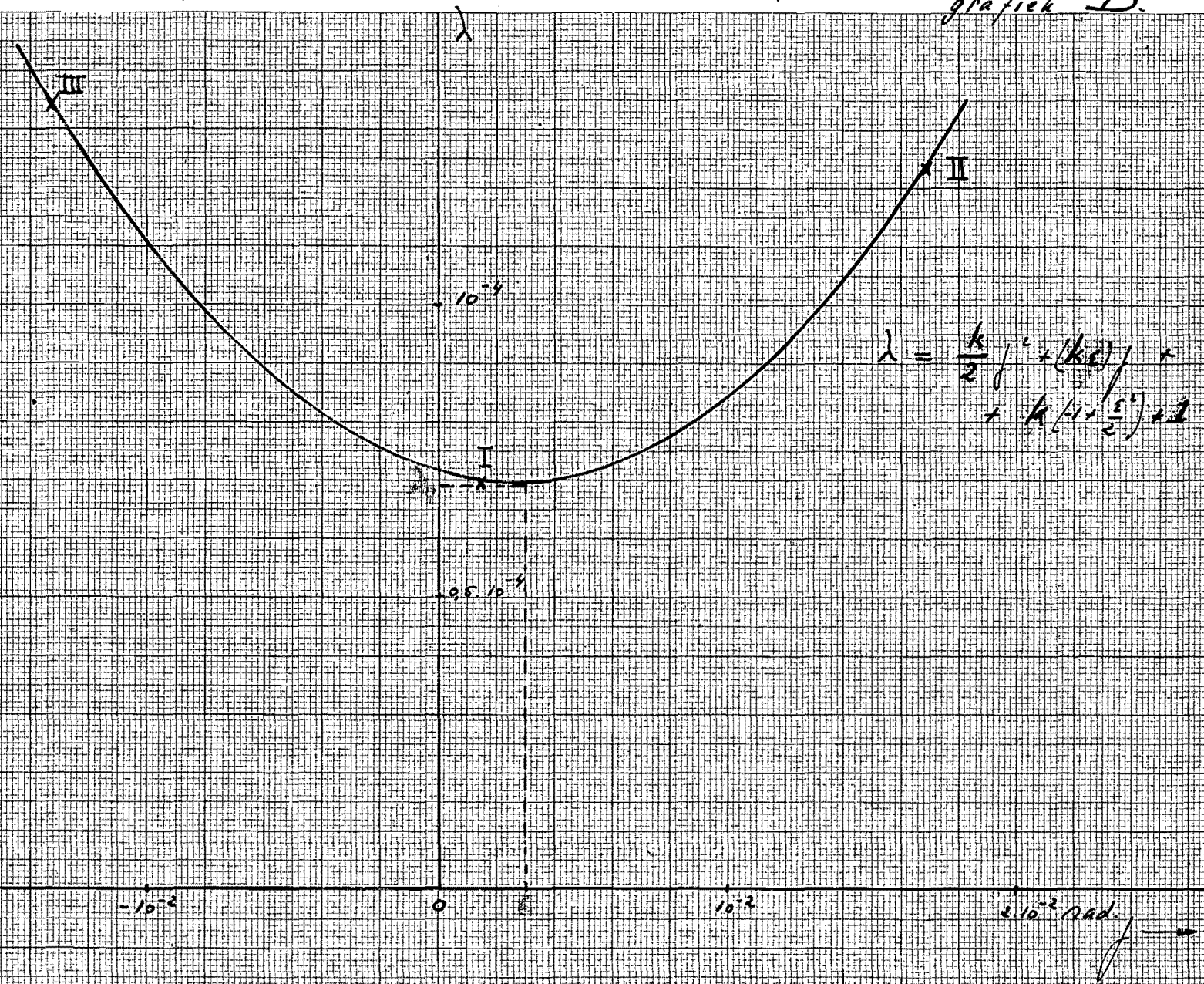


OPTISCHE LINERAAL

80 90 100 110 120 130 140 150 160 170



rapport nr. 0133



A

$x' (m.m.)$	$(x' - \bar{x}') \cdot 10^4$	$(x' - \bar{x}')^2 \cdot 10^8$
15,7758	-1	1
62	+3	9
52	-7	49
52	-7	49
65	+6	36
58	-1	1
62	+3	9
65	+6	36
58	-1	1
58	-1	1
58	-1	1
<hr/>		
$\bar{x}' = 15,77590$	0	192

$n = 10.$

$$s_1 = \sqrt{\frac{192}{9}} = 4,6 \cdot 10^{-4}$$

B.

81,5668	+7	49
65	+4	16
62	+1	1
55	-6	36
55	-6	36
62	+1	1
58	-3	9
65	+4	16
62	+1	1
72	+11	121
50	-11	121
58	-3	9
<hr/>		
$\bar{x}' = 81,56610$	0	416

$m = 12$

$$s_2 = \sqrt{\frac{416}{11}} = 6,1 \cdot 10^{-4} \mu.$$

$$s^2 = \frac{(n-1) s_1^2 + (m-1) s_2^2}{(n-1) + (m-1)}$$

$$s^2 = \frac{192 + 416}{20} = 30,4$$

$$\underline{\underline{s = 0,6 \mu.}}$$

$X'$ (mm)	$w$ $10^{-1}\mu$	$Y'$ $10^{-1}\mu$	$X'$	$w$ $10^{-1}\mu$	$Y'$ $10^{-1}\mu$
6.9976	14	+15	39.9864	8	+24
12.0007	5	+7	40.9868	0	+28
16.9960	4	0	41.9866	11	+26
22.2045	6	+5			
27.0333	10	+13			
31.9258	7	+18	46.9882	7	+42
35.9423	13	+23	49.9884	6	+44
40.9476	10	+36	52.9879	10	+39
45.9957	7	+37	55.9877	12	+37
50.9920	4	+40	58.9885	6	+45
55.9998	7	+37	61.9876	3	+36
60.9766	10	+46	64.9878	7	+38
65.9173	13	+53	67.9878	7	+38
71.0015	10	+55	70.9887	8	+47
76.9750	7	+70	73.9889	10	+49
80.9353	15	+73	76.9854	10	+54
85.9407	7	+87	79.9849	7	+49
90.9605	7	+85	82.9852	5	+52
95.9208	3	+88	82.9851	7	+51
100.9531	15	+91	85.9853	10	+53
			88.9852	10	+52
			91.9847	5	+47
26.9859	7	+19	94.9845	10	+45
27.9856	6	+16	97.9846	8	+46
28.9854	10	+14	100.9842	15	+42
29.9855	10	+15			
30.9858	7	+18			
31.9853	5	+13	3.9852	10	+12
32.9862	7	+22	8.9845	6	+5
33.9862	5	+22	13.9838	7	+1
34.9863	5	+23	18.9844	10	+4
35.9873	10	+33	23.9849	7	+9
36.9874	8	+34	28.9853	10	+13
37.9866	10	+26	33.9858	7	+18
38.9861	4	+21	38.9862	5	+22
			43.9866	3	+26

-p16- BIJLAGE III : SERIES I (VERVOLG), II & III.

X' mm	w $10^{-1}\mu$	y' $10^{-1}\mu$	x' mm	w $10^{-1}\mu$	y' $10^{-1}\mu$
(SERIE I)					
70.9331	10	+11	150.0877	10	+97
74.9933	5	+13			
79.9932	5	+12	SERIE III		
84.9937	5	+17			
89.9933	3	+13	70.0678	7	-8
94.9934	10	+14	80.0654	6	+14
99.9939	4	+19	90.0658	5	+18
104.9944	3	+24	100.0704	8	+24
109.9918	5	+38	110.0693	7	+53
104.9911	4	+31	120.0661	10	+61
99.8903	7	+23	130.0668	7	+68
114.9920	7	+40	140.0656	3	+96
118.9923	8	+43	150.0660	10	+100
124.9922	7	+42	160.0644	3	+124
129.9922	10	+42	170.0649	2	+129
134.9933	5	+53			
139.9921	10	+41			
144.9932	10	+52	75.0648	5	+8
149.9933	17	+53	85.0658	5	+18
154.9942	5	+62	95.0661	2	+21
159.9945	6	+65	105.0635	6	+35
164.9938	8	+58	115.0654	3	+54
169.9976	3	+56	125.0661	4	+61
			135.0714	3	+74
			145.0730	13	+90
			155.0749	7	+109
			165.0757	5	+117
SERIE II					
70.0964	17	+4			
80.0969	7	+9			
90.0972	10	+12			
100.0993	16	+33			
110.0952	7	+52			
120.0968	7	+48			
130.0949	2	+69			
140.0929	10	+89			

Bij een instelling van  $f = 1,722 \cdot 10^{-5}$  rad (meetserie I) zijn 2 gedeelten van het rooster afgetast die elkaar gedeeltelijk overlappen. Dit is gebeurd door de richtkijker eenmaal te verplaatsen (zie grafiek A). Voor de regressie-analyse van deze twee gedeelten wordt nu gesteld

Deel 1  $y_i' = \lambda x_i' + \tau$

Deel 2  $y_j' = \lambda x_j' + \tau + \nu$

De grootheid  $\nu$  geeft de waarde aan waarmee  $y_j'$  vermeerderd moet worden zodat beide meetseries goed bij elkaar aansluiten. Toegepast is de methode der kleinste kwadraten, dus moet de volgende functie geminimaliseerd worden:

$$P = \sum_{i=1}^n (y_i' - \lambda x_i' - \tau)^2 + \sum_{j=1}^m (y_j' - \lambda x_j' - \tau - \nu)^2$$

Dit geeft de volgende drie vergelijkingen voor  $\lambda$ ,  $\tau$  en  $\nu$ :

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^n (y_i' - \lambda x_i' - \tau) x_i' + \sum_{j=1}^m (y_j' - \lambda x_j' - \tau - \nu) x_j'$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^n (y_i' - \lambda x_i' - \tau) + \sum_{j=1}^m (y_j' - \lambda x_j' - \tau - \nu)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \nu} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{j=1}^m (y_j' - \lambda x_j' - \tau - \nu)$$

Het oplossen van deze drie vergelijkingen geeft de gevraagde waarden voor  $\lambda$ ,  $\tau$  en  $\nu$ .

Zie hiervoor en voor de regressie-analyse van meetserie II en III de bijlagen IV en V.

-PIB- BĀLAGE IV. REGRESSIE ANALYSE S'ERIE I.

$x'(m.m.)$	$y'(10^4 \mu)$	$(x')^2$	$x'y'$
7	16	49	112
12	7	144	84
17	0	289	0
22	5	484	110
27	13	729	351
32	18	1024	576
36	23	1296	828
41	36	1681	1476
46	37	2116	1602
51	40	2601	2040
56	37	3136	2072
61	56	3721	3416
66	53	4356	3498
71	55	5041	3905
77	70	5929	5390
81	35	6561	2835
86	45	7396	3870
91	45	8281	4095
96	50	9216	4800
101	50	10201	5050
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
1077	691	74314	46110

MODEL:

1<sup>e</sup> STUK:  $y_i' = \lambda x_i' + \tau$

2<sup>e</sup> STUK:  $y_j' = \lambda x_j' + \tau + v$

$i = 1, \dots, 20$

$j = 1, \dots, 21$



-119- BĲLAGE IV. REGRESSIE SĲRIE I (VERVOLG).

$x'$ (mm.)	$y'$ ( $10^{-4}\mu$ )	$(x')^2$	$(x'y')$
71	11	5041	781
75	13	5625	975
80	12	6400	960
85	17	7225	1445
90	13	8100	1170
95	14	9025	1330
100	21	10000	2100
105	27	11025	2835
110	30	12100	4100
115	40	13225	4600
119	43	14161	5117
125	42	15625	5250
130	42	16900	5460
135	53	18225	7155
140	41	19600	5740
145	52	21025	7540
150	53	22500	7950
155	62	24025	9610
160	65	25600	10400
165	58	27225	9570
170	56	28900	9520
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
2520	773	321552	103688

$$\begin{aligned}
 1077 \lambda + 20 \tau &= 691 \\
 2520 \lambda + 21 \tau + 21 \nu &= 773 \\
 395866 \lambda + 3597 \tau + 2520 \nu &= 149798
 \end{aligned}$$

$$\lambda = 0,697 \quad \tau = -3 \quad \nu = -43,7$$

1<sup>o</sup> VERGELĲKING:  $y' = 0,697 x' - 3$

2<sup>o</sup> VERGELĲKING:  $y' = 0,697 x' - 43,7$

II

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
0	4	0	0
10	9	100	90
20	12	400	240
30	33	900	990
40	52	1600	2080
50	48	2500	2400
60	69	3600	4140
70	89	4900	6230
80	97	6400	7760
360	413	20400	23930

MODEL

$$y' = \lambda x + \tau$$

$n=9$

$$9\tau + 360\lambda = 413$$

$$360\tau + 20400\lambda = 23930$$

$$\lambda = 1,235$$

$$\tau = -3,51$$

$$y' = 1,235x' - 3,51$$

III

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
0	-8	0	0
5	8	25	40
10	14	100	140
15	18	225	270
20	18	400	360
25	21	625	525
30	24	900	720
35	35	1225	1225
40	53	1600	2120
45	64	2025	2880
50	61	2500	3050
55	61	3025	3355
60	68	3600	4080
65	74	4225	4810
70	96	4900	6720
75	90	5625	6750
80	100	6400	8000
85	109	7225	9265
90	124	8100	11160
95	117	9025	11115
100	129	10000	12900
1266	1050	71750	89035

$$y' = 1,338x' - 6,52$$

$n=21$

$$1050\tau + 71750\lambda = 89035$$

$$21\tau + 1050\lambda = 1266$$

$$\lambda = 1,338$$

$$\tau = -6,52$$