

Regeling van een vierde orde systeem met wrijving

Citation for published version (APA):

Denissen, W. A. F. (1992). *Regeling van een vierde orde systeem met wrijving*. (DCT rapporten; Vol. 1992.087). Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1992

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

**Regeling van een vierde orde systeem
met wrijving**

Stageverslag door W.A.F. Denissen

Eindhoven, augustus 1992

WFW rapportnr. 92-087

Begeleiders: M. Vervoordeldonk (Philips CFT)
M. v.d. Molengraft (TUE)

Samenvatting

In dit stageverslag wordt de positie-regeling van een vierde orde servosysteem met coulombse wrijving op de last beschouwd. De stage is uitgevoerd bij het Centre For manufacturing Technology (CFT) van Philips te Eindhoven.

Het servosysteem bestaat uit een electromotor, een overbrenging en een lastmassa waarop een coulombse wrijvingskracht aangrijpt. Het doel van het servosysteem is het snel bereiken van een hoge positie-nauwkeurigheid van de last bij punt naar punt sturing. Simulaties voor het testen van regelconcepten zijn uitgevoerd met het simulatiepakket PHILPAC en het rekenpakket MATLAB. Voor de simulaties is een modelbeschrijving van een proefopstelling op de afdeling Mechatronica van het CFT gebruikt. Als referentiesignaal wordt een parabolische opzetfunctie genomen.

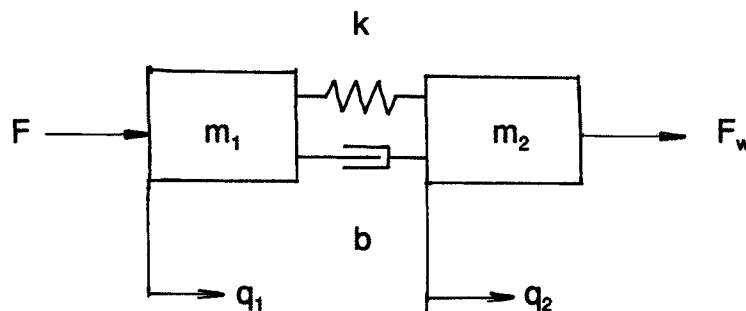
Er wordt eerst gekeken naar de te behalen performance van het systeem zonder wrijving. Hiervoor worden drie verschillende PD-regelaars gebruikt, die met behulp van frequentie-domein technieken worden bepaald. Vervolgens wordt wrijving op de last aangebracht. Dit veroorzaakt een statische eindfout. Om deze fout te minimaliseren worden andere regelconcepten beschouwd. In al deze concepten wordt gebruik gemaakt van de gemeten lastpositie. De integrerende regelactie wordt niet toegepast omdat deze naar verwachting te veel tijd vergt. In het eerste concept worden de regelparameters van één van de PD-regelingen opgevoerd, waarbij de beschrijvende functietheorie wordt gebruikt om de stabiliteit te onderzoeken. Dit regelconcept blijkt niet nauwkeurig en snel genoeg te werken. Vervolgens wordt een niet-lineair concept genomen, dat de wrijving probeert te compenseren met een kracht afhankelijk van de positiefout. Hierbij kan een begrensde trilling ontstaan ten gevolge van onder andere de onderlinge tijdsverschuiving van compensatie- en wrijvingskracht. In het volgende concept wordt een compensatiekracht tegengesteld aan de wrijvingskracht genomen. De slapte van de overbrenging en de massatraagheid van de motoras veroorzaken hier een alternerend verloop van de positiefout met langzaam afnemende amplitude. In het laatste concept wordt met deze slapte en traagheid rekening gehouden, waardoor het referentiesignaal snel en nauwkeurig bereikt wordt, mits de motor de zeer hoge krachtpieken kan leveren. Begrenzing van de motorkracht maakt het systeem helaas onnauwkeurig of instabiel. Tenslotte wordt met een snelheidsterugkoppeling het krachtsignaal begrensd, waardoor een meer stabiele, maar minder nauwkeurige regeling ontstaat.

Inhoudsopgave

<u>1. Inleiding</u>	4
<u>2. Systeembeschrijving</u>	6
<u>3. Regeling van een vierde orde systeem zonder wrijving</u>	11
3.1. regelcriteria voor een servo-systeem	11
3.2. Terugkoppeling over de motoras	13
3.3. Terugkoppeling over de last	15
3.4. Gemengde terugkoppeling	16
3.5. Vergelijking van de regelingen	20
<u>4. Klassieke regelwet met wrijving</u>	21
<u>5. Stabiliteitsonderzoek met de beschrijvende functie theorie</u>	23
5.1. Modelleren van wrijving	25
<u>6. Inleiding op regelconcepten voor een systeem met wrijving</u>	27
<u>7. Verhogen van de regelparameterwaarden</u>	28
<u>8. Niet-lineaire regelconcepten</u>	34
8.1. Positie-afhankelijke wrijvingscompensatie	34
8.2. Wrijvingscompensatie met gemeten wrijvingskracht	36
8.3. Exacte wrijvingscompensatie	38
<u>Conclusies en aanbevelingen</u>	43
<u>Literatuur</u>	45
<u>Bijlagen</u>	46

1. Inleiding

In dit verslag wordt de regeling van een vierde orde servosysteem met wrijving beschouwd. Mechanische vierde orde systemen bestaan uit twee massa's. In het geval van produktiemachines zijn dit bijvoorbeeld de massa van de motoras en de massa van de te verplaatsen last. Beide zijn door een overbrenging met zekere stijfheid aan elkaar gekoppeld. Wrijving kan optreden bij zowel de motor als de last. Hier wordt echter alleen gekeken naar systemen met wrijving op de last. Van andere systeem-eigenschappen, zoals speling en hogere orde dynamica, wordt de invloed verwaarloosbaar klein verondersteld. Het model van dit systeem is dus:



Het doel van een servosysteem in een produktiemachine is vaak het nauwkeurig positioneren van de last. Daarom wordt hier alleen punt naar punt regeling toegepast, ofwel regelen naar een constante eindpositie. Naast de nauwkeurigheid moet ook de positioneersnelheid voldoen.

Simulaties voor het testen van regelconcepten zijn hoofdzakelijk uitgevoerd met het, door Philips ontwikkelde, simulatiepakket PHILPAC. Met dit pakket is het mogelijk tijd-responsies en overdrachtsfuncties van lineaire dynamische systemen te bepalen. Bovendien is het mogelijk om tijdresponsies te berekenen van niet-lineaire systemen. De simulaties worden toegepast op een modelbeschrijving van een proefopstelling op de afdeling Mechatronica van het CFT. De identificatie van de modelparameters van deze opstelling is in de bijlagen beschreven.

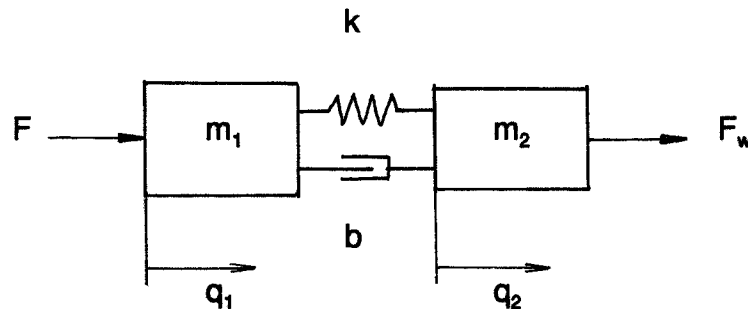
Om een indruk te krijgen van de haalbare nauwkeurigheid en aanlooptijd, worden eerst klassieke regelconcepten op het wrijvingsloze systeem toegepast. Vervolgens wordt wrijving aangebracht op het systeem en de invloed daarvan op de nauwkeurigheid en aanlooptijd beschouwd.

Met dit vergelijkingsmateriaal ter beschikking worden vervolgens een aantal wrijvingscompensatietechnieken behandeld en beoordeeld aan de hand van ondermeer simulaties.

Bij het ontwerp van een regeling is een stabiliteitsbeschouwing onmisbaar. Hier wordt waar mogelijk gebruik gemaakt van de beschrijvende functie theorie. Met deze theorie is het mogelijk het optreden van een limit cycle, een begrensde trilling, te voorspellen.

2. Systeembeschrijving

Het doel van deze opdracht is meer inzicht te krijgen in het regelen van (productie)werktuigen die een produkt of gereedschap nauwkeurig moeten positioneren. In het bijzonder gaat de aandacht uit naar systemen met een vierde orde karakter met wrijving op de last. Dit zou bijvoorbeeld een systeem kunnen zijn, bestaande uit een motor die via een overbrenging een slede aandrijft, waarbij er een wrijvingskracht werkt tussen de slede en zijn geleiding. Zo'n systeem kan als volgt gemodelleerd worden:



Hierin zijn

- m_1 de motortraagheid,
- m_2 de massatraagheid van de last,
- k de lineaire veerstijfheid van de overbrenging,
- b de dempingsconstante van de overbrenging,
- F_w de wrijvingskracht die op de last werkt,
- F de regel- en stuurkracht van de motor en
- q de vrijheidsgraden van het systeem.

Damping tussen het servosysteem en zijn omgeving wordt verwaarloosd. Dit impliceert dat bovenstaand model alleen bruikbaar is voor systemen met geringe damping in de motor- en lastlagering. In bovenstaand model komt geen overbrengingsverhouding voor. Indien deze wel aanwezig is kan het model volgens [4] in bovenstaande vorm omgezet worden.

De bewegingsvergelijkingen van dit systeem zijn:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + b \dot{q}_1 + k q_1 &= b \dot{q}_2 + k q_2 + F \\ m_2 \ddot{q}_2 + b \dot{q}_2 + k q_2 &= b \dot{q}_1 + k q_1 + F_w \end{aligned}$$

Voor het ontwerp van een regeling zijn de overdrachten van de regelkracht F naar de posities van zowel motoras als last van belang. Deze worden verkregen door bovenstaande vergelijkingen Laplace te transformeren en de wrijvingskracht weg te laten.

$$(m_1s^2+bs+k)q_1=(bs+k)q_2+F$$

$$(m_2s^2+bs+k)q_2=(bs+k)q_1$$

Eliminatie van q_2 levert de overdracht van F naar q_1 .

$$\frac{q_1}{F} = \frac{m_2s^2 + bs + k}{(m_2s^2 + bs + k)(m_1s^2 + bs + k) - (bs + k)(bs + k)}$$

Eliminatie van q_1 levert de overdracht van F naar q_2 .

$$\frac{q_2}{F} = \frac{bs + k}{(m_2s^2 + bs + k)(m_1s^2 + bs + k) - (bs + k)(bs + k)}$$

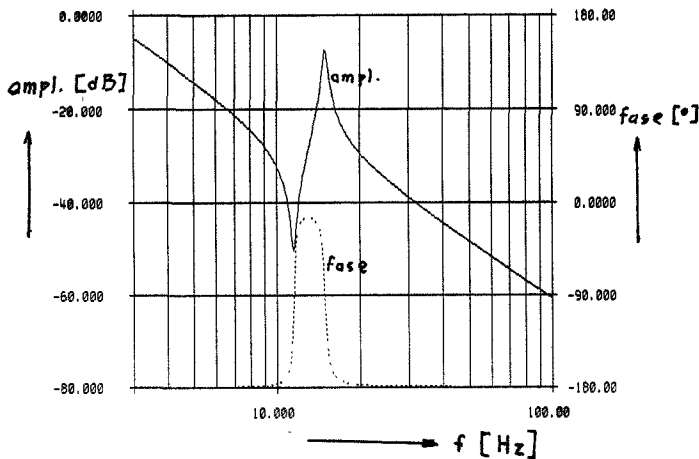
De bodediagrammen van beide overdrachten zijn op de volgende pagina weergegeven. Om simulaties uit te kunnen voeren moet aan bovenstaande parameters een kwantitatieve waarde toegekend worden. Bij de afdeling mechatronica van het CFT staat een opstelling die speciaal voor onderzoek naar de regelbaarheid van vierde orde systemen met wrijving vervaardigd is. Er zal daarom gewerkt worden met het model van deze proefopstelling. De met simulaties beproefde regelstrategieën kunnen dan ook op dit fysieke systeem getest worden.

Aangezien de parameters van het model van de proefopstelling nog niet bekend waren, moesten deze eerst geïdentificeerd worden. Deze identificatie staat beschreven in bijlage

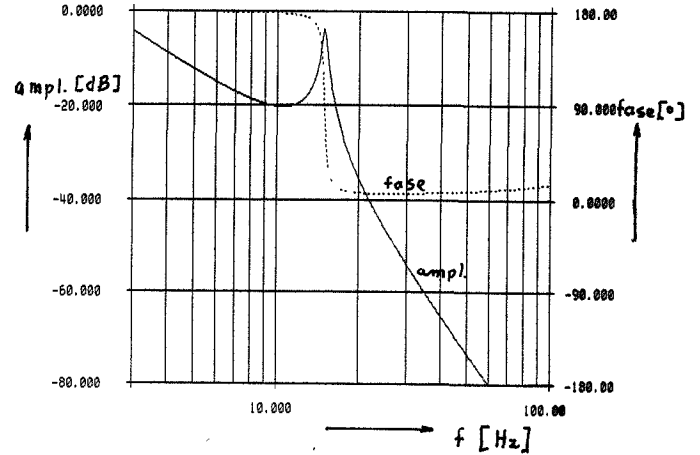
B.2. De resultaten van deze identificatie zijn:

m_1	=	0.0028	kgm ²
m_2	=	0.0019	kgm ²
k	=	9.9	Nm/rad
b	=	0.004	Nms/rad

De wrijvingscoëfficiënt f_w is instelbaar. Om de viskeuze demping tussen het servosysteem en zijn omgeving laag te houden, is luchtlagering toegepast op de motoras. De resonantiefrequentie ω_0 is 14.9 Hz. Deze komt in beide overdrachten voor. De antiresonantie ω_a in de overdracht van F naar q_1 , ligt bij 11.5 Hz. De bodediagrammen van de overdrachten q_1/F en q_2/F staan hieronder weergegeven.



Figuur 2.1 Bodediagram van q_1/F



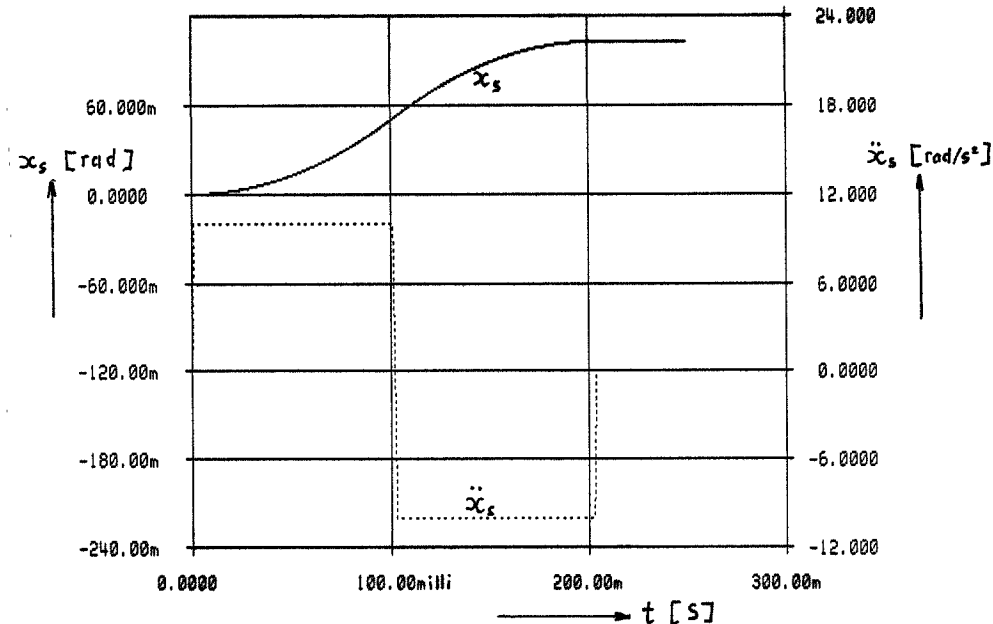
Figuur 2.2 Bodediagram van q_2/F

De proefopstelling bestaat uit twee roterende massa's. Het zou daarom logisch zijn om de termen massatraagheidsmoment, koppel, hoeksnelheid en dergelijke te gebruiken. Omdat de hier behandelde theorie en concepten ook voor translerende systemen bruikbaar is, zullen in dit verslag echter voornamelijk de termen massa, snelheid, kracht en positie gehanteerd worden.

Bij het gebruik van de numerieke waarden van de proefopstelling zal echter wel in radialen, Nm en kgm^2 gerekend worden.

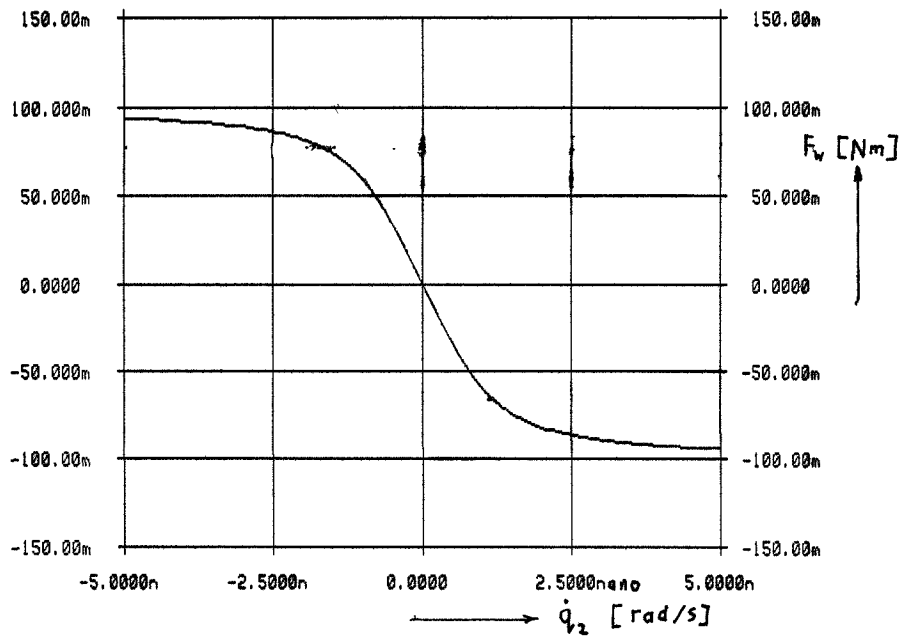
De vereiste nauwkeurigheid van de regelaar wordt in het algemeen bepaald door de vereiste nauwkeurigheid van het productieproces en/of de resolutie van de meet- en actuatorsystemen. Hier is echter arbitrair (gedeeltelijk op grond van simulaties op het wrijvingsloze systeem) de volgende keuze gemaakt: de te bereiken nauwkeurigheid is $5 \cdot 10^{-6}$ [rad] en de settling time moet van dezelfde orde zijn als de opzettijd ($t_m = 0.2$ s).

In alle simulaties met bovenstaand model wordt een parabolische opzet als referentiesignaal gebruikt. De keuze van de opzetfunctie is arbitrair, dus niet optimaal voor het hier beschouwde systeem. Er is gekozen voor een opzettijd van 0.2 seconde en een stapgrootte van 0.1 rad. De referentiever snelling is dan 10 rad/s^2 in het tijdsinterval 0 tot 0.1 s, -10 rad/s^2 tussen 0.1 en 0.2 s en 0 rad/s^2 voor tijdstippen na $t_m = 0.2 \text{ s}$. Omdat een zuivere stapvorm in PHILPAC niet gegenereerd kan worden, wordt hiervoor een benadering gebruikt. Hierdoor wijkt de opzetfunctie enkele procenten af.



Figuur 2.3 Parabolische opzetfunctie: x_s en \ddot{x}_s

Bij zuiver coulombse wrijving is de kracht tussen twee ten opzichte van elkaar bewegende lichamen gelijk aan de wrijvingscoëfficiënt f_w . Wanneer de snelheid van teken wisselt, gebeurt dit ook met de wrijvingskracht. Als de onderlinge snelheid nul is, ligt de wrijvingskracht tussen $-f_w$ en $+f_w$. In PHILPAC wordt de wrijvingskracht benaderd door een kracht die een functie is van de snelheid. Voor snelheden groter dan 10^{-8} rad/s is deze kracht nagenoeg gelijk aan $-f_w$ maal het teken van de snelheid. In de buurt van de oorsprong is het verband tussen de wrijvingskracht en de snelheid bij benadering lineair met een afgeleide ter waarde van ongeveer $-1.5 \cdot 10^8 \text{ [Nm/rads}^{-1}]$ (figuur 2.4).



Figuur 2.4 De wrijvingskracht F_w als functie van de snelheid \dot{q}_2

3. Regeling van een vierde orde systeem zonder wrijving

Er zijn minstens twee redenen aan te geven om eerst het wrijvingsloze systeem te beschouwen. Ten eerste wordt hierdoor vergelijkingsmateriaal verkregen ter beoordeling van het geregelde systeem mét wrijving. Ten tweede wordt in diverse regelconcepten voor het systeem met wrijving naast een wrijvingscompensatie ook een, op het wrijvingsloze systeem gebaseerde, servokracht uitgeoefend. Wanneer de wrijving (en daarmee de compensatiekracht) om de een of andere reden weg zou vallen, blijft het wrijvingsloze systeem met de lineaire regelwet over. Vandaar dat hier eerst een aantal klassieke regelconcepten wordt behandeld.

Bij het ontwerpen van een regeling dient er uit kosten overwegingen op gelet te worden dat zo min mogelijk opnemers gebruikt worden. Er zal daarom een aantal regelingen bekeken worden waarin slechts een beperkt deel van de toestandsgrootheden gemeten dient te worden.

Een voor de hand liggende regeling voor een systeem zonder wrijving is een PD-regeling met terugkoppeling over de motorpositie. Meten aan de motoras is vaak eenvoudiger dan het meten van de lastpositie. Hier is alleen een encoder op de motoras nodig voor het meten van de positie. Uit dit positie-signaal kan vervolgens het snelheidssignaal afgeleid worden. Deze optie zal verder uitgewerkt worden in paragraaf 3.2.

Een andere optie is een positieopnemer op de last. De uitwerking hiervan is te vinden in paragraaf 3.3.

Een eenvoudige uitbreiding is gebruik maken van een analoge snelheidsmeter op de motoras. Zo'n tachometer zit vaak standaard in een motor verwerkt. Het ontwerp van een regeling voor deze situatie staat beschreven in paragraaf 3.4.

3.1. regelcriteria voor een servo-systeem

Wanneer een lineair systeem geregeld moet worden, is de stabiliteit van het geregelde systeem een belangrijk ontwerpcriterium. Op grond van het stabiliteitscriterium van Nyquist kan een tweetal punten genoemd worden. Ten eerste moet bij de frequentie

waar de rondgaande versterking de waarde 1 ofwel 0 dB aanneemt, de faseverdraaiing een veilige afstand (30° - 45°) tot 180° hebben. Dit wordt de fasemarge genoemd. Ten tweede mag in het geval in de rondgaande overdracht een fase-achterstand van 180° optreedt, de versterking hierbij niet te dicht bij 1 liggen. De regelparameters moeten indien mogelijk zodanig gekozen worden dat de amplitude van de open lus hier 0.5 bedraagt.

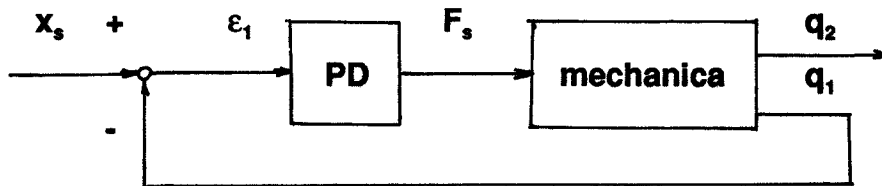
Naast de stabiliteit is ook de snelheid van de regeling van belang. De snelheid van de regeling kan in het tijdsdomein beoordeeld worden met de settling time. Dit is de tijd die de regelaar nodig heeft om de positiefout van de last binnen bepaalde nauwkeurigheidsgrenzen ($\pm 5 \mu\text{rad}$) te brengen. Twee factoren die hierbij van invloed zijn, zijn de bandbreedte van het geregelde systeem en de relatieve demping. Bij een tweede orde systeem kan de bandbreedte verhoogd worden door de proportionele regelactie op te voeren. De relatieve demping kan vervolgens door een juiste keuze van de differentiële regelspanning ingesteld worden. In het geval van een vierde orde systeem is de instelling van de regelparameters echter niet zo eenvoudig. Dit zal daarom voor ieder concept apart behandeld worden in de volgende paragrafen.

Hier volgt nog een kleine toelichting op de term bandbreedte. De bandbreedte is gedefinieerd als de frequentie of hoeksnelheid waarbij de versterking van de gesloten lus een factor $\sqrt{2}$ kleiner is dan die bij 0 Hz. De versterking voor frequenties lager dan de bandbreedte is dus ongeveer gelijk aan de statische versterking. Voor hogere frequenties neemt de versterking snel af. De bandbreedte wordt liefst zo gekozen dat alle frequenties in de stuur- en regelsignalen links van de bandbreedte liggen. Is een snel systeem vereist (bijvoorbeeld bij een korte opzettijd), dan moet de bandbreedte hoog zijn.

De bandbreedte kan eenvoudig uit de overdracht van de gesloten lus bepaald worden. Vaak wordt alleen de open lus van een systeem bekeken en wordt bepaling van de bandbreedte minder eenvoudig. Als indicatie kan het snijpunt van de asymptoot langs de -2 helling (bij lage frequenties) met de 0 dB-lijn genomen worden.

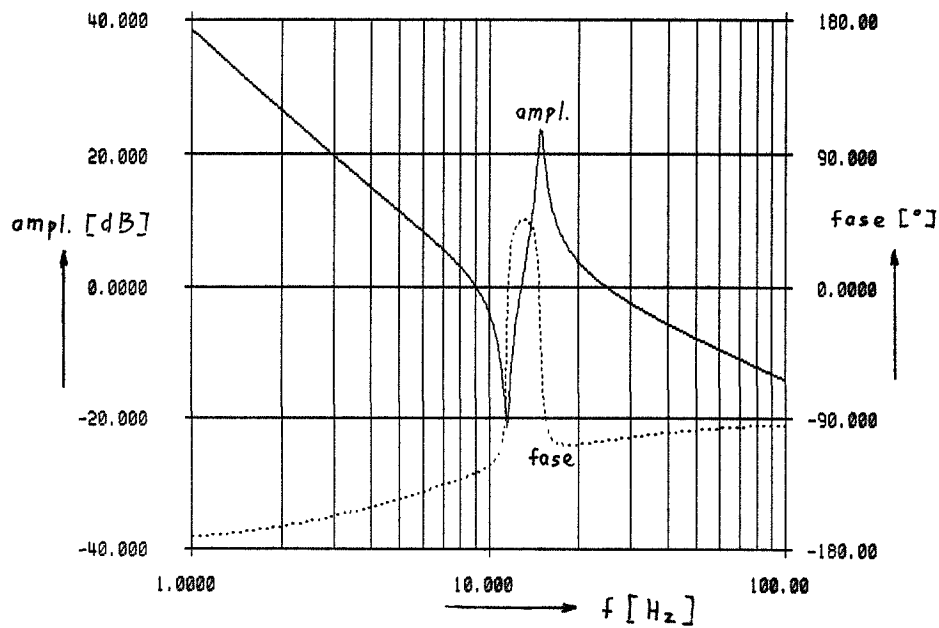
3.2. Terugkoppeling over de motoras

Het blokschema van deze regeling ziet er als volgt uit:

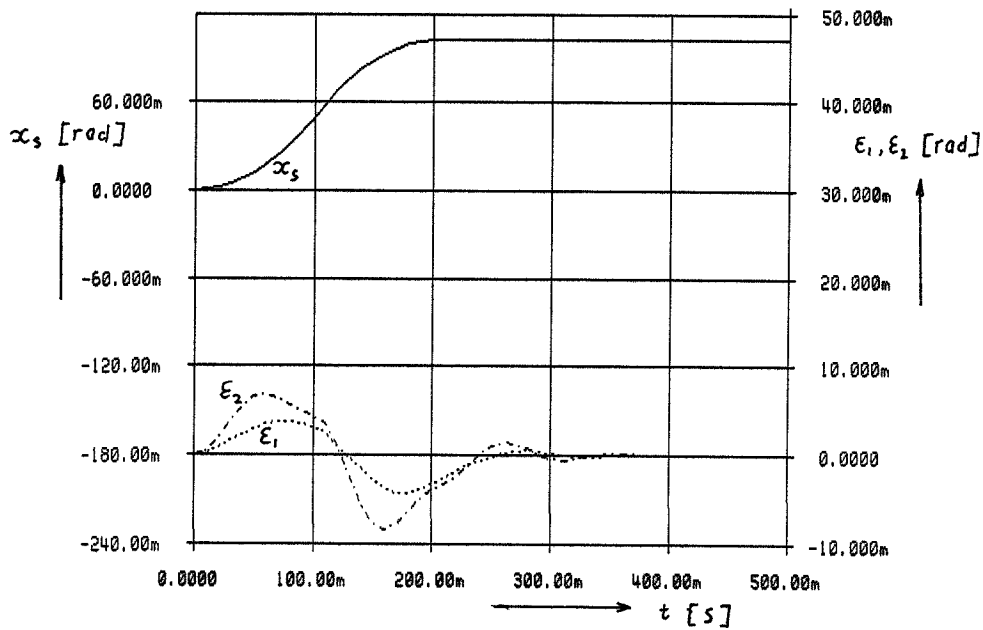


Het blok 'mechanica' bevat het model dat in hoofdstuk 2 staat weergegeven. Bovenstaand systeem is stabiel indien de rondgaande overdracht bij toenemende hoeksnelheid niet links om het punt -1 van het Nyquistdiagram loopt. Het fasediagram van de overdracht $H_{\text{mechanica}}$ (figuur 2.1) laat zien dat de fase tussen -180° en 0° ligt, zodat de toepassing van de PD-regelaar niet kan leiden tot instabiliteit. De rondgaande overdracht $H_{\text{PD}}H_{\text{mechanica}}$ kan namelijk bij geen enkele instelling van de regelparameters de 180° -lijn snijden. Wanneer dus zuiver naar de positie van de motoras gekeken wordt, is het gunstig een zo groot mogelijke K_{p_1} en K_{d_1} te kiezen. De motoras zal in dat geval het setpoint signaal x_s nauwgezet volgen. Nadeel is echter dat de massa van de last hevig gaat trillen. De oorzaak daarvan ligt in het feit dat de demping tussen de motoras en de lastmassa erg laag is, ofwel er wordt door demping te weinig bewegingsenergie gedissipeerd. Door lagere waarden voor K_{p_1} en K_{d_1} te kiezen, zal de lastmassa zijn bewegingsenergie in grotere mate kunnen afstaan aan de motoras. De bewegingsenergie van de motoras wordt vervolgens gedissipeerd door de demping die de regelaar genereert. Bij de keuze van de regelparameters K_{p_1} en K_{d_1} zal dus een afweging moeten worden gemaakt tussen het dempingsgedrag van de lastmassa en de snelheid waarmee de motoras het setpoint signaal kan volgen. Deze afweging is reeds eerder gedaan in [1]. Het resultaat daarvan zijn de volgende vuistregels:

$K_{p_1} = (m_1+m_2)(0.8\omega_a)^2$ en $K_{d_1} = (m_1+m_2)\omega_a$. Invullen van m_1 , m_2 en ω_a (hoofdstuk 2) levert $K_{p_1} = 15.7$ en $K_{d_1} = 0.34$. De tijdresponsie bij deze instelling vertoont inderdaad goed gedempt gedrag voor beide massa's. De settling time is 0.53 sec (zie figuren 3.1 en 3.2).



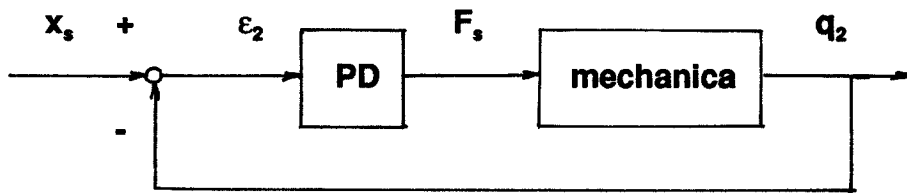
Figuur 3.1 Bodediagram van q_1/ϵ_1 met $F_s=15.7\epsilon_1+0.34\dot{\epsilon}_1$



Figuur 3.2 Tijdsresponsie van ϵ_1, ϵ_2 en setpoint x_s met $F_s=15.7\epsilon_1+0.34\dot{\epsilon}_1$

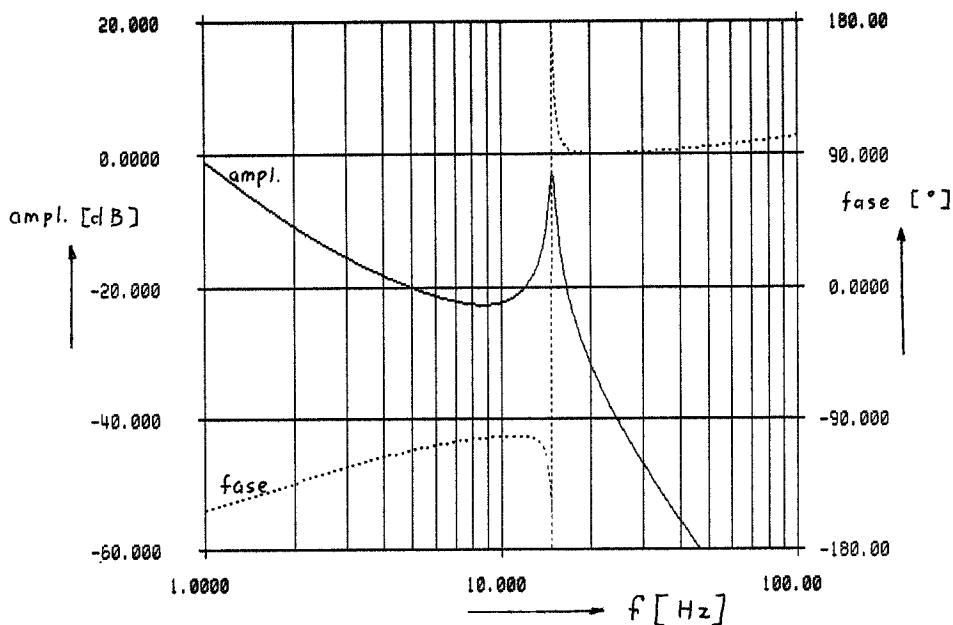
3.3. Terugkoppeling over de last

De terugkoppeling van de gemeten lastpositie kan als volgt gemodelleerd worden:



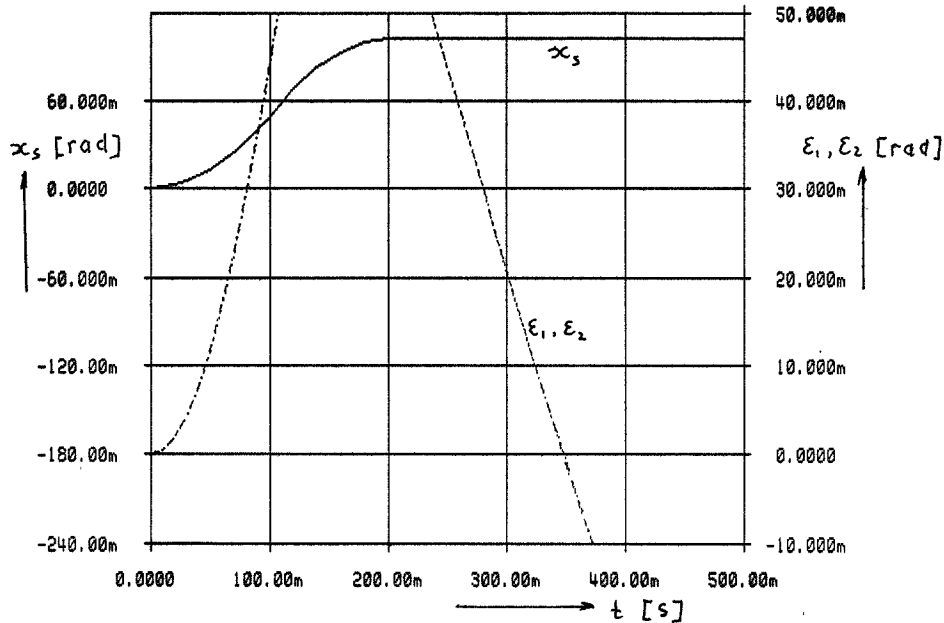
Hierin is de servokracht gelijk aan $F_s = Kp_2(x_s - q_2) + Kd_2(v_s - \dot{q}_2)$.

Aan het fasediagram van $H_{\text{mechanica}}$ (figuur 2.2) is te zien dat hier wel een 180° -doorgang optreedt zodra een PD-regelaar wordt toegepast. De fase ligt bij lage frequenties vlak onder -180° en duikt bij de resonantiefrequentie naar -360° . Door het toepassen van de PD-regelaar is de fase voor lage frequenties groter dan -180° , zodat in de buurt van de resonantiefrequentie de fasekarakteristiek de -180° -lijn snijdt. Bij deze frequentie moet de amplitude dus kleiner zijn dan 1.



Figuur 3.3 Bodediagram van q_2/ϵ_2 met $F_s = 0.105\epsilon_2 + 0.0085\dot{\epsilon}_2$

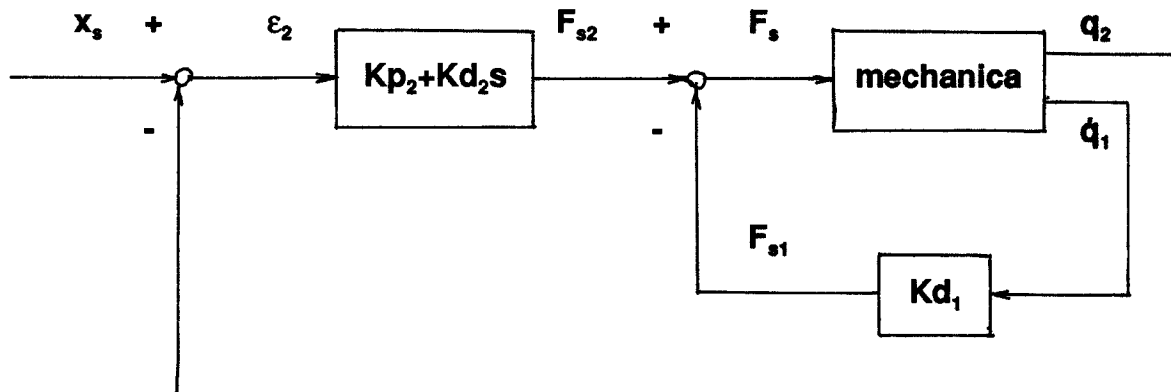
Bovendien moet er een veilige fasemarge zijn bij de frequentie waar de amplitude gelijk is aan 1. De regelparameters zijn hier bepaald door de bodediagrammen bij verschillende instellingen van Kp_2 en Kd_2 te vergelijken. De keuze viel uiteindelijk op $Kp_2 = 0.105$ en $Kd_2 = 0.0085$. De fasemarge is hierbij ongeveer 30° en de amplitudemarge - 3 dB (figuur 3.3). In vergelijking met de terugkoppeling over de motoras is deze regeling erg traag. De settling time is namelijk 7.6 seconde (figuur 3.4).



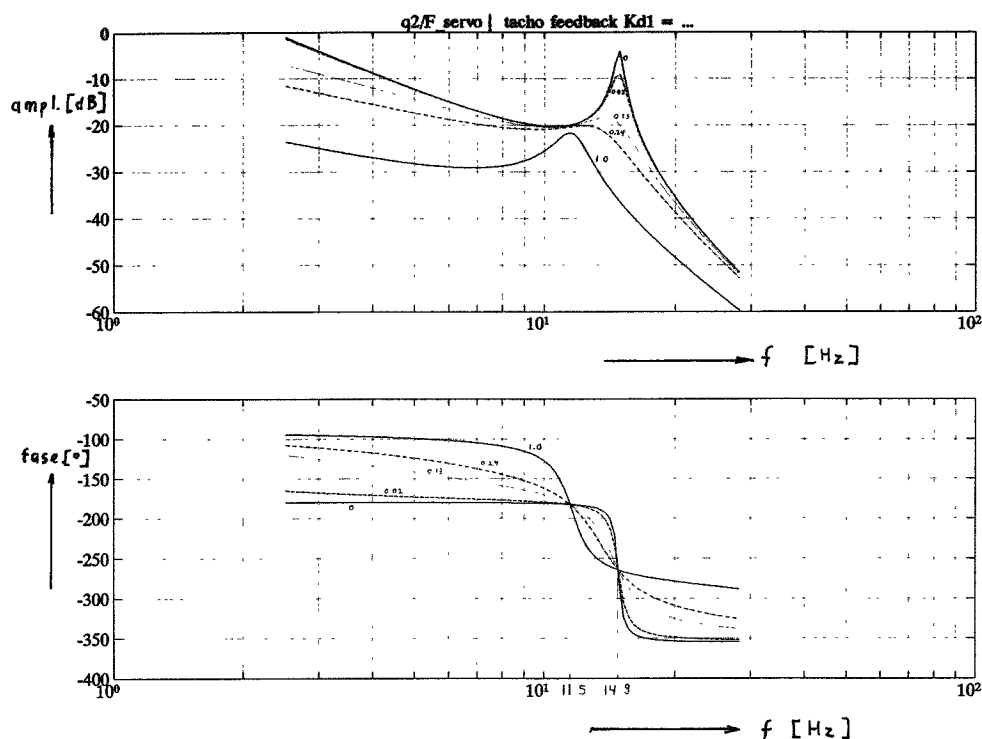
Figuur 3.4 Tijdresponsie van ϵ_1 , ϵ_2 en x_s met $F_s=0.105\epsilon_2+0.0085\dot{\epsilon}_2$

3.4. Gemengde terugkoppeling

De snelheid van het in paragraaf 3.3 beschreven regelconcept laat nogal te wensen over. De eenvoudigste uitbreiding op dit concept is een snelheidsmeter (een analoge tacho) op de motoras. Omdat de aandacht voornamelijk uitgaat naar het nauwkeurig positioneren bij constant referentiesignaal, zal in de terugkoppeling over de motorsnelheid geen gebruik worden gemaakt van een snelheidssetpoint. Deze levert voornamelijk een verbetering van de nauwkeurigheid tijdens de opzetbeweging. Het blokschema van het geregelde systeem wordt dan:

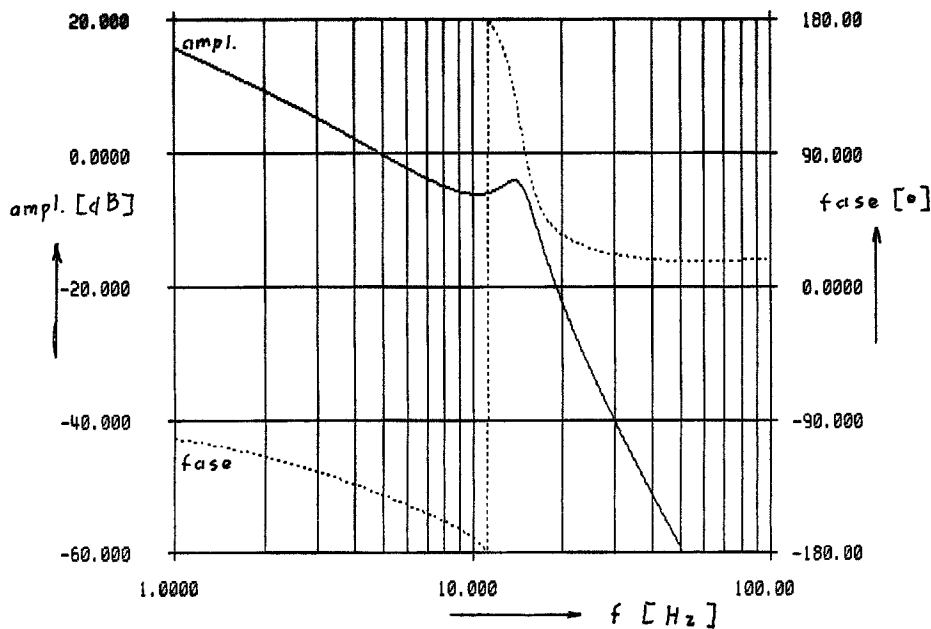


De servokracht is nu $F_s = Kp_2(x_s - q_2) + Kd_2(v_s - \dot{q}_2) - Kd_1\dot{q}_1$. De amplitude van de overdracht van de gesloten lus q_2/F_{s2} (figuur 3.5) vertoont een piek in de amplitude. De hoogte van deze piek neemt bij toenemende waarde van Kd_1 eerst af. Als Kd_1 verder wordt opgevoerd, neemt de piek weer toe. De piek blijkt het kleinst te zijn bij $Kd_1 = 0.24$. Het snijpunt van de amplitudeplot met de 0dB-lijn is een maat voor de bandbreedte van het systeem. Dit snijpunt schuift bij vergroting van Kd_1 naar links hetgeen ongunstig is. De beste keuze van Kd_1 volgt dus uit een afweging tussen bandbreedte en piekhoogte. De keuze is, na vergelijking van de overdracht bij verschillende waarden van Kd_1 , gevallen op $Kd_1 = 0.13$.

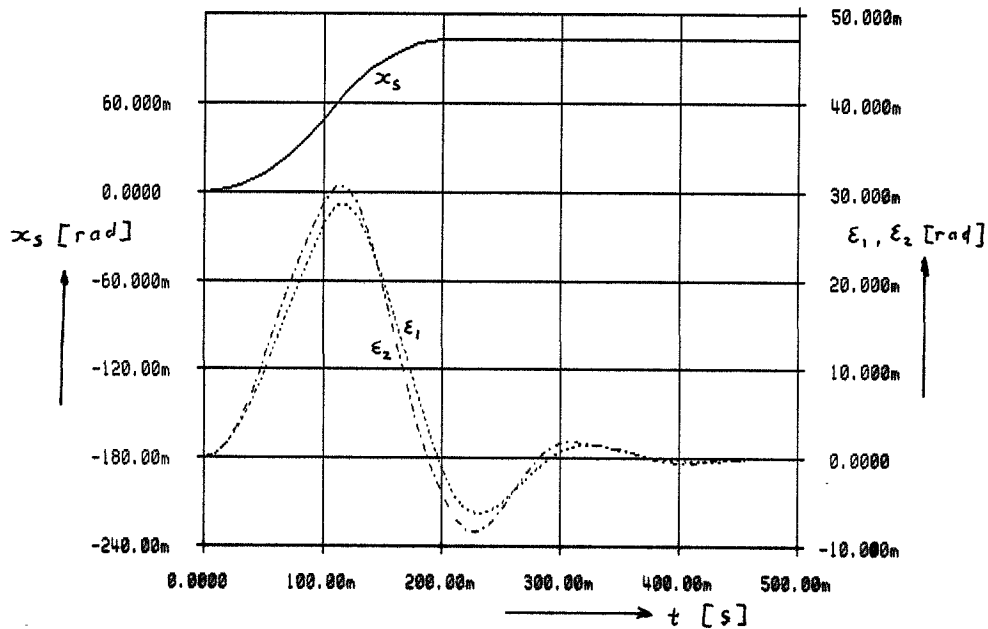


Figuur 3.5 Bodediagram van q_2/F_{s2} met snelheidsterugkoppeling

In de Bode-diagrammen is te zien dat in de buurt van de frequentie waar de fase 180° is, de amplitudegrafiek een lokaal minimum vertoont (figuur 3.5). Bij toepassing van de PD-regelaar over de last zal deze 180° -doorgang naar rechts verschuiven. Naarmate de verhouding Kd_2/Kp_2 groter gekozen wordt zal dit punt verder naar rechts schuiven. Als daarbij de amplitudemarge gelijk gehouden wordt, neemt de bandbreedte af. De gunstigste waarde is dus $Kd_2 = 0$, omdat daarbij de bandbreedte het grootst is. Kp_2 kan gevonden worden door een amplitudemarge van 0.5 ($=-6$ dB) aan te houden. Dit resulteert in $Kp_2 = 5.2$. De settling time van deze regeling is iets groter dan bij de eerst behandelde PD regeling, namelijk 0.74 seconde (figuren 3.6 en 3.7).



Figuur 3.6 Bodediagram van q_2/ε_2 met $F_s=5.2\varepsilon_2-0.13\dot{q}_1$

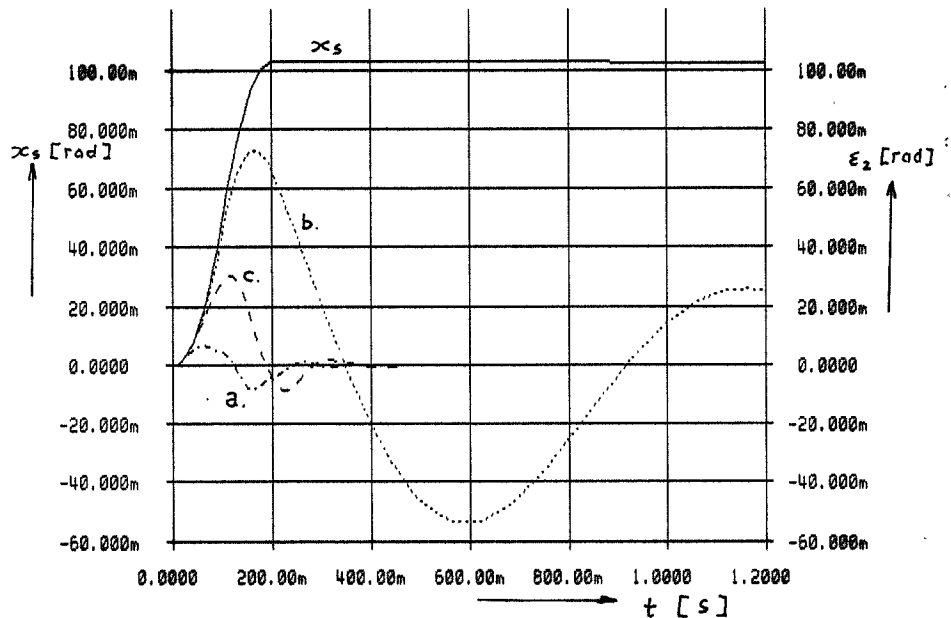


Figuur 3.7 Tijdsresponsie van ϵ_1 , ϵ_2 en x_s met $F_s=5.2\epsilon_2-0.13\dot{q}_1$

Uit het bovenstaande blijkt dat bij variatie van Kd_1 de piek in de overdracht verschuift en in hoogte varieert. De piek is echter niet in zijn geheel weg te werken. Wanneer echter massa m_2 groter zou zijn dan m_1 , dan blijkt deze piek voor bepaalde waarden van Kd_1 wel te verdwijnen, zodat een monotoon dalende amplitudeverloop ontstaat (figuur b.1 in bijlage B3). Nu kan door toepassing van een D-actie over de last de bandbreedte wel verhoogd worden. Het punt waarbij de fase 180° is verschuift dan naar rechts, waardoor de amplitudemarge, wegens het dalend verloop van de amplitude, groter wordt.

3.5. Vergelijking van de regelingen

Indien de tijdresponsies van bovenstaande regelingen met elkaar vergeleken worden, blijkt de regeling met snelheids- en positieterugkoppeling over de motoras het nauwkeurigst te zijn. Dit komt mede door het feit dat de proportionele actie relatief groot is. De gemengde PD-regeling is niet veel slechter, maar de PD-regeling over de lastpositie is duidelijk een stuk trager. Dit is in onderstaand figuur duidelijk te zien.

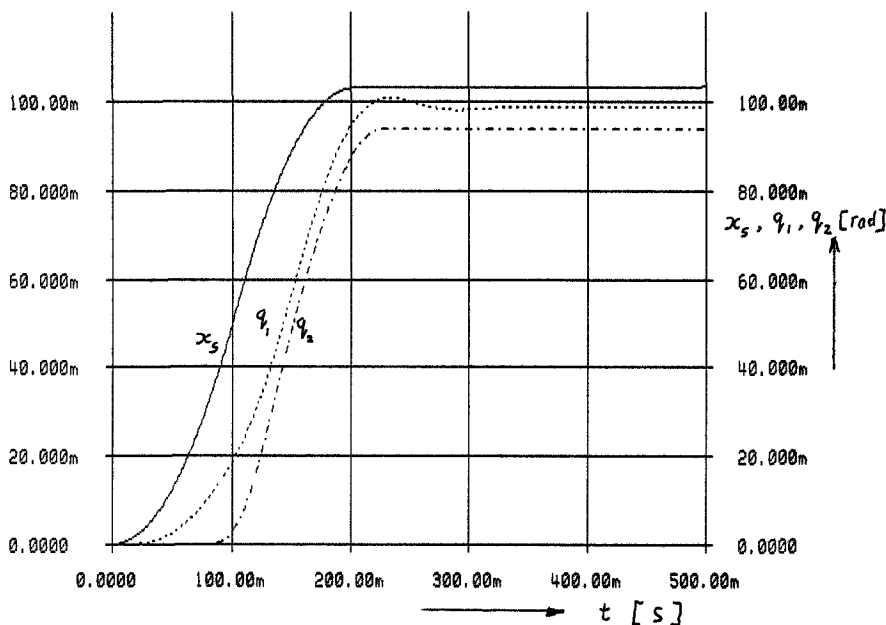


Figuur 3.8 Tijdresponsies van ϵ_2 bij

- a. $F_s = 15.7\epsilon_1 + 0.34\dot{\epsilon}_1$
- b. $F_s = 0.105\epsilon_2 + 0.0085\dot{\epsilon}_2$
- c. $F_s = 5.2\epsilon_2 - 0.13\dot{q}_1$

4. Klassieke regelwet met wrijving

Twee van de hierboven behandelde regelconcepten voldoen aan de gestelde eisen indien geen wrijving aanwezig is. Er wordt nu een wrijvingskracht met wrijvingscoëfficiënt $f_w=0.1$ Nm op het systeem aangebracht. Omdat bij wrijving op de last de lastpositie niet bepaald kan worden als deze niet wordt gemeten, wordt alleen verder gegaan met het regelconcept dat in paragraaf 3.4 staat beschreven. Dit regelconcept bestaat uit een terugkoppeling van de lastpositie en een tacho-terugkoppeling van de motor. Simulaties laten zien dat door aanbrengen van deze wrijving een statische afwijking ontstaat.



Figuur 4.1 Tijdresponsie van q_1 , q_2 en x_s met $F_s=5.2\varepsilon_2-0.13\dot{q}_1$ en $f_w=0.1$ Nm

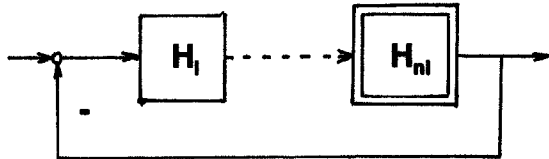
Deze afwijking is maximaal $f_w/Kp_2 = 0.1/5.2 = 0.019$ rad. Met dit regelconcept is de gestelde nauwkeurigheidseis dus niet haalbaar. Er zullen andere regelconcepten gevonden moeten worden om een acceptabele responsie te krijgen. Een aantal regelconcepten zal in de hoofdstukken 7 en 8 behandeld worden.

De wrijving is een niet-lineaire systeem eigenschap. Hierdoor kan een systeem met wrijving niet met het Nyquist-criterium op stabiliteit onderzocht worden. Een methode die wel de stabiliteit van niet-lineaire systemen kan voorspellen is de beschrijvende functie

theorie. Deze theorie, die bij de afdeling Mechatronica van het CFT al eerder gebruikt is [2], zal daarom in hoofdlijnen beschreven worden in het volgende hoofdstuk.

5. Stabiliteitsonderzoek met de beschrijvende functie theorie

De stabiliteit van lineaire systemen kan onderzocht worden met het criterium van Nyquist. Een methode om de stabiliteit van een niet-lineair systeem (de wrijvingskracht is een niet-lineaire functie van onder andere de snelheid) te onderzoeken is de beschrijvende functie theorie. In deze theorie wordt het systeem opgedeeld in een niet-lineair deel H_{nl} en een (of twee) lineair deel H_l . Het blokdiagram wordt dan:



De pijl tussen H_l en H_{nl} is gestippeld omdat dit (vaak) één van de vele ingangen van H_{nl} is. Wanneer dit desondanks als een lineair systeem beschouwd wordt, volgt hieruit de volgende overdracht:

$$H_{tot} = \frac{H_l H_{nl}}{1 + H_l H_{nl}}$$

Wanneer H_{nl} lineair zou zijn, dan treedt instabiliteit op als de open lus $H_l H_{nl}$ links om het punt -1 van het polaire diagram loopt. De overdracht wordt nu omgeschreven tot:

$$H_{tot} = \frac{H_l}{1/H_{nl} + H_l}$$

Dit systeem wordt instabiel zodra de polaire plot van H_l het 'punt' $-1/H_{nl}$ links omcirkelt. Hoewel H_{nl} niet-lineair is, blijkt dit een bruikbare methode voor stabiliteitsonderzoek van diverse niet-lineaire systemen. Ter bepaling van de stabiliteit zullen dus twee krommen in het polaire diagram bepaald moeten worden, namelijk H_l als functie van ω en $-1/H_{nl}$. H_{nl} is in het algemeen geen functie van ω , maar bijvoorbeeld van de snelheidsamplitude zoals bij wrijving het geval is.

In bovenstaande beschouwing komt slechts één niet-lineair deel voor in het blokschema. Indien er twee of meer niet-lineaire delen in het geregelde systeem voorkomen, zal het

in de meeste gevallen niet mogelijk zijn het systeem eenvoudig te splitsen in een lineair en een niet-lineair deel. Een stabiliteitsbeschouwing op grond van de beschrijvende functietheorie is dan (nog) niet mogelijk. Deze beperking heeft tot gevolg dat stabiliteitsonderzoek bij systemen met wrijving alleen mogelijk is als de regelaar alleen lineaire componenten bevat.

Als het systeem slechts één niet-lineair deel bevat, kan als volgt te werk worden gegaan.

Het lineaire deel van de overdracht wordt gevonden door het totale, geregelde systeem in een blokdiagram weer te geven en vervolgens de lineaire componenten samen te voegen tot één blok. Hierbij mogen geen blokken over het niet-lineaire blok verplaatst worden.

Het bepalen van het niet-lineaire deel is minder eenvoudig. Voor een aantal niet-lineaire (tijd)functies is inmiddels een beschrijvende functie bepaald. Deze kunnen in de literatuur over de beschrijvende functie theorie [3] gevonden worden. Indien dit niet het geval is, zal deze overdracht eigenhandig bepaald moeten worden.

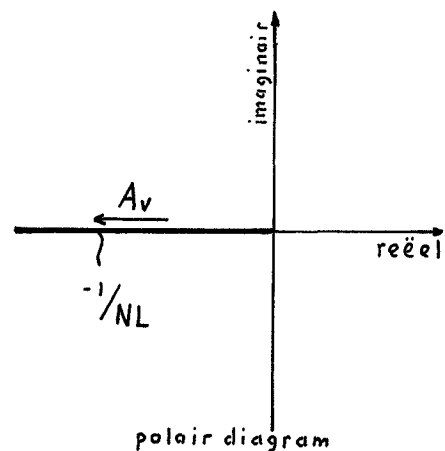
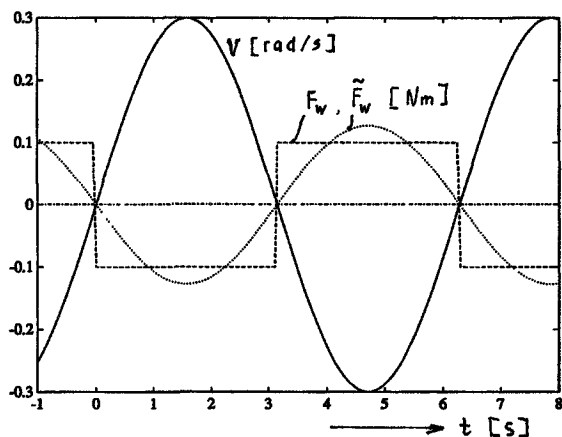
Beide overdrachten worden vervolgens in een polair diagram weergegeven. De aanwezigheid van een snijpunt betekent dat er oscillatie gaat optreden en wel met de frequentie die bij dat punt van de lineaire overdracht hoort en met de amplitude die bij dat punt van de niet-lineaire kromme hoort. De stabiliteit wordt nu bepaald door de richting waarmee dit snijpunt genaderd wordt. Indien bij lichte toename van de amplitude het punt $-1/NL$ zodanig komt te liggen dat het lineaire deel-systeem volgens Nyquist stabiel is (dus links van de kromme H_1 bij toenemende ω), zal de amplitude weer afnemen en dus is de limit cycle stabiel in de zin van Lyapunov. Indien het punt $-1/NL$ de andere richting in schuift zal de amplitude steeds verder toenemen en is het systeem dus instabiel.

5.1. Modelling van wrijving

In het hier beschouwde systeem is het niet-lineaire deel de overdracht tussen de snelheid van de last en de wrijvingskracht. De wrijvingskracht is een discontinue functie van de lastsnelheid met een amplitude die onafhankelijk is van de snelheidsamplitude. Bij stilstand is de wrijvingskracht afhankelijk van de overige krachten die op de last werken.

Omdat overdrachtfuncties het harmonisch gedrag van een systeem beschrijven, zullen de lastsnelheid en de wrijvingskracht als harmonische signalen gemodelleerd moeten worden.

Stel dat de lastsnelheid een sinusvormig verloop heeft, dan heeft de wrijvingskracht een blokvormig verloop, zoals aangegeven in onderstaand figuur. Een alternerend blokvormig signaal bestaat uit een oneindige reeks sinusvormige signalen. Alleen de overdracht van de snelheid naar de grondharmonische van deze reeks is eenvoudig te bepalen. De hogere harmonische deel-signalen worden daarom weggelaten. Het blokvormig signaal F_w met amplitude f_w wordt dus benaderd door een sinusvormig signaal \tilde{F}_w met amplitude $4f_w/\pi$. Als A_v de amplitude van de sinusvormige snelheid is, wordt de benadering van de niet-lineaire overdracht gegeven door $NL=4f_w/\pi A_v$. Het kritieke punt wordt daarmee $-\pi A_v/4f_w$. Dit kan gezien worden als een verzameling punten op de negatief reële as van het polair diagram, waarbij de afstand tot de oorsprong afhankelijk is van de **snelheidsamplitude A_v** .



Wanneer het lineaire deel van de overdracht bekend is zijn er drie verschillende situaties denkbaar:

1. De lineaire overdracht heeft geen snijpunt met de negatief reële as.
2. De lineaire overdracht snijdt in negatieve richting (rechtsom) de negatief reële as.
3. De lineaire overdracht snijdt in positieve richting (linksom) de negatief reële as.

In situatie 1. is het systeem op grond van de beschrijvende functie theorie stabiel. In situatie 2. zal het systeem instabiel zijn en in situatie 3. ontstaat er een limit cycle.

6. Inleiding op regelconcepten voor een systeem met wrijving

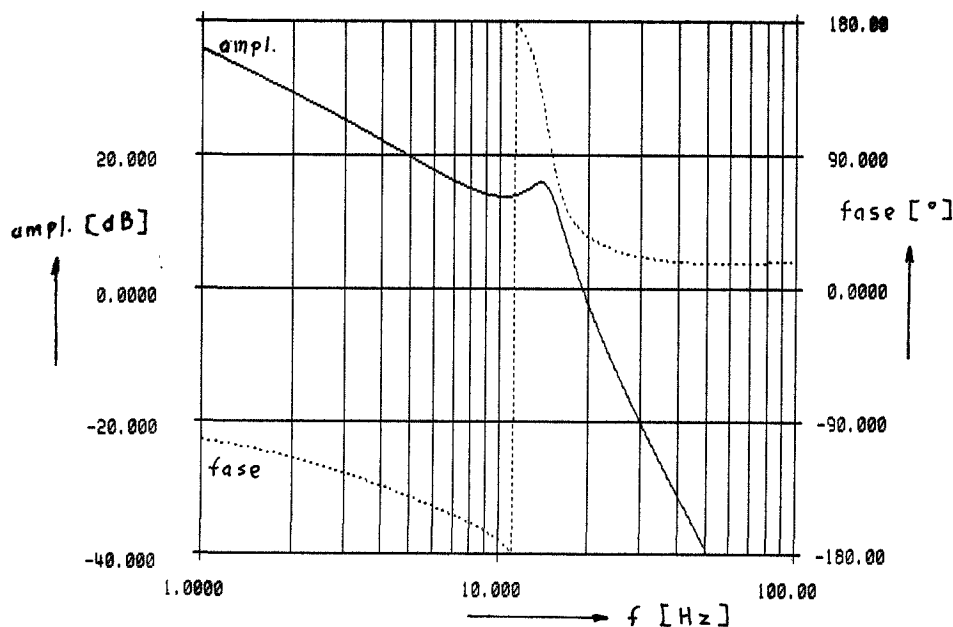
In de hoofdstukken 7 en 8 zullen een aantal regelconcepten voor het systeem met wrijving op de last behandeld worden. Het eerste concept bestaat uit het opvoeren van de regelparameters. Hierbij komt de beschrijvende functie theorie aan de orde. In de overige concepten (hoofdstuk 8) wordt met behulp van een niet-lineaire compensatiekracht gepoogd de wrijvingskracht te compenseren. In het eerste niet-lineaire concept wordt een discontinue compensatiekracht als functie van de positiefout van de last toegepast. In het tweede is een compensatiekracht genomen die tegengesteld is aan de 'gemeten' wrijvingskracht. Het derde en laatste concept is een uitbreiding van het tweede concept. Hierin wordt rekening gehouden met de massastraagheid van de motoras.

7. Verhogen van de regelparameterwaarden

In paragraaf 3.4 is voor het systeem zonder wrijving een optimale lineaire regeling gevonden. De servokracht bestaat uit een proportionele actie op de positiefout van de last en een differentiële actie op de rotatiesnelheid van de motor:

$$F_s = Kp_2(x_s - q_2) - Kd_1\dot{q}_1.$$

De optimale instelling van deze regelparameters is $Kp_2=5.2$ en $Kd_1=0.13$. Wanneer deze regelparameters opgevoerd worden, zal het systeem instabiel worden. Dit volgt uit het bodediagram (figuur 7.1) bij de keuze $Kp_2=52$ en $Kd_1=1.3$. Hieruit kan afgeleid worden dat de open loop van de overdracht (q_2/ε_2) bij toenemende hoeksnelheid links om het punt -1 van het polaire diagram loopt, zodat het systeem volgens Nyquist instabiel is.

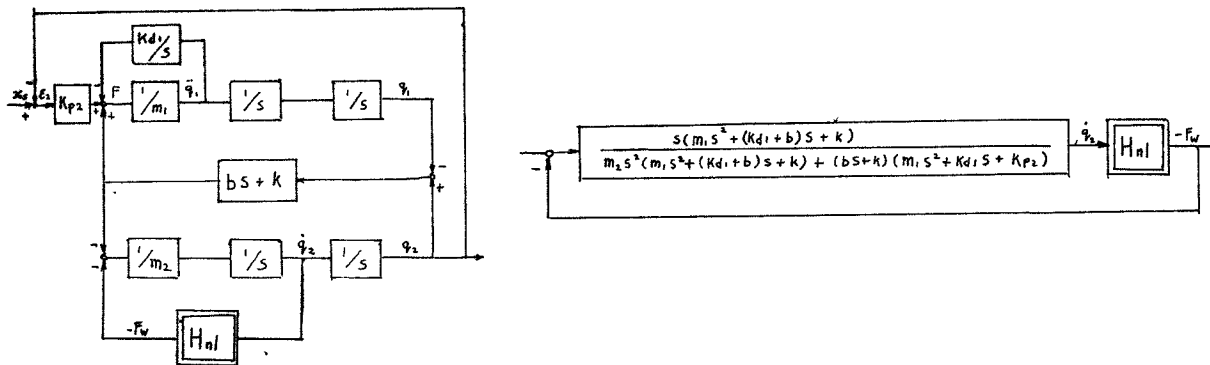


Figuur 7.1 Bodediagram van q_2/ε_2 met $F_s=52\varepsilon_2-1.3\dot{q}_1$

Wanneer er een wrijvingskracht aangrijpt op de last, zal de last de gewenste positie niet bereiken wanneer de hierboven (en in paragraaf 3.4) vermelde lineaire regeling wordt toegepast. De positiefout blijft op een aanzienlijk grote waarde steken. Deze statische

eindfout is ondermeer afhankelijk van de parameter K_{p2} . In de statische eindtoestand is de positiefout van de last immers gelijk aan de wrijvingskracht gedeeld door K_{p2} . Het ligt dus voor de hand K_{p2} zo groot mogelijk te kiezen. Een gevaar hierbij is dat het systeem instabiel wordt zoals bij het wrijvingsloze systeem.

Om de stabiliteit van dit niet-lineaire systeem te bepalen, wordt de beschrijvende functie theorie gebruikt. Het niet-lineaire deel van de overdracht bestaat hier uit de overdracht van lastsnelheid naar wrijvingskracht. De afleiding hiervan staat in paragraaf 5.1. Het lineaire deelsysteem, ofwel de overdracht van de wrijvingskracht naar de snelheid van de last, kan gevonden worden door het systeem in een blokschema weer te geven en vervolgens te reduceren tot een tegengekoppeld systeem met een lineair en een niet-lineair blok. Dit is in onderstaand figuur weergegeven. De ingang x_0 wordt hierbij weggelaten. Het reductieproces is stap voor stap in bijlage B1 te vinden.

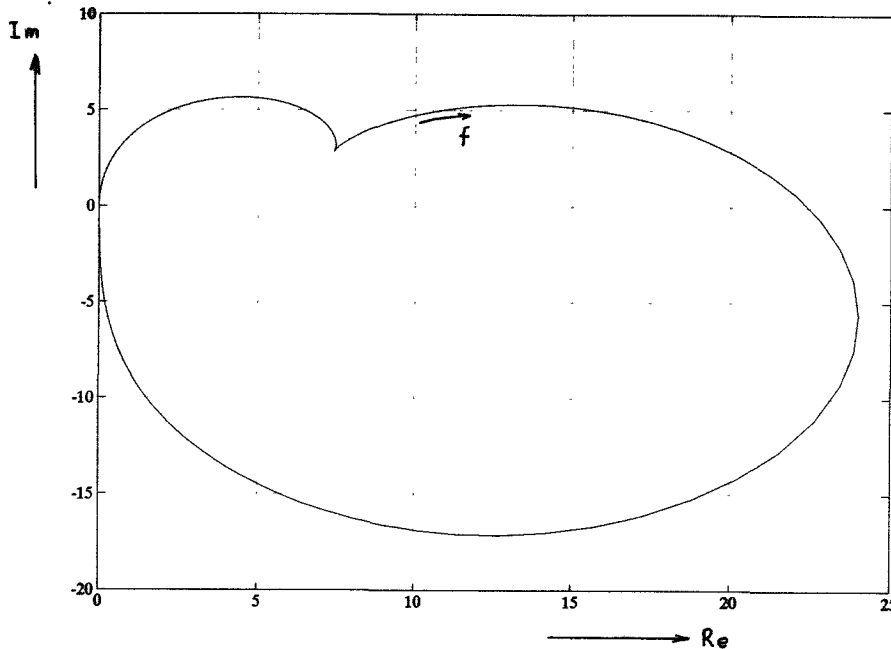


Hetzelfde kan bereikt worden door de bewegingsvergelijkingen van de beide massa's om te schrijven naar het Laplace-domein en de positie van de motormassa te elimineren. De lineaire overdracht is dus:

$$\frac{\dot{q}_2}{F_w} = \frac{s (m_1 s^2 + (Kd_1 + b) s + k)}{m_2 s^2 (m_1 s^2 + (Kd_1 + b) s + k) + (bs + k) (m_1 s^2 + Kd_1 s + Kp_2)}$$

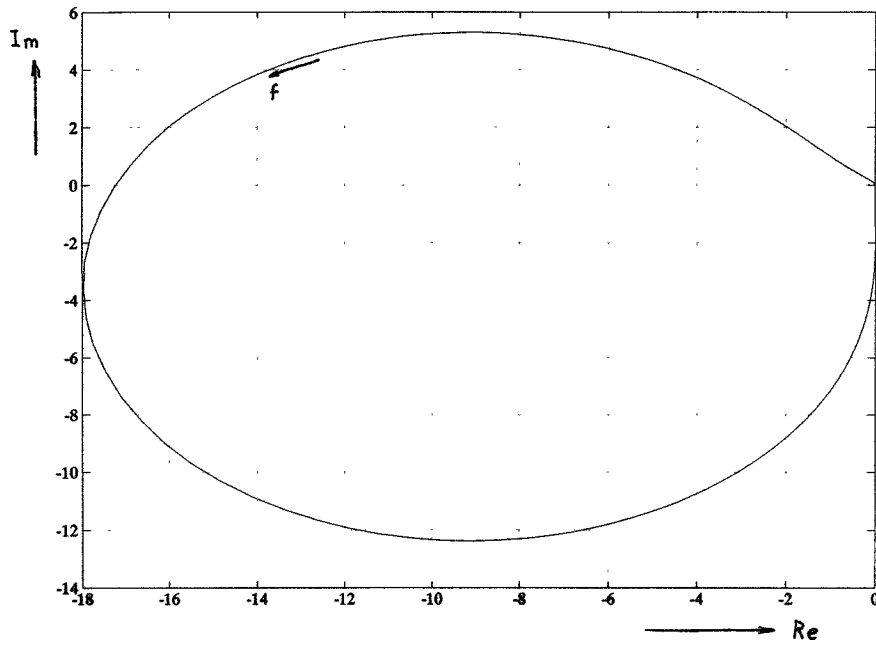
In het polaire diagram is de niet-lineaire overdracht een curve die samenvalt met de negatief reële as, waarbij de afstand tot de oorsprong recht evenredig is met de amplitude van de snelheid van de last.

Het polaire diagram van de lineaire overdracht \dot{q}_2/F_w met regelparameters $Kd_1 = 0.13$ en $Kp_2 = 5.2$ snijdt de reële as rechts van de oorsprong (figuur 7.2). Wanneer beide regelparameters gelijkmatig opgevoerd worden, verschuift dit snijpunt verder naar rechts.

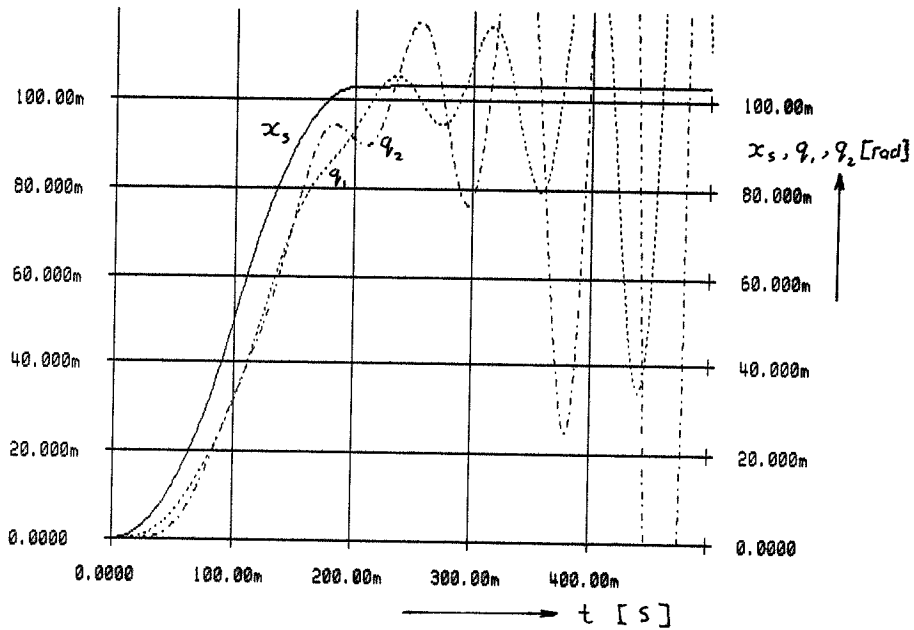


Figuur 7.2 Polair diagram van \dot{q}_2/F_w met $F_s=5.2\varepsilon_2-0.13\dot{q}_1$

Echter bij een bepaalde waarde klappt de lus om (de oorzaak hiervan is niet bekend) naar het linker halfvlak (figuur 7.3), zodat er een snijpunt ontstaat met de negatief reële as. Bij toenemende hoeksnelheid snijdt de polaire grafiek deze as in negatieve richting. Op grond van de beschrijvende functie theorie (paragraaf 5.1) moet het systeem dus instabiel zijn. Bij de regelinstelling $Kp_2=52$ en $Kd_1=1$ blijkt het systeem inderdaad instabiel te zijn. De tijdresponsie laat een oscillatie met toenemende amplitude zien (figuur 7.4). De frequentie zou volgens de beschrijvende functie theorie gelijk moeten zijn als de frequentie waarbij de polaire kromme de negatief reële as snijdt. Deze is 11.35 Hz (figuur b.15). De trilling in figuur 7.4 heeft echter een iets hogere frequentie, namelijk ongeveer 12.7 Hz.

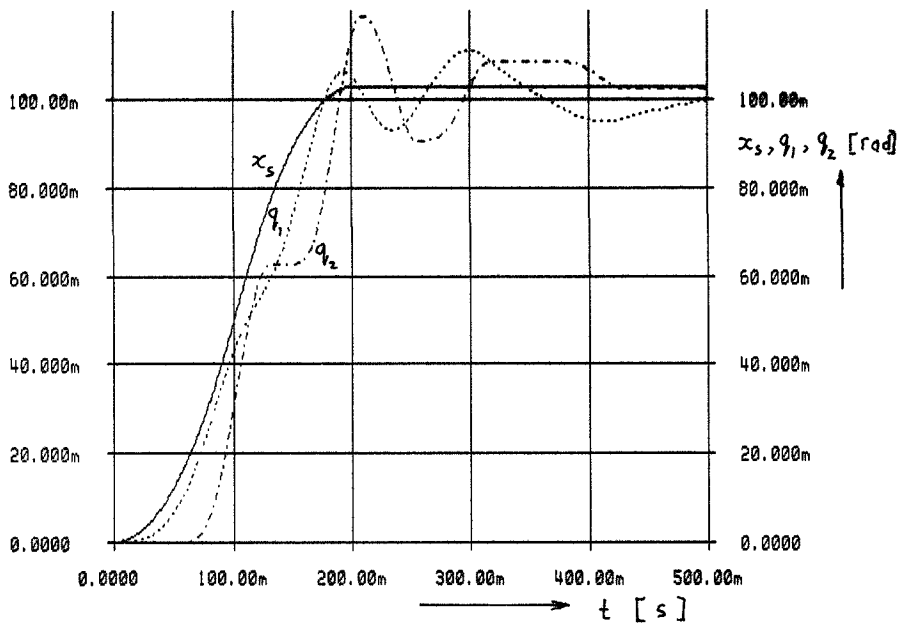


Figuur 7.3 Polair diagram van \dot{q}_2/F_w met $F_s=52\varepsilon_2-1.3\dot{q}_1$



Figuur 7.4 Tijdresponsie van q_1 , q_2 en x_s met $F_s=52\varepsilon_2-1\dot{q}_1$ en $f_w=0.1$ Nm

Wanneer een hogere relatieve demping wordt genomen (figuur 7.5), treedt deze oscillatie niet meer op, in tegenspraak met de beschrijvende functie theorie. De lastpositie vertoont echter een alternerend verloop in de tijd, met steeds kleiner wordende fout. Het systeem is stabiel in de zin van Lyapunov, maar het duurt erg lang voor de gewenste nauwkeurigheid wordt behaald. De motor blijft bovendien binnen, door de veerstijfheid, bepaalde grenzen op en neer bewegen.

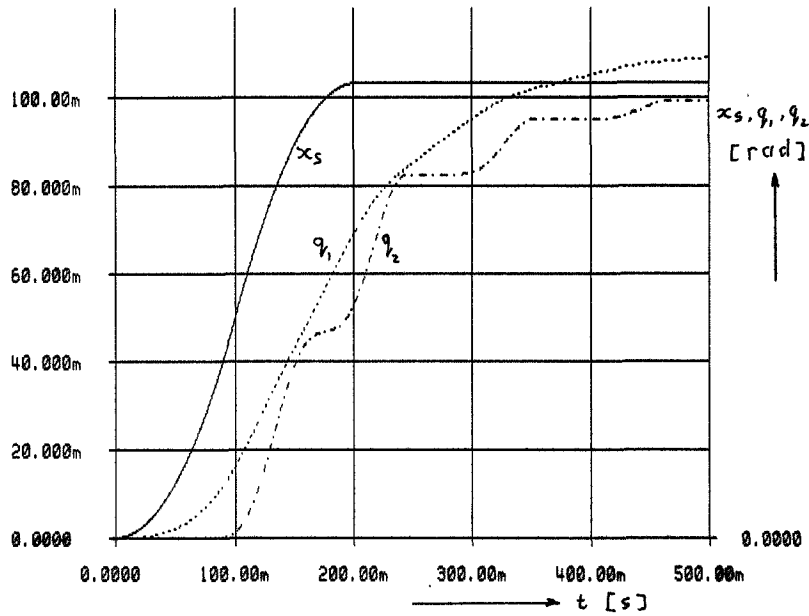


Figuur 7.5 Tijdresponsie van q_1 , q_2 en x_s met $F_s=52\epsilon_2-1.3\dot{q}_1$ en $f_w=0.1$ Nm

Wanneer de verhouding Kp_2/Kd_1 nog kleiner wordt genomen, verdwijnt het alternerend gedrag van de last- en motorpositie (figuur 7.6). Het stick-slip verschijnsel is nu duidelijk zichtbaar. Het duurt nu nog langer voor de last een bepaalde nauwkeurigheid bereikt.

Uit bovenstaande resultaten blijkt dat stabiliteitsbeschouwing met behulp van de beschrijvende functie theorie niet geheel voldoet. Blijkbaar zijn een aantal aannames niet geoorloofd. De aanname dat de snelheid en de wrijvingskracht harmonische functies van de tijd zijn is onjuist, zoals blijkt uit de tijdresponsies.

Uit het voorgaande kan geconcludeerd worden dat, door bepaalde keuzes van de regelparameters, waarbij de verhouding Kp_2/Kd_1 van belang is, een stabiel (in de zin van Lyapunov) maar traag systeem ontstaat.

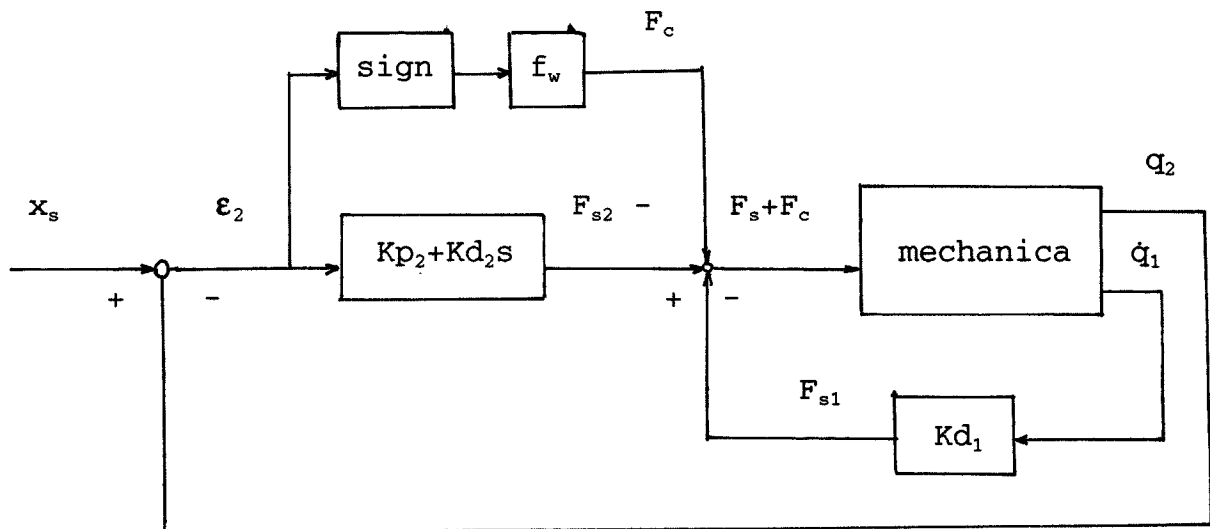


Figuur 7.6 Tijdresponsie van q_1 , q_2 en x_s met $F_s=52e_2-5\dot{q}_1$ en $f_w=0.1$ Nm

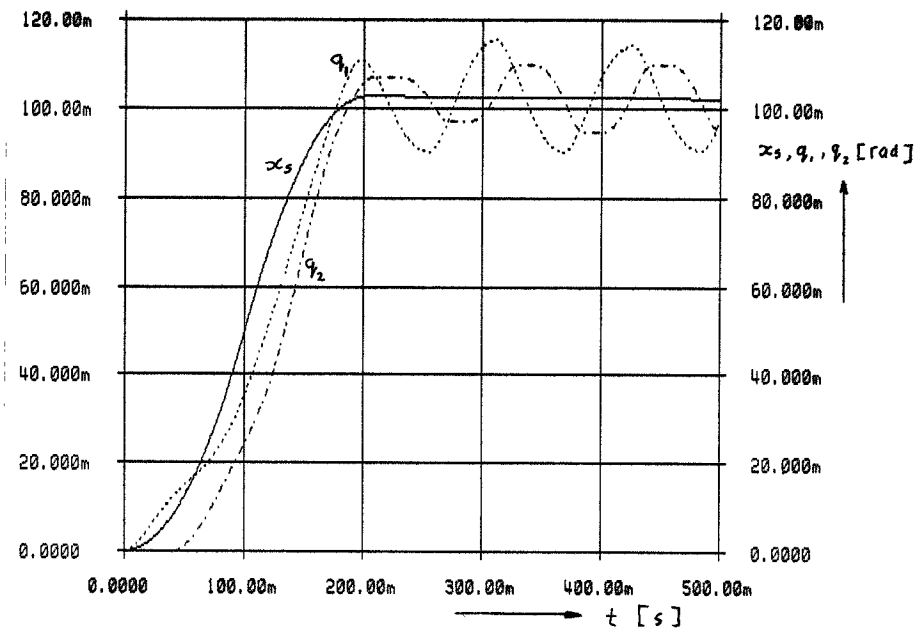
8. Niet-lineaire regelconcepten

8.1. Positie-afhankelijke wrijvingscompensatie

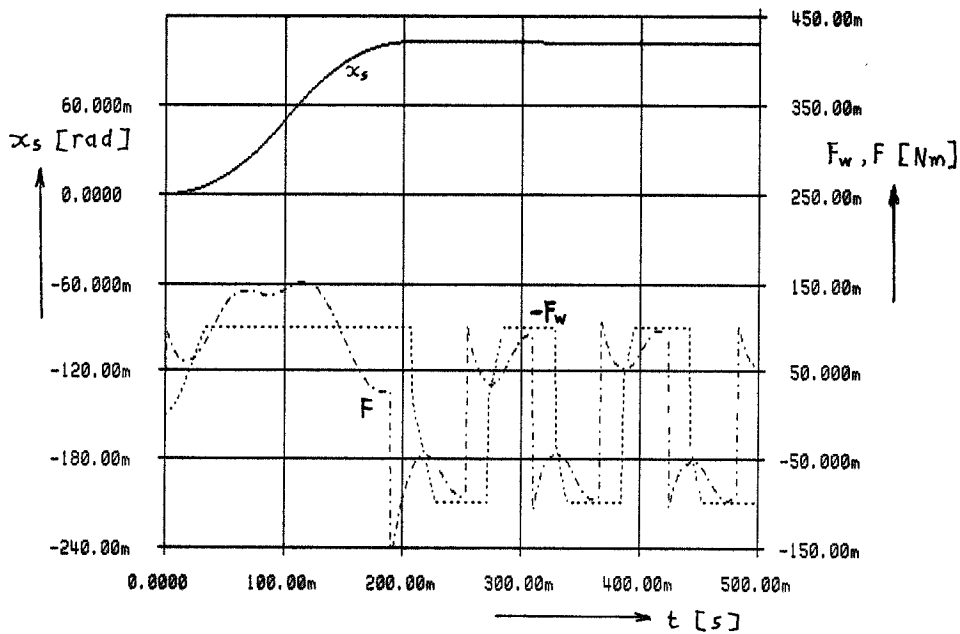
Wanneer er een wrijvingskracht op de last werkt, is deze tegengesteld aan de snelheid van de last. Als de positiefout van de last negatief is, moet de last ooit met positieve snelheid gaan bewegen om in de juiste positie te komen. Hierdoor zal een wrijvingskracht in negatieve richting ontstaan. Als compensatiekracht wordt daarom een kracht gekozen die gelijk is aan de wrijvingscoëfficiënt met teken tegengesteld aan dat van de positiefout ϵ_2 . Het blokschema hiervan staat hieronder weergegeven.



Uit de tijdresponsies van dit systeem (figuur 8.1) blijkt dat de positiefout van de last niet naar nul gaat, maar met een constante amplitude en frequentie rond de gewenste eindpositie blijft trillen. Er treedt een limit cycle op. Waarom dit concept niet goed werkt, is aan het verloop van de krachten te zien (figuur 8.2). De compensatiekracht F_c is ten opzichte van de wrijvingskracht in tijd verschoven, waardoor ze afwisselend hetzelfde en tegengesteld teken hebben. Dit concept voldoet dus niet aan de gestelde eisen. Op dit concept is niet verder doorgegaan. Een suggestie voor verbetering van dit concept is het uitproberen van een trage servo-regeling die het systeem niet in trilling brengt, waardoor ϵ_2 niet van teken wisselt.



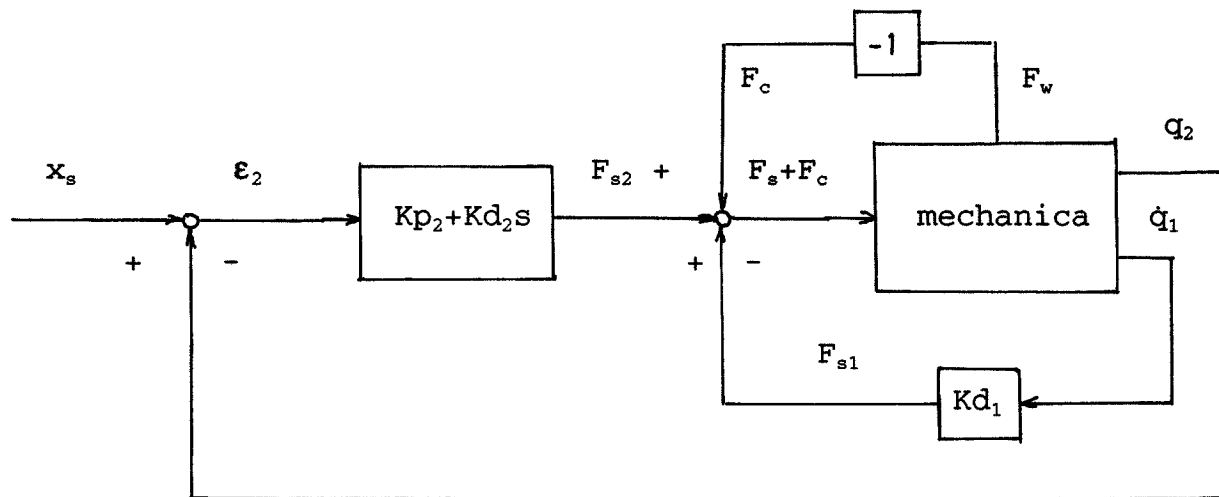
Figuur 8.1 Tijdsresponsie van q_1 , q_2 en x_s met $F=5.2\varepsilon_2-0.13\dot{q}_1-f_w\text{sign}(\varepsilon_2)$ en $f_w=0.1$ Nm



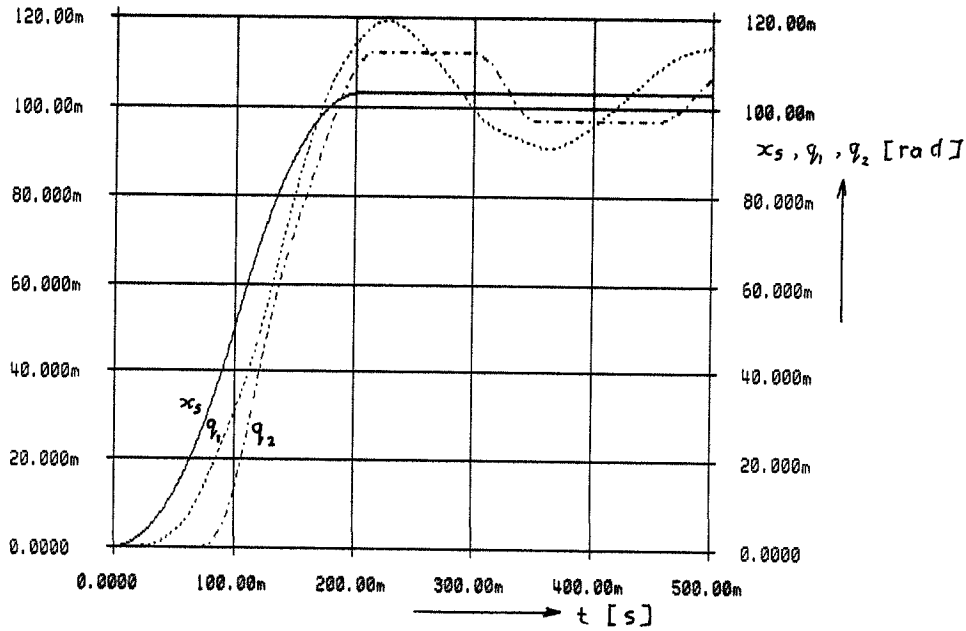
Figuur 8.2 Tijdsresponsie van F_w , F en x_s met $F=5.2\varepsilon_2-0.13\dot{q}_1-f_w\text{sign}(\varepsilon_2)$ en $f_w=0.1$ Nm

8.2. Wrijvingscompensatie met gemeten wrijvingskracht

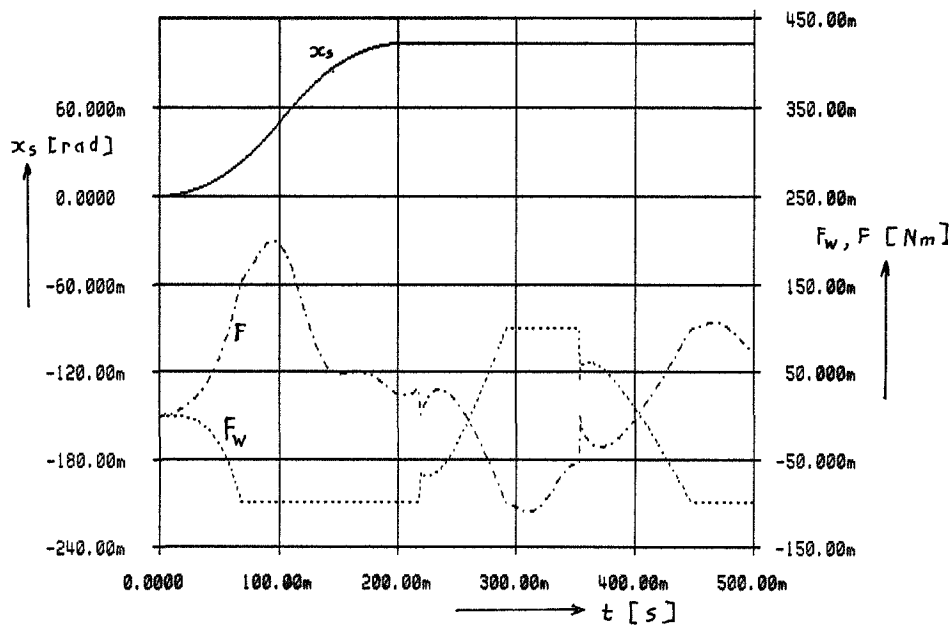
Het regelconcept in voorgaand hoofdstuk heeft het euvel dat compensatiekracht en wrijvingskracht niet synchroon lopen, indien het systeem in trilling is. Wanneer als compensatiekracht het tegengestelde van de wrijvingskracht genomen wordt, is dit euvel verholpen. Het blokdiagram van deze regeling staat hieronder weergegeven.



Tijdresponsies van het systeem met dit regelconcept (figuur 8.3) laten ook nu weer een slingerend gedrag van beide massa's zien. De amplitude van de motorpositie blijft constant zoals in het vorige concept het geval is. De amplitude van de trilling in de lastpositie neemt echter af, hetgeen een verbetering inhoudt ten opzichte van het vorige concept. Deze afname in amplitude is echter veel te traag en bovendien neemt de frequentie van de alternerende beweging af. De oorzaak van deze onnauwkeurigheid is de combinatie van de slappe in de overbrenging en de massatraagheid van de motoras. De compensatiekracht die op de motoras wordt uitgeoefend, wordt hierdoor vervormd doorgegeven aan de last (figuur 8.4). Ook dit concept voldoet dus niet aan de eisen.



Figuur 8.3 Tijdsresponsie van q_1 , q_2 en x_s met $F=5.2\varepsilon_2-0.13\dot{q}_1-F_w$ en $f_w=0.1$ Nm



Figuur 8.4 Tijdsresponsie van F_w , F en x_s met $F=5.2\varepsilon_2-0.13\dot{q}_1-F_w$ en $f_w=0.1$ Nm

8.3. Exacte wrijvingscompensatie

In voorgaande twee hoofdstukken wordt een relatief eenvoudige compensatiekracht op het systeem uitgeoefend in de hoop een betere responsie te verkrijgen. In het geval van een tweede orde systeem zou het tweede concept een goed resultaat opleveren. In het vierde orde systeem gooit de veerslakte en de massatraagheid van de motoras roet in het eten. Om bij dit vierde orde systeem toch de wrijving exact te compenseren, zal met deze effecten rekening gehouden moeten worden. In het hier uitgewerkte regelconcept zal gepoogd worden de wrijvingskracht met deze inzichten exact te compenseren, zodat naast de compensatiekracht F_{c1} een servokracht kan worden uitgeoefend, die de last als in het lineaire geval nauwkeurig positioneert.

De bewegingsvergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{q}_1 + b \dot{q}_1 + k q_1 &= b \dot{q}_2 + k q_2 + F_s + F_{c1} \\ m_2 \ddot{q}_2 + b \dot{q}_2 + k q_2 &= b \dot{q}_1 + k q_1 + F_w\end{aligned}$$

Ter compensatie van de wrijving zou, in het ideale geval, een compensatiekracht F_{c2} , gelijk, maar tegengesteld, aan de wrijvingskracht, direct op de last uitgeoefend moeten worden. Het probleem is dat er alleen een kracht op de motoras kan worden uitoefend. Deze motoras is met de last verbonden via een overbrenging met veerstijfheid k en (kleine) demping b . De compensatiekracht zal uiteindelijk via deze overbrenging op de last uitgeoefend moeten worden. Voor de massaloos veronderstelde overbrenging geldt actie is reactie, zodat voor de compensatiekracht F_{c1} moet gelden:

$$F_{c1} = m_1 \ddot{q}_1 + F_{c2}$$

De compensatiekracht die de motor moet leveren, moet blijkbaar zowel de massatraagheid van de motor, als de wrijving op de last compenseren.

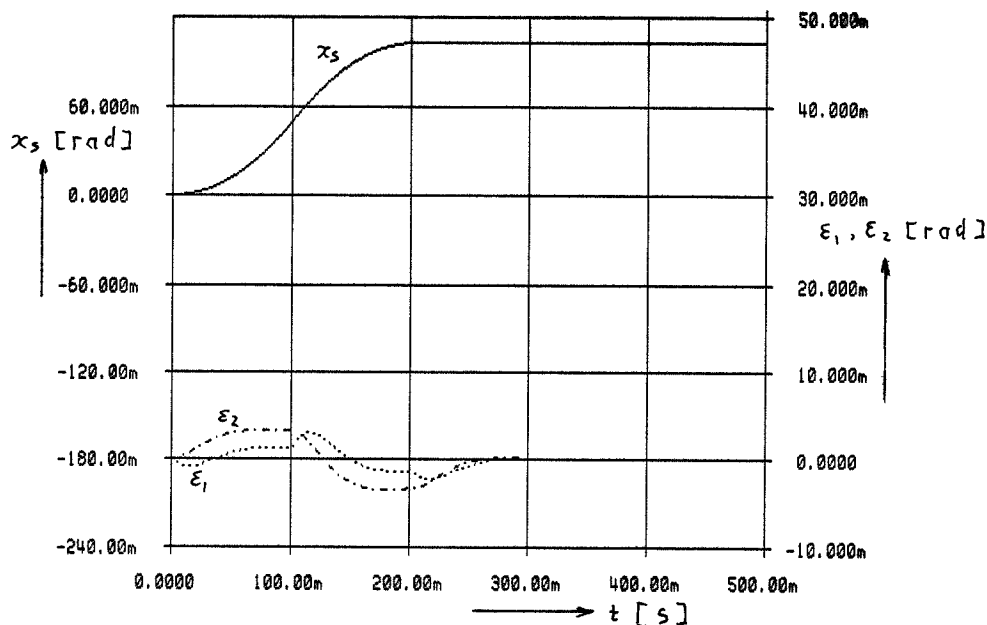
Door de compensatie van de motormassa blijft alleen de massa van de last over, zodat er in feite een tweede orde systeem ontstaat met alleen de lastmassa m_2 . Hierdoor zal de servokracht F_s niet hetzelfde zijn als in het wrijvingsloze geval en in de voorgaande

concepten. Bij een tweede orde systeem hoeft bij de keuze van de PD-regelaar niet op stabiliteit gelet te worden. De regelparameters kunnen dus zo gekozen worden dat de gewenste nauwkeurigheid voldoende snel wordt bereikt. Er wordt gekozen voor $Kp_2 = 6$ en $Kd_2 = 0.15$, waarbij de relatieve demping 70% bedraagt. De settling time is bij deze instelling ongeveer 0.38 seconde (ϵ_2 in figuur 8.5). De totale kracht op de motormassa is dus:

$$\begin{aligned}
 F &= F_s + F_{c1} \\
 &= 6(x_s - q_2) + 0.15(x_s - \dot{q}_2) + m_1 \ddot{q}_1 + F_{c2}
 \end{aligned}$$

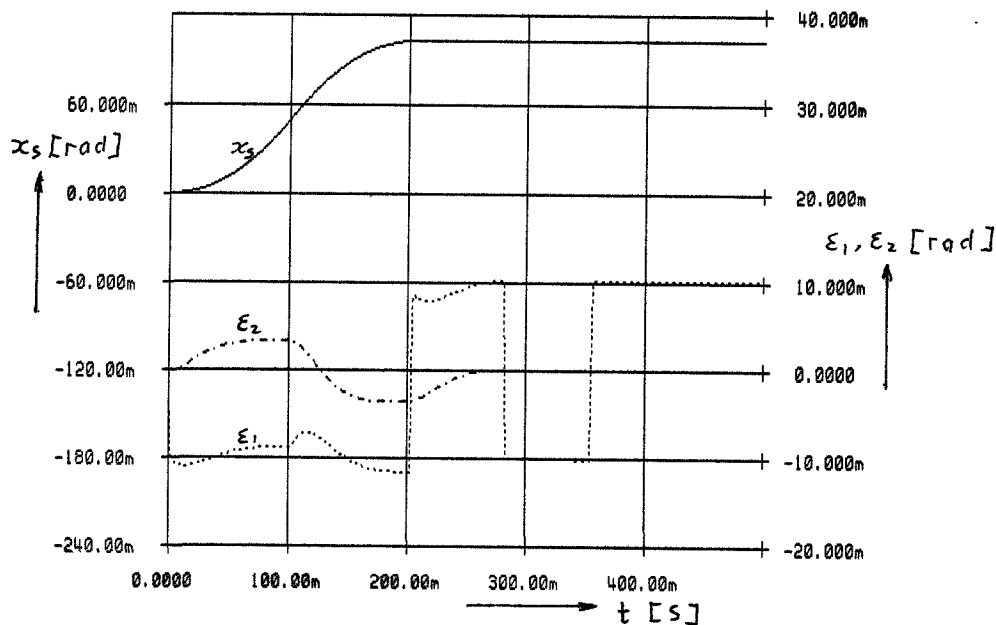
Om deze kracht te realiseren moeten de versnelling van de motormassa, de positie en snelheid van de last en de wrijvingskracht op de last bekend zijn.

Voor het meten van de wrijvingskracht wordt verwezen naar [2].



Figuur 8.5 Tijdresponsie van ϵ_1 , ϵ_2 en x_s met $F=6\epsilon_2+0.15\dot{\epsilon}_2+m_1\ddot{q}_1$

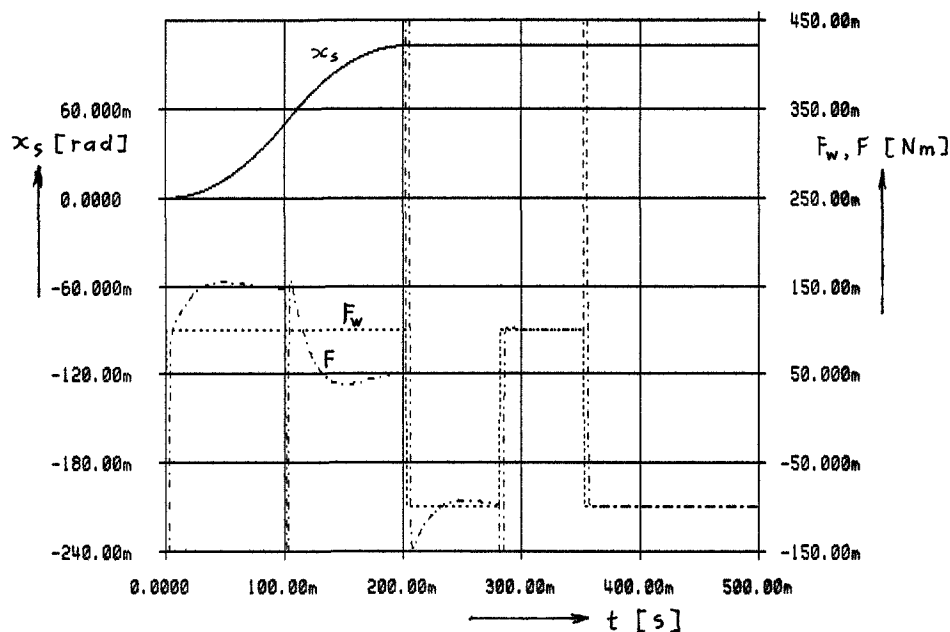
Simulatie van dit systeem laat zien dat de positie van de last snel de gewenste nauwkeurigheid bereikt (figuur 8.6). Deze komt namelijk overeen met het tweede orde wrijvingsloze systeem (ϵ_2 in figuur 8.5). Dit lijkt dus een goede regeling te zijn.



Figuur 8.6 Tijdresponsie van ϵ_1 , ϵ_2 en x_s met $F=6\epsilon_2+0.15\dot{\epsilon}_2+m_1\ddot{q}_1-F_w$ en $f_w=0.1$ Nm

Het verloop van de kracht die door de motor gegenereerd moet worden, vertoont bij iedere tekenwisseling van de lastsnelheid en iedere stap in de versnelling van het referentiesignaal, een behoorlijk grote piek (figuur 8.7). In de korte tijd Δt dat de last stilstaat, verandert de wrijvingskracht van teken.

De compensatiekracht F_{c_2} maakt dus in die korte tijd een sprong van $2 \cdot f_w$, ofwel de motormassa moet een positie-stap maken van $2 \cdot f_w/k$ (als de demping b wordt verwaarloosd). De benodigde versnellingskracht voor deze stap is groter naarmate het tijdsinterval Δt kleiner is. Er treedt bij benadering een stap in de plaats op, hetgeen de afgeleide van een impuls in de kracht betekent.



Figuur 8.7 Tijdresponsie van F_w , F en x_s met $F=6\epsilon_2+0.15\dot{\epsilon}_2-F_w+m_1\ddot{q}_1$ en $f_w=0.1$ Nm

Stel dat de motor de gevraagde pieken niet kan leveren, dan worden de pieken afgekapt; er treedt verzadiging op. Simulaties met een begrensde kracht (figuur b.2 en b.3) laten zien dat bij afkapping van de krachtpieken de regeling aanzienlijk onnauwkeuriger wordt. Bij forse verlaging wordt het systeem zelfs instabiel (figuur b.4 en b.5). Het optreden van grote pieken in de actuatoorkracht moet daarom zo mogelijk vermeden worden.

Er is door middel van simulaties eveneens gekeken naar de robuustheid van deze regeling. Er zijn tijdresponsies uitgevoerd met verkeerd geschatte wrijvingskracht. Indien de wrijving 10% te laag wordt geschat, ontstaat er een statische afwijking. Indien de schatting 10% te hoog is, ontstaat er een limit cycle met constante amplitude. Wanneer echter de motormassa te laag wordt geschat wordt het systeem instabiel. Te hoog geschatte massa veroorzaakt numerieke problemen voor het simulatiepakket PHILPAC. Deze regeling is dus allerminst robuust. De simulatieresultaten zijn te vinden in de figuren b.6 - b.8 in bijlage B3.

De instabiliteit ten gevolge van de verzadiging van de motor en de schattingsfout in de motormassa is mogelijk te verklaren door het feit dat door bovenstaande effecten de massatraagheid van de motoras niet exact gecompenseerd wordt. Hierdoor ontstaat er een vierde orde systeem met terugkoppeling over de lastpositie. Wanneer het een lineaire wrijvingsloze systeem betreft, moeten de regelparameters zorgvuldig gekozen worden om instabiliteit te voorkomen, zoals te zien is in paragraaf 3.3. De daar gekozen waarden voor de regelparameters zijn veel kleiner dan de hier gekozen waarden. Simulaties van een wrijvingsloos systeem met $Kp_2 = 6$ en $Kd_2 = 0.15$ met een motormassa van zowel 0.00025 kgm^2 als 0.0025 kgm^2 tonen inderdaad instabiliteit (figuren b.9 en b.10). Helaas kan de stabiliteit van het systeem met wrijving plus compensatie niet (eenvoudig) onderzocht worden.

De robuustheid van deze regeling laat duidelijk te wensen over. Bovendien zijn veel kleinere versnellings- en krachtpieken gewenst. Dit laatste kan verbeterd worden door demping aan te brengen. Door constructief de demping tussen beide massa's te vergroten, zal de versnelling van de motormassa afnemen. Hiervan zijn geen simulaties uitgevoerd. De demping kan ook regeltechnisch gerealiseerd worden door snelheids-terugkoppeling over de motoras. Het nadeel hiervan is dat hierdoor de traagheidscompensatie teniet wordt gedaan en de regeling onnauwkeurig wordt. Simulaties bij snelheidsterugkoppeling met $Kd_1 = 0.05$ (figuren b.11 - b.14) laten zien dat de krachtpieken veel kleiner geworden zijn en dat ook de robuustheid verbeterd is. Het systeem wordt namelijk niet meer instabiel bij een 10% te laag geschatte motormassa en bij te hoog geschatte wrijving neemt de amplitude van het alternerende positiefout af. De nauwkeurigheid van de regeling (bij juiste schatting van m_1 en F_w) voldoet helaas niet aan de gestelde eisen en is niet veel beter dan bij het lineaire concept in hoofdstuk 7.

Conclusies en aanbevelingen

In hoofdstuk 4 is het effect van wrijving op de last bekeken. Deze wrijving veroorzaakt bij het gebruik van een lineaire PD-regeling een statische afwijking. Als eerste is naar een lineaire oplossing voor dit probleem gezocht, namelijk door het opvoeren van de regelparameters. Hiervoor is gekozen omdat de statische afwijking afhankelijk blijkt te zijn van K_{p2} . Bovendien komt er dan slechts één niet-lineair component (de wrijving) in de gesloten regelkring voor, waardoor de beschrijvende functie theorie bruikbaar is. Met dit regelconcept wordt echter geen hoge nauwkeurigheid behaald. Het toepassen van een integrerende regelactie is achterwege gelaten wegens de vermeende trage werking hiervan. Vervolgens zijn diverse niet-lineaire regelconcepten geprobeerd. Het eerste daarvan bevat een discontinue compensatiekracht met amplitude gelijk aan de wrijvingskracht en teken tegengesteld aan het teken van de positie van de last. Toepassing van dit regelconcept veroorzaakt een limit cycle hetgeen onder andere veroorzaakt wordt door het feit dat de wrijvings- en compensatiekracht niet immer tegengesteld gericht zijn. Ook dit concept is dus niet nauwkeurig genoeg. Het volgende concept gebruikt een compensatiekracht die aangrijpt op de motoras en die exact gelijk, maar tegengesteld is aan de wrijvingskracht die op de last aangrijpt. Ook deze regeling blijkt onnauwkeurig te zijn. De oorzaak hiervan is de slapte van de overbrenging en de massatraagheid van de motoras. Hierdoor wordt de compensatiekracht niet onvervormd doorgeleid naar de last. In het laatste regelconcept wordt met deze slapte en traagheid rekening gehouden. Hierdoor ontstaat een snelle en nauwkeurige regeling, mits de motor de gevraagde krachtpieken kan leveren en de massa en de versnelling van de motoras en de wrijving nauwkeurig bekend zijn. Dit laatste is van belang omdat de regeling erg gevoelig is voor fouten in schattingen van de systeemp parameters. Enige verbetering in de robuustheid kan door een snelheidsterugkoppeling over de motoras bereikt worden, helaas ten koste van de nauwkeurigheid. Een mogelijkheid om de krachtpieken te verlagen is het vergroten van de damping tussen beide massa's, hetgeen niet door simulaties gestoeld is.

Bij de niet-lineaire regelconcepten kan de beschrijvende functie theorie niet eenvoudig worden toegepast. De stabiliteit is daarom alleen aan de hand van tijdresponsies onderzocht. Het is daarmee echter moeilijk te achterhalen in welke mate het systeem

stabiel is, hoe de stabiliteit verbeterd kan worden en welke factoren van belang zijn met betrekking tot de stabiliteit. Het is daarom aan te bevelen op zoek te gaan naar een methode of theorie waarmee de stabiliteit van een niet-lineair systeem onderzocht kan worden.

Bij een aantal regelconcepten ontstaat er een vrij kleine statische afwijking. In een lineair systeem kan de fout met een integrerende actie naar nul geregeld worden. Het dient aanbeveling te onderzoeken of dit ook mogelijk is bij een systeem met wrijving, eventueel in combinatie met de hier behandelde concepten.

Er is bij de simulaties steeds zuiver coulombse wrijving gemodelleerd. In werkelijkheid zal de wrijving snelheidsafhankelijk zijn. Er zal dus ook onderzoek gedaan moeten worden naar het modelleren van deze wrijving en de gevolgen hiervan op het gedrag van het systeem.

Literatuur

- [1] Swaanen, G.J.M., Burg, R.A.J. van der, Vierde Orde Electromechanische Servo Systemen, CFT Note 038/88NE.
- [2] Vonder, M.R., Adaptieve niet lineaire wrijvingscompensatie, stageverslag, Eindhoven, 1991.
- [3] Gelb, A., Vander Velde, W., Multiple input describing functions and non linear system design, McGraw Hill, New York, 1968.
- [4] Koster, M.P., Dynamisch gedrag van constructies en mechanismen, collegendictaat 4627, Eindhoven, 1985.

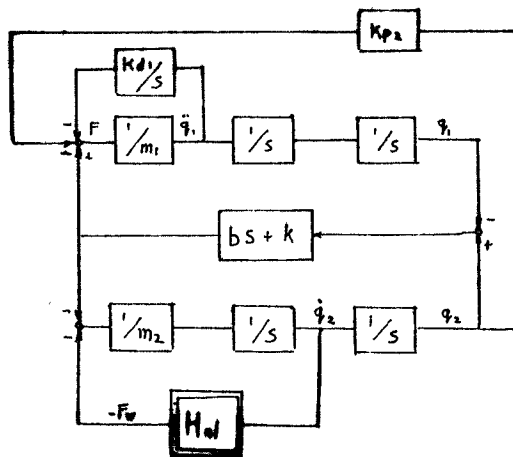
Bijlagen

B1. Bepaling van de lineaire overdracht tussen wrijvingskracht en lastsnelheid

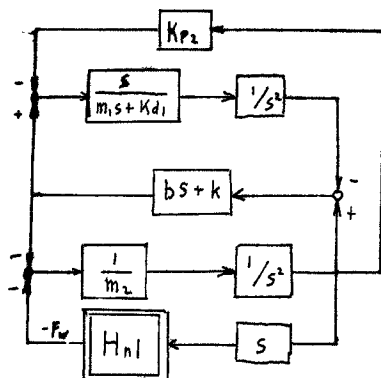
De overdracht kan op de volgende twee manieren bepaald worden:

1. Reductie van het blokdiagram:

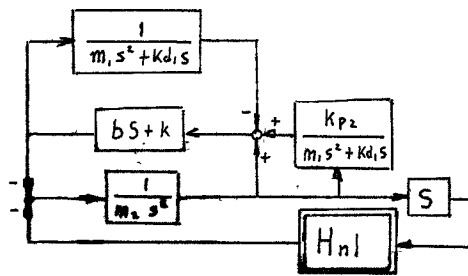
Het geregelde systeem kan als volgt in een blokschema weergegeven worden, waarbij de ingang van het systeem weggelaten is:



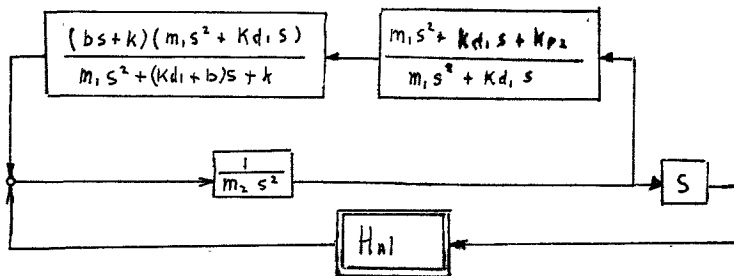
Door herschrijven van de snelheidsterugkoppeling over de motoras en samenvoegen van de integratoren volgt:



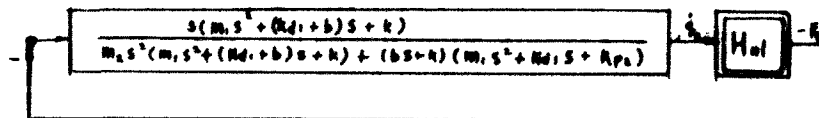
De tegenkoppeling over de lastpositie verplaatsen naar het volgende optelpunt levert:



Herschrijving van de tegenkoppeling en samenvoeging van twee parallelle blokken levert:



Herschrijving van de tegenkoppeling leidt tot het blokschema in de gewenste vorm:



2. Laplacetransformatie van de bewegingsvergelijkingen:

De bewegingsvergelijkingen van het systeem zijn:

$$m_1 \ddot{q}_1 + b \dot{q}_1 + k q_1 = b \dot{q}_2 + k q_2 + F_s$$

$$m_2 \ddot{q}_2 + b \dot{q}_2 + k q_2 = b \dot{q}_1 + k q_1 + F_w$$

Substitutie van $F_s = -Kd_1 \dot{q}_1 - Kp_2(x_s - q_2)$ en Laplace-transformatie levert:

$$(m_1 s^2 + (b + Kd_1)s + k)q_1 = (bs + (k - Kp_2))q_2$$

$$(m_2 s^2 + bs + k)q_2 = (bs + k)q_1 + F_w$$

Eliminatie van q_1 levert:

$$\frac{q_2}{F_w} = \frac{m_1 s^2 + (Kd_1 + b)s + k}{(m_2 s^2 + bs + k)(m_1 s^2 + (Kd_1 + b)s + k) - (bs + k)(bs + k - Kp_2)}$$

Differentiatie levert het gezochte lineaire deel van de overdracht:

$$\frac{\dot{q}_2}{F_w} = \frac{m_1 s^3 + (Kd_1 + b)s^2 + ks}{m_2 m_1 s^4 + (m_2(b + Kd_1) + b m_1)s^3 + (m_2 k + b Kd_1 + k m_1)s^2 + (k Kd_1 + b Kp_2)s + k Kp_2}$$

B2. Identificatie van de proefopstelling

De proefopstelling die ontworpen is voor het beproeven van regelconcepten voor systemen met wrijving bestaat uit een luchtgelagerde electromotor en een ronde schijf die als last beschouwd kan worden. De ronde schijf is via een dun asje rechtstreeks verbonden met de motoras. De overbrengingsverhouding is dus 1. De massa van de motoras is, ten bate van het eerder uitgevoerde onderzoek naar regelconcepten voor tweede orde systemen, met een ronde schijf verzwaard. Hierdoor zijn beide massa's van vergelijkbare grootte. De last is met wentellagers gelagerd. Op beide schijven kan met instelbare veerkracht een kunststof pen gedrukt worden zodat wrijving ontstaat.

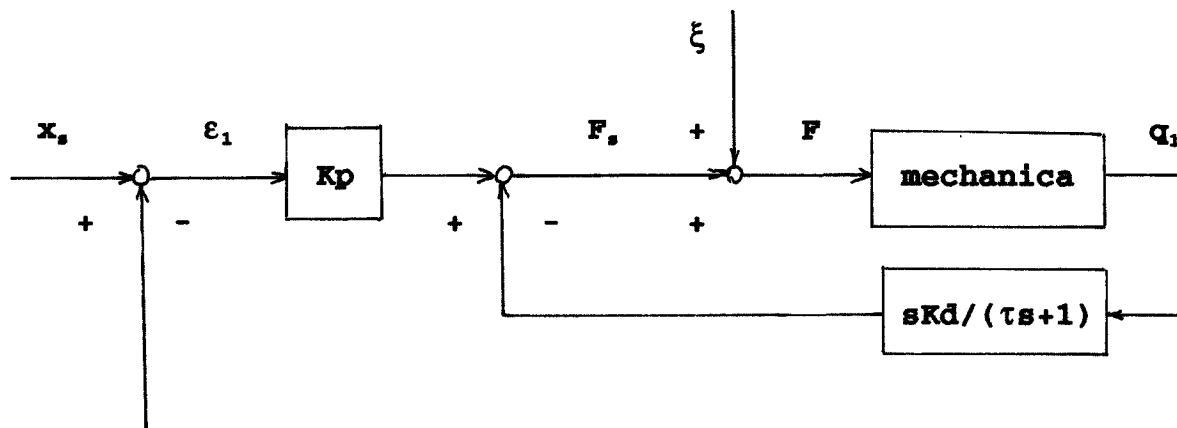
Van de motor kan een tacho-sigitaal afgetapt worden en twee encoders maken meting van de posities van beide schijven mogelijk. Kracht opnemers kunnen de zijwaartse kracht op de kunststof pennen meten. Hieruit kan het wrijvingskoppel berekend worden.

Het systeem kan bestuurd worden met behulp van dSPACE. Dit pakket bestaat onder andere uit een besturingskaart, die in een PC gestoken kan worden, en het softwarepakket IMPEX waarmee een regelaar geïmplementeerd kan worden. Met dit pakket is het mogelijk een met Matlab berekende continue regelaar op eenvoudige wijze om te zetten in een discrete regelaar. Deze wordt vervolgens, samen met informatie over de in- en uitgangen van het besturingssysteem, in een C-programma geschreven. Dit programma wordt uitgevoerd zodra dSPACE gestart wordt.

Voor de beschrijving van het systeem wordt het model genomen dat in hoofdstuk 2 staat beschreven. De demping die het systeem ondervindt in de lageringen wordt verwaarloosd. De dempingscoëfficiënt b bestaat hier uit materiaaldemping die optreedt in het dunne asje dat de twee schijven met elkaar verbindt. De te schatten systeemp parameters zijn dus de massatraagheid van de verzwaarde motoras m_1 , de massatraagheid van de last m_2 , de lineaire stijfheid k van het asje en de dempingscoëfficiënt b ten gevolge van de materiaaldemping in het asje.

Als eerste zal m_1 geschat worden. Hiertoe wordt het asje losgekoppeld van de motoras. Van een tweede orde mechanisch systeem is bekend dat de eigenfrequentie afhankelijk

is van de massa en de stijfheid van het systeem. Door nu met een regelaar een stijfheid te creëren en vervolgens de overdracht in het frequentiedomein te meten kan daarmee de massatraagheid van de motoras bepaald worden. Hierbij wordt gebruik gemaakt van het volgende blokschema:



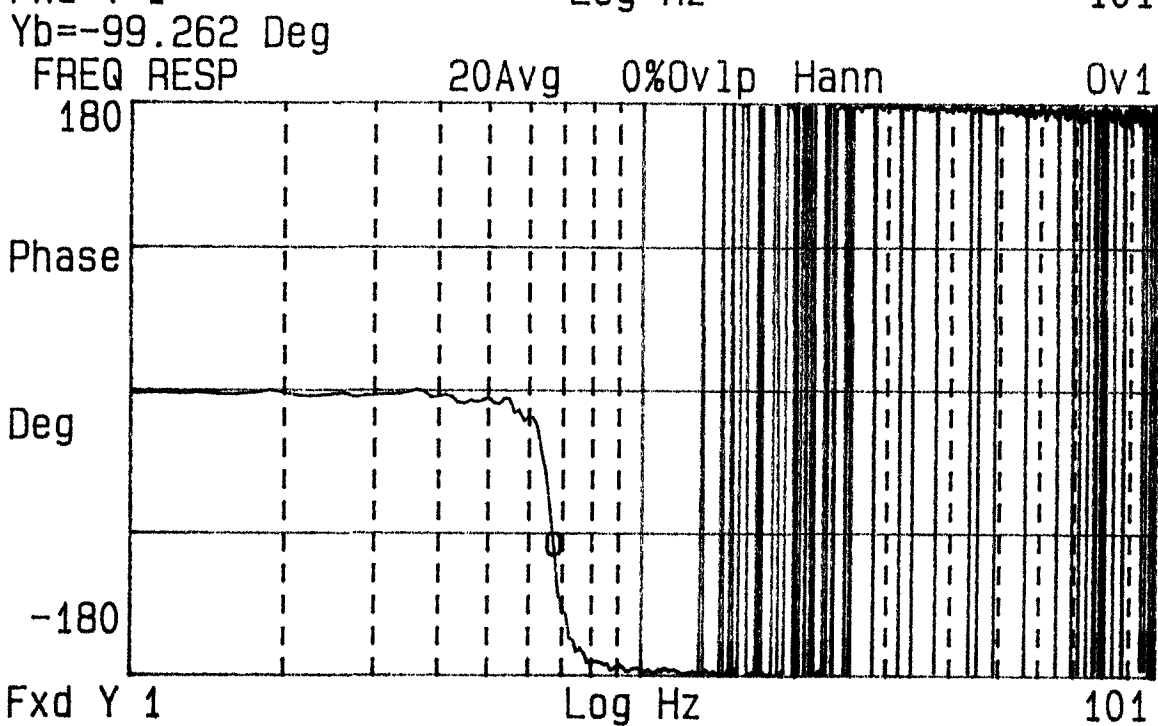
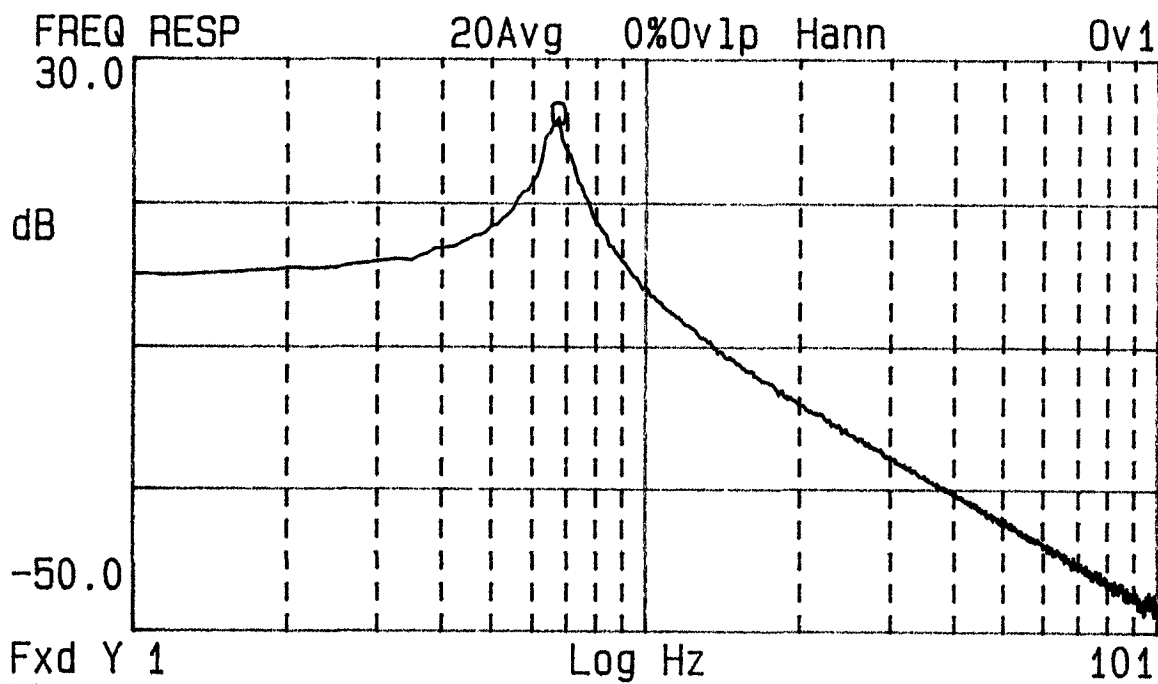
De tijdconstante τ bepaalt de frequentie waarbij de D-actie weer over gaat in een P-actie. Deze restrictie wordt ingevoerd om de invloed van hoogfrequente verstoringen te beperken. Uit bovenstaand diagram kan de overdracht van referentiesignaal x_s naar de hoekverdraaiing van de motoras q_1 bepaald worden:

$$\frac{q_1}{x_s} = \frac{Kp}{m_1 s^2 + Kds + Kp}$$

τ wordt gemakshalve gelijk aan nul gesteld. Voor de proportionele regelparameter wordt de waarde $Kp=4.93$ gekozen en voor de differentiële regelparameter de waarde $Kd=0.0063$. Als referentiesignaal x_s wordt een ruissignaal genomen. Dit ruissignaal wordt samen met de gemeten hoekverdraaiing van de motoras aan de HP 3562A Dynamic Signal Analyzer aangeboden. Deze berekent hieruit de overdracht in het frequentiedomein. Uit deze grafiek (zie volgende pagina) blijkt opslinging op te treden bij $f_o = 6.7$ Hz. Hieruit volgt het massatraagheidsmoment m_1 :

$$m_1 = Kp / (2\pi f_o)^2 = 2.8 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

X=6.75 Hz
Ya=22.1059 dB



Gemeten bodediagrammen van de overdracht van x_s naar q_1 .

Ter bepaling van de andere massatraagheid wordt het asje weer aan beide schijven gekoppeld. Uit de bewegingsvergelijkingen kan dan de volgende overdracht in het s -domein berekend worden:

$$\frac{q_1}{F} = \frac{m_2 s^2 + bs + k}{(m_2 s^2 + bs + k)(m_1 s^2 + bs + k) - (bs + k)(bs + k)}$$

Hieruit kunnen de resonantie en anti-resonantie piek eenvoudig bepaald worden indien eerst de (kleine) dempingscoëfficiënt gelijk aan nul wordt gesteld:

$$\frac{q_1}{F} = \frac{m_2 s^2 + k}{(m_2 s^2 + k)(m_1 s^2 + k) - k^2} = \frac{m_2 s^2 + k}{(m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)k) s^2}$$

De resonantiepiek treedt op bij het nulpunt ($f \neq 0$ Hz) van de noemer:

$$f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$$

De antiresonantiepiek treedt op bij het nulpunt van de teller:

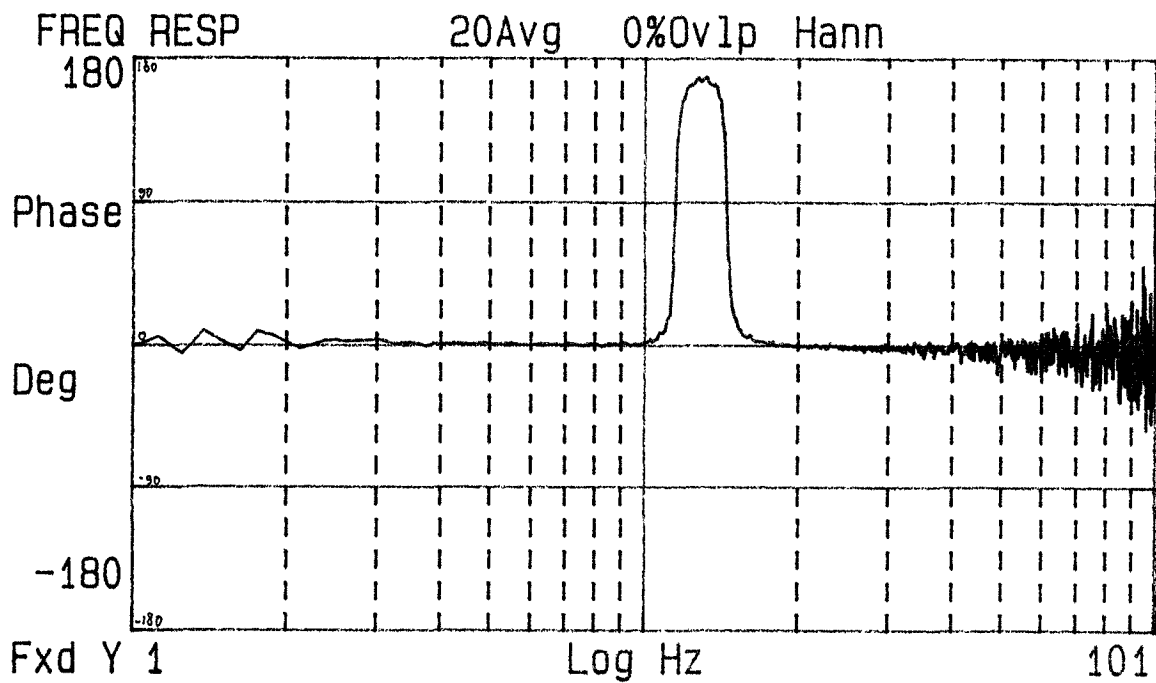
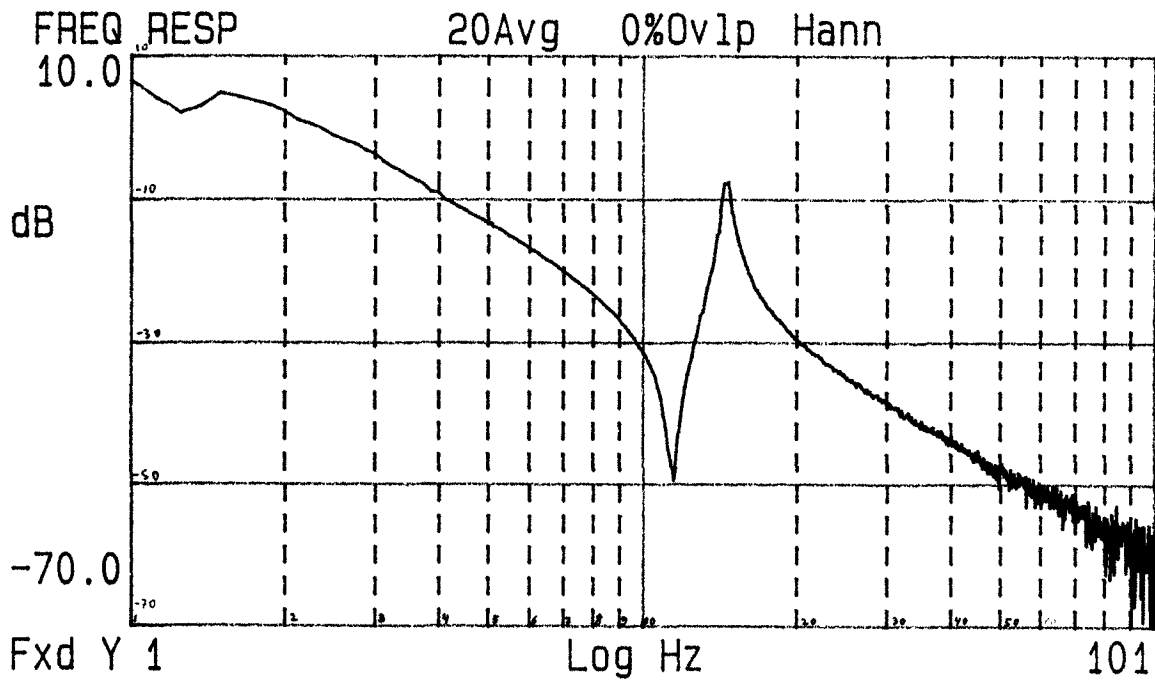
$$f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

Voor het meten van de bovenstaande overdracht wordt een ruissignaal ξ opgeteld bij de uitgang van de regelaar. Dit signaal wordt samen met de gemeten hoekverdraaiing van de motoras aangeboden aan de analyzer. Deze berekent hieruit de bodediagrammen (volgende pagina), waaruit is af te lezen: $f_o=14.9$ Hz en $f_a=11.5$ Hz.

Substitutie van deze waarden in de twee bovenstaande uitdrukkingen levert na enig rekenwerk:

$$k = 9.9 \quad \text{Nm/rad}$$

$$m_2 = 1.9 \cdot 10^{-3} \quad \text{kgm}^2$$



Gemeten bodediagrammen van de overdracht van F naar q_1 .

De overdracht van de servokracht naar de hoekverdraaiing van de motoras is:

$$\frac{q_1}{F} = \frac{-m_2\omega^2 + ib\omega + k}{m_1m_2\omega^4 - ib(m_1+m_2)\omega^3 - k(m_1+m_2)\omega^2}$$

De overdracht bij de antiresonantiepiek ofwel bij $\omega_a = \sqrt{k/m_2}$ kan gevonden worden door de ω 's in bovenstaande vergelijking door ω_a te vervangen:

$$\frac{q_1}{F} = \frac{ib\omega}{\frac{m_1k^2}{m_2} - ib(m_1+m_2)^2\sqrt{(k/m_2)^3} - \frac{(m_1+m_2)}{m_2}k^2}$$

De versterkingsamplitude bij deze frequentie kan uit de gemeten overdracht opgemeten worden. Deze blijkt $A(\omega_a) \approx 0.003$ [rad/Nm]. Wanneer de imaginaire term in de noemer van bovenstaande overdracht verwaarloosd wordt, kan vervolgens de dempingsconstante berekend worden:

$$b = A(\omega_a) k^2 \sqrt{\frac{m_2}{k}} = 0.004$$

De imaginaire term is bij deze waarde van b inderdaad verwaarloosbaar. De bepaling van de versterking bij de antiresonantie piek is onnauwkeurig doordat de overdrachtsfunctie voor discrete frequenties wordt berekend. Hierdoor kan het minimum tussen twee berekende frequenties in liggen. Bovendien kunnen door het steile verloop van de overdracht relatief grote fouten in de meting optreden. Een andere methode om b te bepalen zou dus wenselijk zijn.

In de berekening van de systeemp parameters is helaas een fout geslopen. Tussen het door de regelaar berekende koppel en het op de motoras uitgeoefende koppel zitten twee versterkingsfactoren, namelijk de versterkingsfactor van de versterker $k_a = 2.4$ [A/V] en die van de motor $k_m = 0.315$ [Nm/A]. Deze zijn bij de berekening van de massa traagheid van de motoras niet in rekening gebracht. Wanneer deze wel worden meegenomen, resulteert dit in de volgende schattingen:

$$m_1 = 0.0021 \text{ kgm}^2$$

$$m_2 = 0.0014 \text{ kgm}^2$$

$$k = 7.5 \text{ Nm/rad}$$

$$b = 0.002 \text{ Nms/rad}$$

Omdat deze fout pas in een laat stadium van de stage ontdekt is, zijn deze waarden niet gebruikt in de simulaties. De fout heeft echter geen nadelige consequenties. De fout heeft namelijk geen invloed op de conclusies die op grond van de simulaties getrokken zijn. Bovendien kunnen de berekende regelparameter toch gebruikt worden, mits geen compensatie plaatsvindt voor de twee versterkingsfactoren.

De matlab-file die gebruikt is bij de identificatie:

```
% frequency range

fr = logspace(0,2,300); % 1 Hz < fr < 100 Hz
w = 2*pi*fr;

% controller parameters

m = 1/200; % estimated mass
bw = 2; % bandwidth [Hz]
be = 0.04; % relative damping

tau= 1/50/2/pi; % bandwidth D-action
kp = m*(2*pi*bw)^2
kd = 2*m*(2*pi*bw)

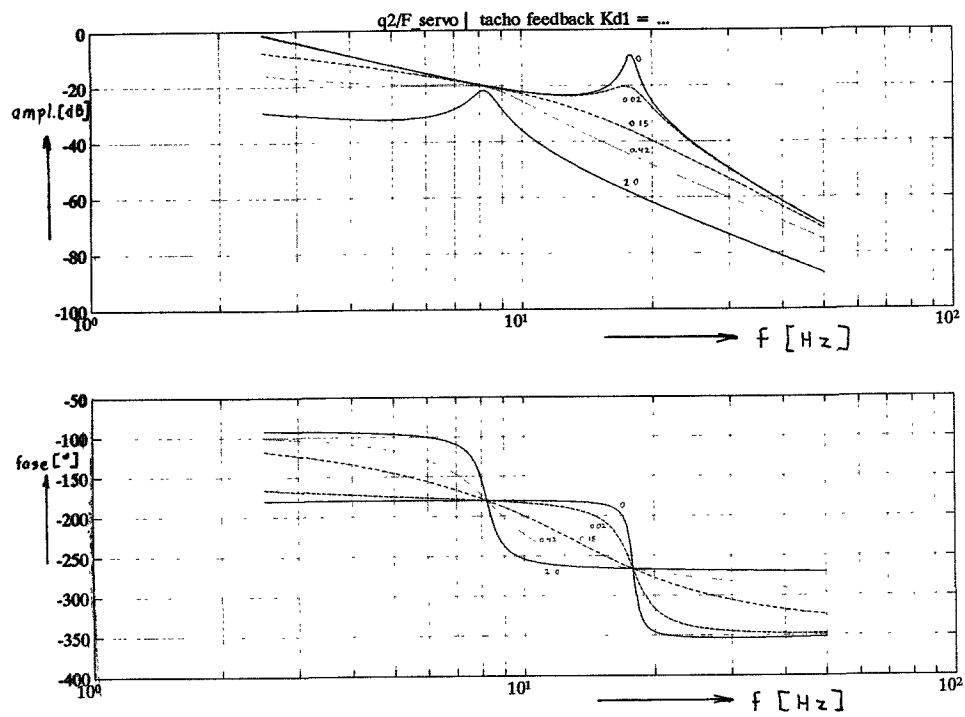
kp/kd/2/pi

AR = [-1/tau];
BR = [0 1 0];
CR = [kd/tau/tau ; 0 ; kd/tau/tau ; 0];
DR = [kp (-kp-kd/tau) 1
      1 -1 0
      kp (-kp-kd/tau) 0
      0 1 0 ];

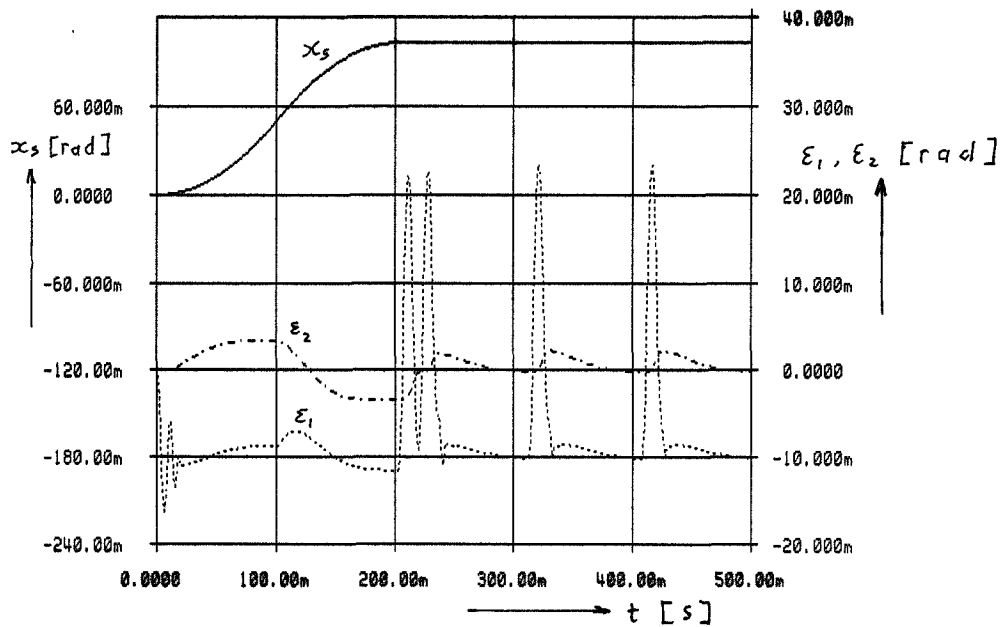
% controle van gekozen parameters

[mr,pr] = bode(AR,BR,CR,DR,2,w);
clg
subplot(211);
semilogx(fr,20*log10([mr]),'w');grid;...
title(' PD-controller ')
semilogx(fr,[pr],'w');grid
```

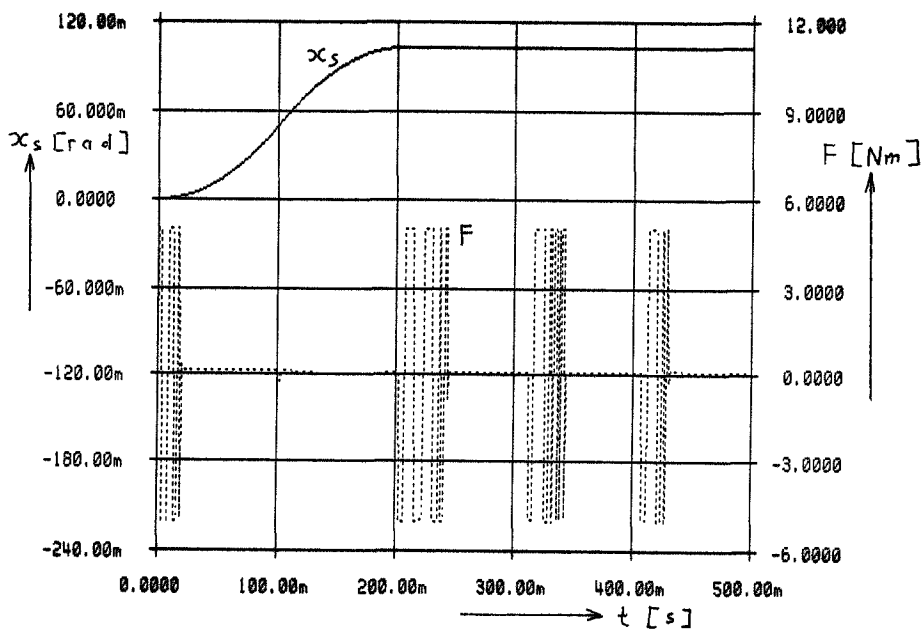
B3. Figuren



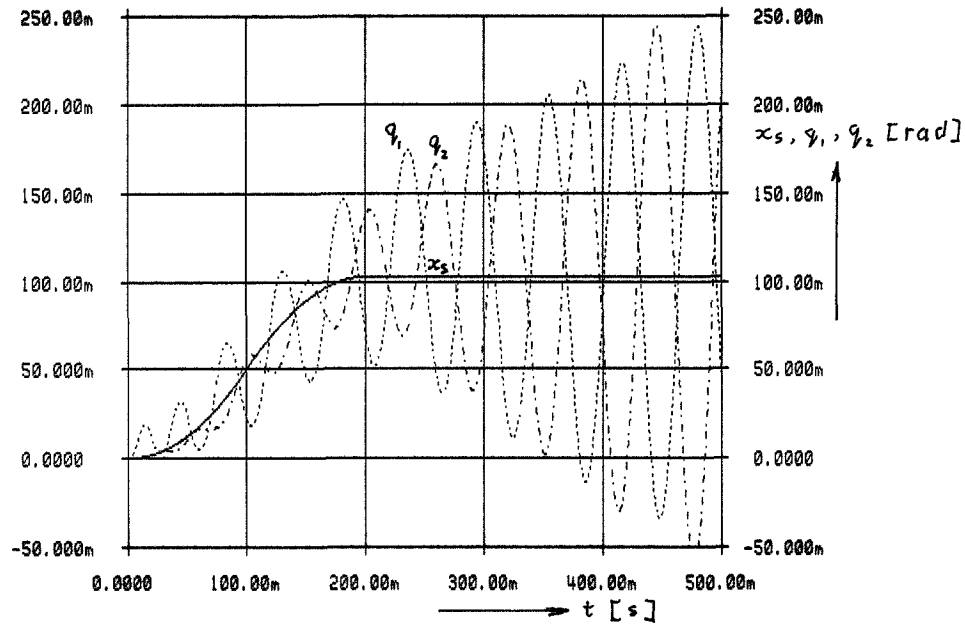
Figuur b.1 Bodediagram van q_2/F_{s2} met snelheidsterugkoppeling met $m_1=0.001 \text{ kgm}^2$ en $m_2=0.0037 \text{ kgm}^2$



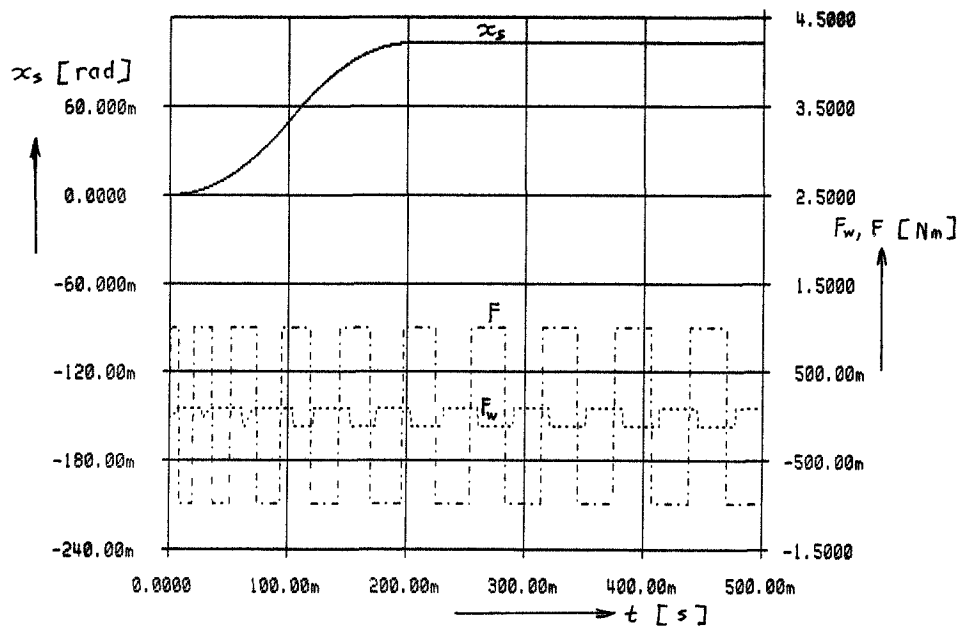
Figuur b.2 Tijdresponsie van ϵ_1, ϵ_2 en x_s met $F = \text{sat}(5 \text{ Nm} / 6\epsilon_2 + 0.15\dot{\epsilon}_2 - F_w + m_1\ddot{q}_1)$ en $f_w = 0.1 \text{ Nm}$



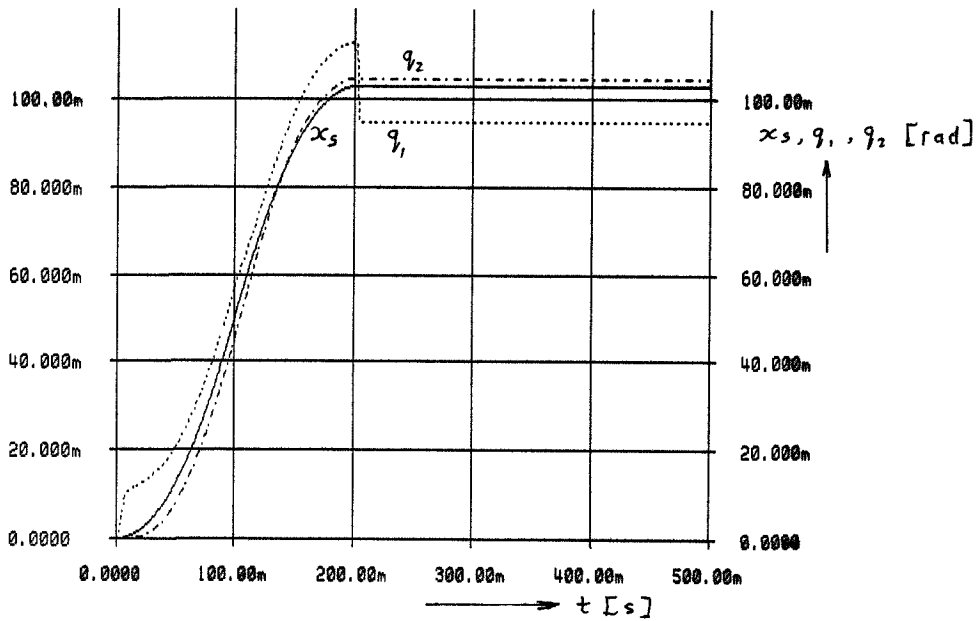
Figuur b.3 Tijdresponsie van F_w, F en x_s met $F = \text{sat}(5 \text{ Nm} / 6\epsilon_2 + 0.15\dot{\epsilon}_2 - F_w + m_1\ddot{q}_1)$ en $f_w = 0.1 \text{ Nm}$



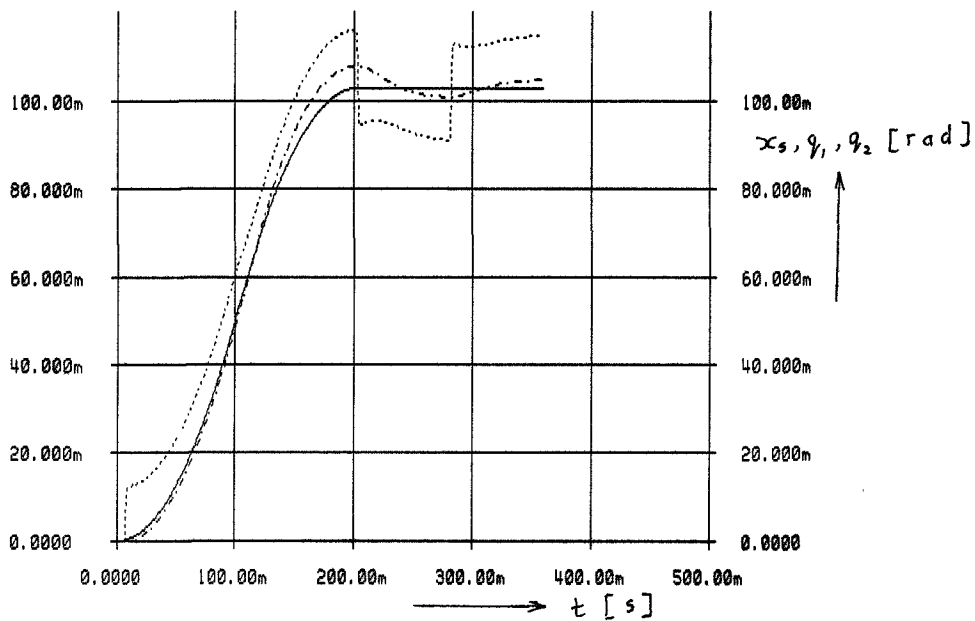
Figuur b.4 Tijdresponsie van q_1 , q_2 en x_s met $F = \text{sat}(1 \text{ Nm} / 6\epsilon_2 + 0.15\dot{\epsilon}_2 - F_w + m_1\ddot{q}_1)$ en $f_w = 0.1 \text{ Nm}$



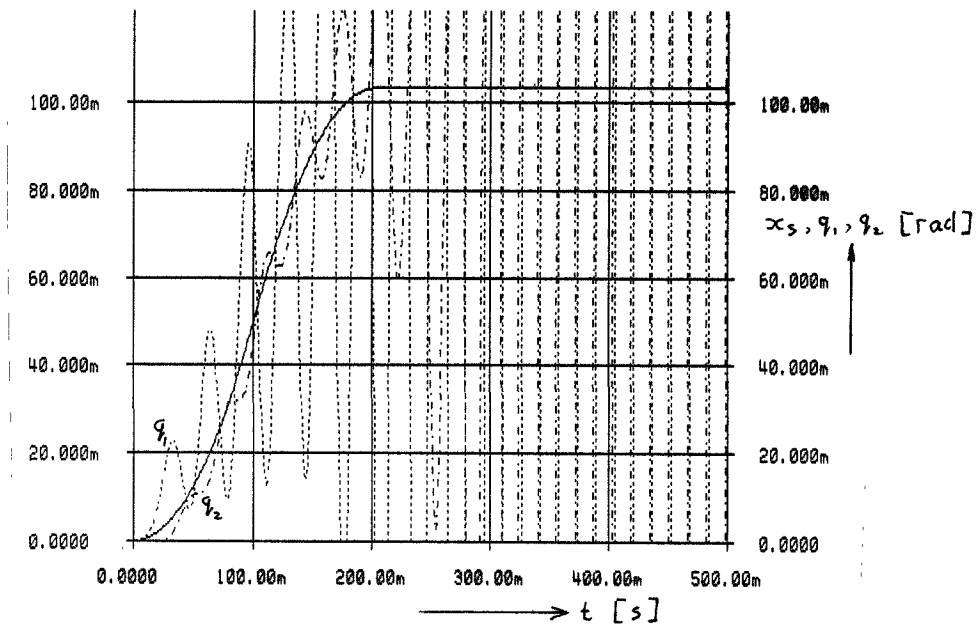
Figuur b.5 Tijdresponsie van F_w , F en x_s met $F = \text{sat}(1 \text{ Nm} / 6\epsilon_2 + 0.15\dot{\epsilon}_2 - F_w + m_1\ddot{q}_1)$ en $f_w = 0.1 \text{ Nm}$



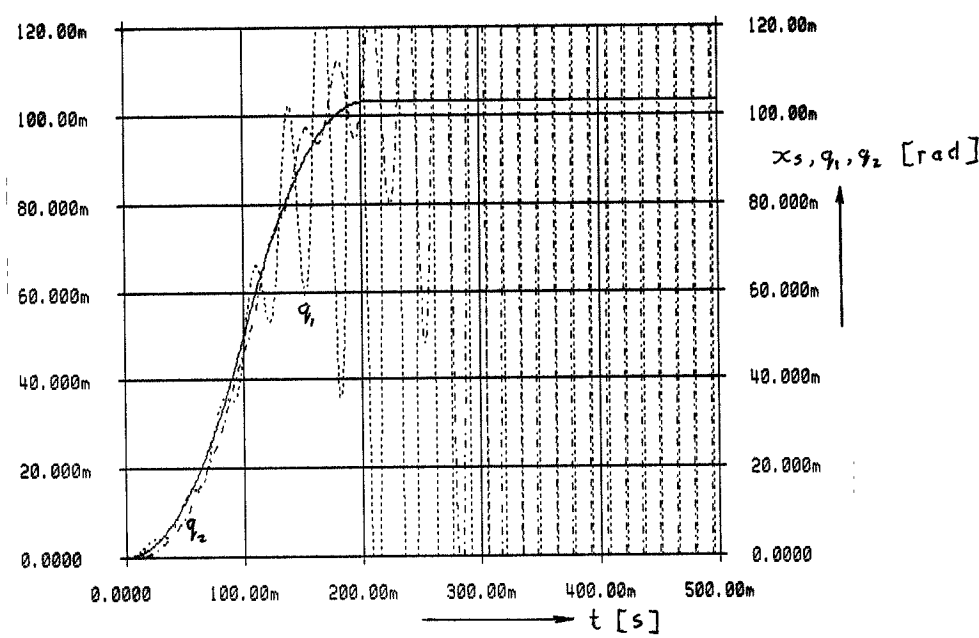
Figuur b.6 Tijdsresponsie van q_1 , q_2 en x_s met $F=6\epsilon_2+0.15\dot{\epsilon}_2-0.9F_w+m_1\dot{q}_1$ en $f_w=0.1$ Nm



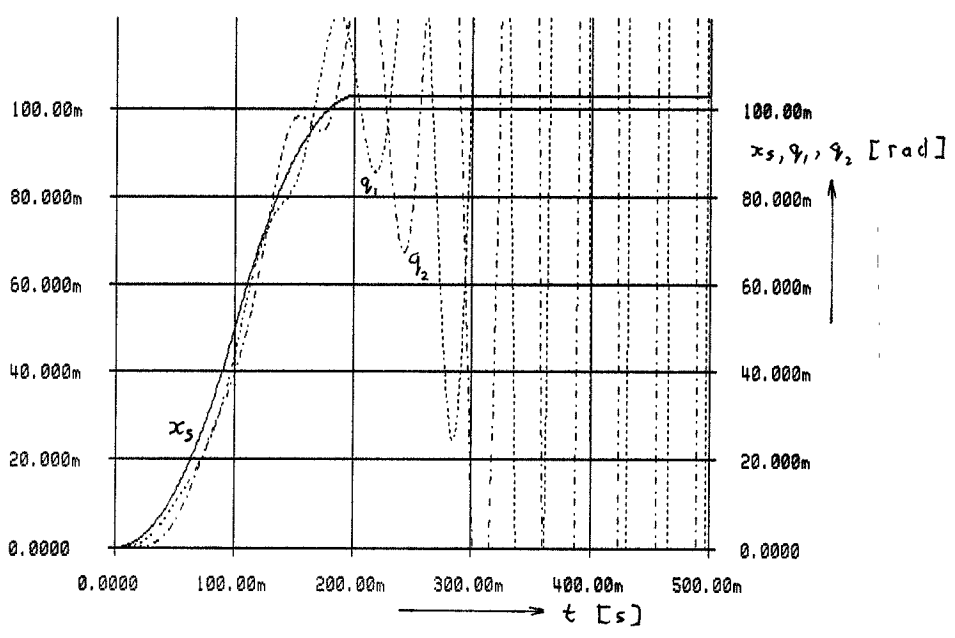
Figuur b.7 Tijdsresponsie van q_1 , q_2 en x_s met $F=6\epsilon_2+0.15\dot{\epsilon}_2-1.1F_w+m_1\dot{q}_1$ en $f_w=0.1$ Nm



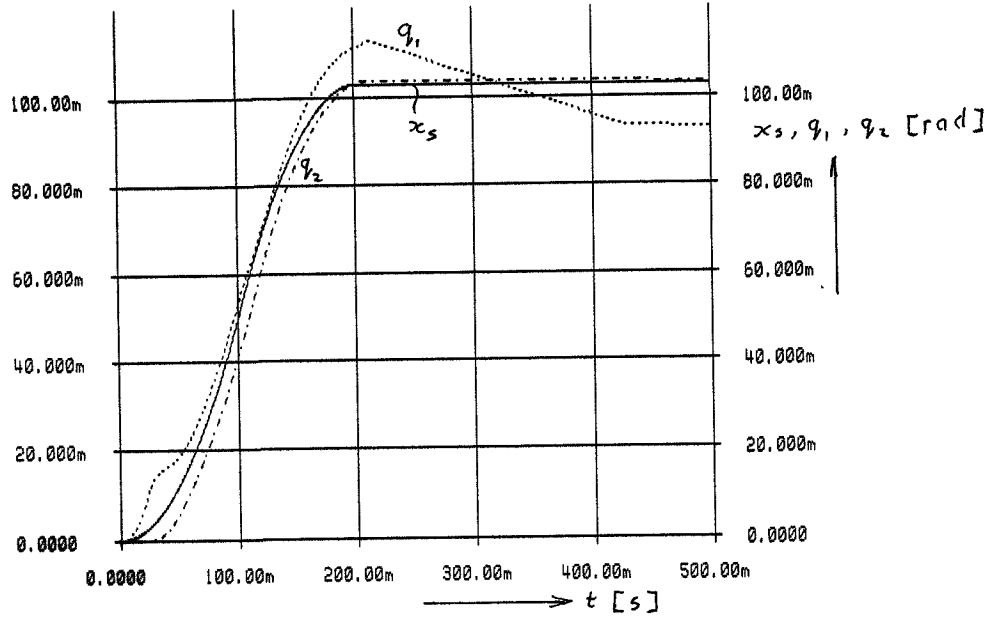
Figuur b.8 Tijdresponsie van q_1 , q_2 en x_s met $F=6\epsilon_2+0.15\dot{\epsilon}_2-F_w+0.9m_1\ddot{q}_1$ en $f_w=0.1$ Nm



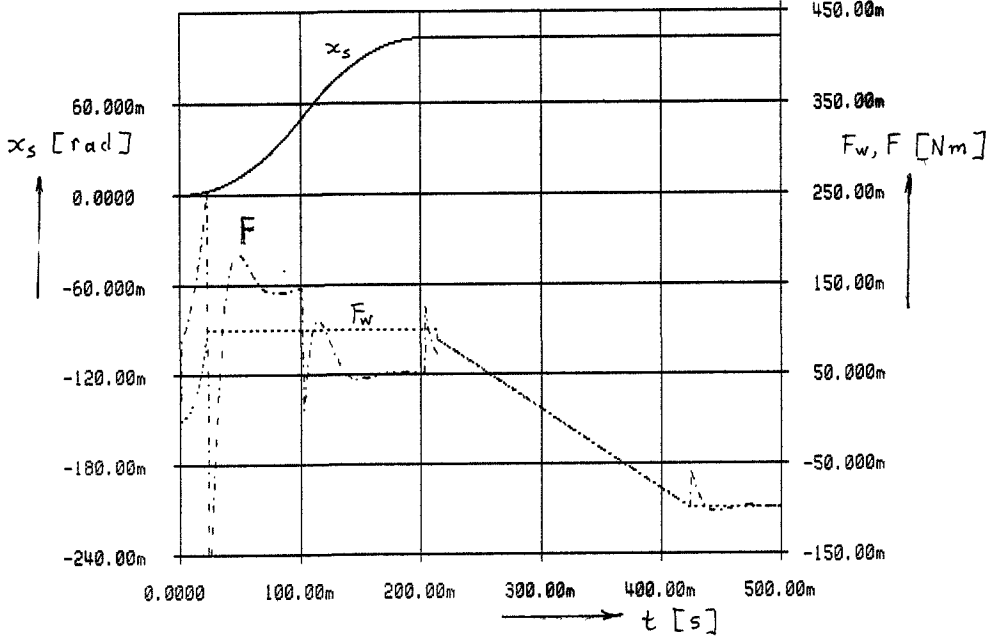
Figuur b.9 Tijdresponsie van q_1 , q_2 en x_s met $F=6\epsilon_2+0.15\dot{\epsilon}_2$ en $m_1=0.00025 \text{ kgm}^2$



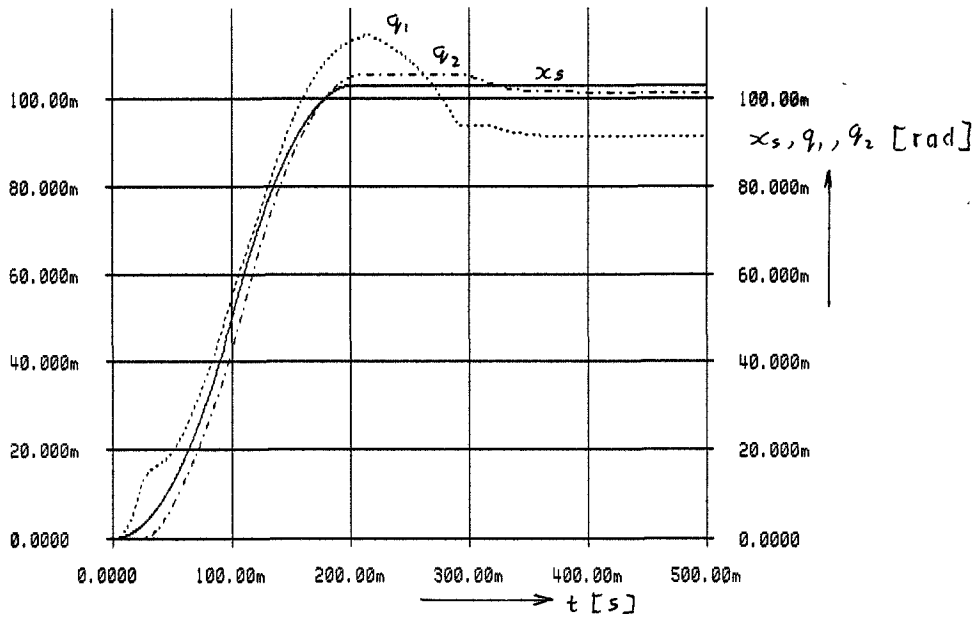
Figuur b.10 Tijdresponsie van q_1 , q_2 en x_s met $F=6\epsilon_2+0.15\dot{\epsilon}_2$ en $m_1=0.0025 \text{ kgm}^2$



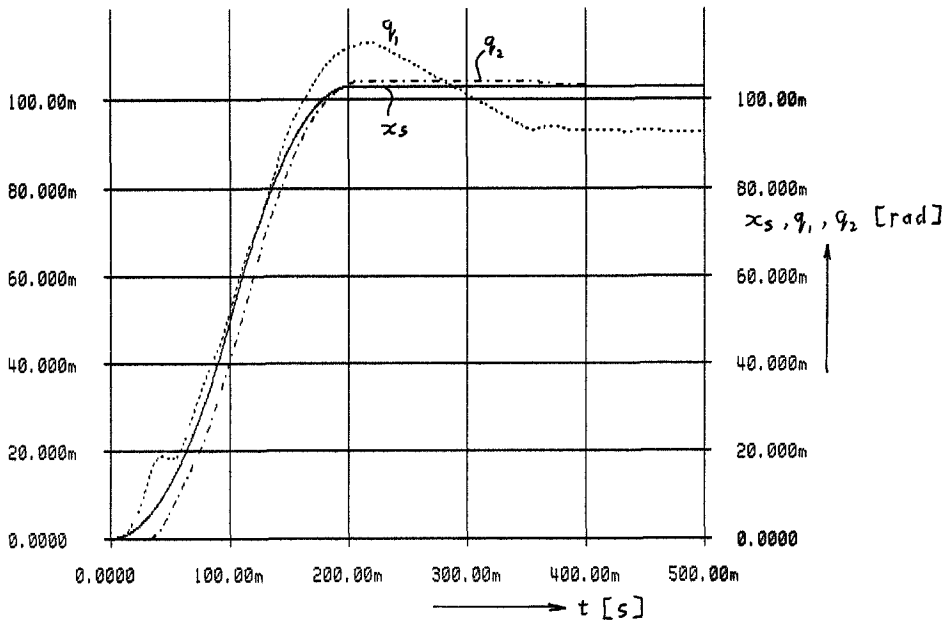
Figuur b.11 Tijdresponsie van q_1 , q_2 en x_s met $F=6\epsilon_2+0.15\dot{\epsilon}_2-0.05\dot{q}_1-F_w+m_1\ddot{q}_1$ en $f_w=0.1$ Nm



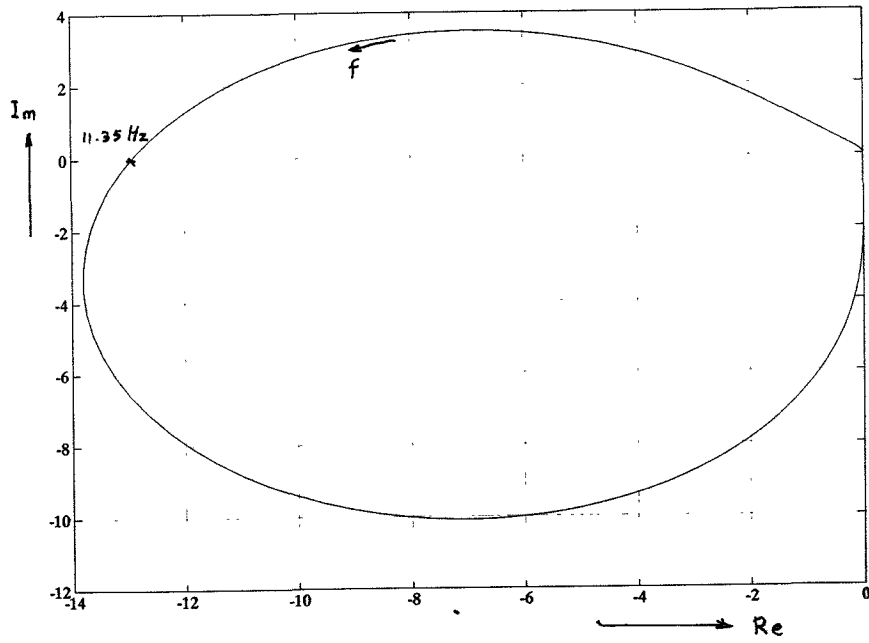
Figuur b.12 Tijdresponsie van F_w , F en x_s met $F=6\epsilon_2+0.15\dot{\epsilon}_2-0.05\dot{q}_1-F_w+m_1\ddot{q}_1$ en $f_w=0.1$ Nm



Figuur b.13 Tijdresponsie van q_1 , q_2 en x_s met $F=6\epsilon_2+0.15\dot{\epsilon}_2-0.05\dot{q}_1-1.1F_w+m_1\ddot{q}_1$ en $f_w=0.1$ Nm



Figuur b.14 Tijdresponsie van q_1 , q_2 en x_s met $F=6\epsilon_2+0.15\dot{\epsilon}_2-0.05\dot{q}_1-F_w+0.9m_1\ddot{q}_1$ en $f_w=0.1$ Nm



Figuur b.15 Polair diagram van \dot{q}_2/F_w met $F_s=52\varepsilon_2-1\dot{q}_1$