De mathematische beschrijving van een black-box

25-3-1969

th e

University of Technology Eindhoven
Netherlands

Department of Industrial Engineering

DE MATHEMATISCHE BESCHRIJVING VAN EEN BLACK-BOX

ir. A.C.J. de Leeuw

groep organisatieleer

rapport no. 10

groep organisatieleer
afd. bedrijfskunde i.o.
Technische Hogeschool Eindhoven

De mathematische beschrijving van een black-box.

ir. A.C.J. de Leeuw.

25-3-1969
AdL/MvG

De mathematische beschrijving van een black-box.

1. Inleiding.

In [1] is aannemelijk gemaakt dat het koncept van de "black-box" bij de bestudering van systemen een belangrijke plaats inneemt.
Een black-box is een systeem S.

$$S = \langle \{\omega_o\},\ E, \mathcal{Q}_{ES} \rangle$$

In dit rapportje zullen we trachten een zo algemeen mogelijke beschrijving van een black-box te geven.
Wij zullen aan de hand van deze beschrijving een onderscheid maken tussen deterministische- en stochastische black-boxes.
Daarnaast wordt het begrip "geheugen" geformuleerd.
Ook daar waar dat niet expliciet is vermeld, beschouwen we uitsluitend black-boxes.

2. Input en output.

Uit de formele karakterisering van een black-box

$$S = \langle \{\omega_o\},\ E, \mathcal{Q}_{ES} \rangle$$

blijkt reeds dat een black-box een open systeem is. Wij wensen nu nader in te gaan op de verzameling van relaties $\mathcal{Q}_{ES}$.
Daartoe onderscheiden we twee typen relaties. In [2] is het relatiebegrip nader uitgewerkt.
Wij definieerden daar:
De implicatieve relatie $R\{X_1 \nleftarrow\!\!\rightarrow X_2\}$
De coimplicatieve relatie $R\{X_1 \leftrightarrow X_2\}$
We kunnen de eigenschappen als volgt vastleggen:

- $R\{\omega_i;\omega_o\} \in \mathcal{Q}_{ES}\ ;\ \omega_i \in E$
- $\forall R\{\omega_i;\omega_o\}\ (R\{\omega_i;\omega_o\} \in \mathcal{Q}_{ES} \Rightarrow R\{\omega_i \nleftarrow\!\!\rightarrow \omega_o\}\ \vee\ R\{\omega_i \leftarrow\!\!\nrightarrow \omega_o\}\ \vee\ R\{\omega_i \leftrightarrow \omega_o\}$
- $R\{\omega_i \leftarrow\!\!\nrightarrow \omega_o\} \Rightarrow \neg\ R\{\omega_i \nleftarrow\!\!\rightarrow \omega_o\} \wedge \neg \mathcal{Q}\{\omega_i \leftrightarrow \omega_o\}$
- $R\{\omega_i \nleftarrow\!\!\rightarrow \omega_o\} \Rightarrow \neg\ \mathcal{Q}\{\omega_i \leftarrow\!\!\nrightarrow \omega_o\} \wedge \neg\ R\{\omega_i \leftrightarrow \omega_o\}$
- $\forall R\{\omega_i;\ \omega_o\}\ (R\{\omega_i;\ \omega_o\} \in \mathcal{Q}_{ES} \wedge \neg\ R\{\omega_i \nleftarrow\!\!\rightarrow \omega_o\} \wedge \neg R\{\omega_i \leftarrow\!\!\nrightarrow \omega_o\}$
  $\Rightarrow R\{\omega_i \leftrightarrow \omega_o\}\ )$

Met behulp van deze eigenschappen zijn de volgende verzamelingen gedefinieeerd:

- $I^* = \{R\{\omega_i;\omega_o\} \mid R\{\omega_i;\omega_o\} \in \mathcal{Q}_{ES} \wedge R\{\omega_i \nleftarrow\!\!\rightarrow \omega_o\}\}$
- $O^* = \{R\{\omega_i;\omega_o\} \mid R\{\omega_i;\omega_o\} \in \mathcal{Q}_{ES} \wedge R\{\omega_i \leftarrow\!\!\nrightarrow \omega_o\}\}$
- $IO^* = \{R\{\omega_i;\omega_o\} \mid R\{\omega_i;\omega_o\} \in \mathcal{Q}_{ES} \wedge R\{\omega_i \leftrightarrow \omega_o\}\}$

Het is evident dat:

- I^*, O^* en IO^* disjunct zijn
- $I^* \cup O^* \cup IO^* = \mathcal{Q}_{ES}$

We onderscheiden twee gevallen:

- $IO^* = \emptyset$

  Definitie.

  De inputverzameling $I = I^*$.

  De elementen van I noemen we inputs (ook wel: ingangen, ingangssignalen, ingangsgrootheden, stimulus).

  De outputverzameling $O = O^*$.

  De elementen van O noemen we outputs (ook wel: uitgangen, uitgangssignalen, uitgangsgrootheden, responsie).

- $IO^* \neq \emptyset$

  In dit geval verdelen we IO^* op een wijze, aangepast aan de specifieke probleemstelling in twee disjuncte deelverzamelingen IO^*_I en IO^*_o (1).

  Definitie.

  $I = I^* \cup IO^*_I$

  $O = O^* \cup IO^*_o$

  Waarin de benaming van I en O gelijk is aan die bij het eerste geval.

  Samenvattend kunnen we nu stellen dat voor elke black-box

  $S = < \{\omega_o\}, E, \mathcal{A}_{ES}\}$

  de verzameling $\mathcal{A}_{ES}$ "uiteenvalt" in twee disjunkte verzamelingen.

  En wel:

  De inputverzameling I.

  De outputverzameling O.

3. De relatie tussen input en output.

Op grond van het voorgaande kunnen we thans een black-box ook als volgt karakteriseren.

$S = <\{\omega_o\}, E, I, O>$

De relaties $R\{\omega_i \leftrightarrow \omega_o\}$ en $R\{\omega_i \not\leftrightarrow \omega_o\}$ zijn in [2] afgeleid uit het relatiebegrip $R\{X_1 \rightarrow X_2\}$, waarin X_1 en X_2 attributenverzamelingen voorstellen.

Wij wensen de black-box in termen van dit niet afgeleide relatiebegrip te beschrijven.

(1) Indien wij met behulp van een bepaalde $R\{\omega_i \leftrightarrow \omega_o\}$ het systeem willen beinvloeden, stellen we $R\{\omega_i \leftrightarrow \omega_o\} \in IO^*_I$, indien dit niet het geval is, stellen we $R\{\omega_i \leftrightarrow \omega_o\} \in IO^*_o$

Daartoe definieren we:

$$E_I = \{\omega_i \mid \omega_i \in E \wedge R\{\omega_i ; \omega_o\} \in I\}$$

$$E_o = \{\omega_i \mid \omega_i \in E \wedge R\{\omega_i ; \omega_o\} \in O\}$$

En vervolgens:

$X = \bigcup_{\omega_i \in E_I} X_{\omega_i}$ waarin X_{ω_i} de attributenverzameling behorende bij het objekt ω_i voorstelt.

$$Y = \bigcup_{\omega_i \in E_o} X_{\omega_i}$$

Nu geldt:

- $R\{X \not\leftrightarrow X_{\omega_o}\}$
- $R\{Y \not\leftrightarrow X_{\omega_o}\}$

Aangezien de interne struktuur van de black-box niet bekend is, kan de black-box uitsluitend worden bestudeerd aan de hand van de relaties $R\{X \not\leftrightarrow Y\}$.

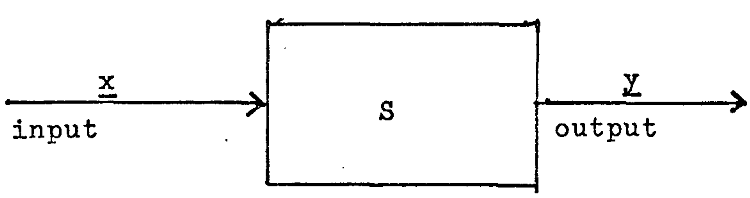
Hoewel wij inputs en outputs gedefinieerd hebben als elementen van verzamelingen van relaties zullen wij de termen input en output gebruiken om te refereren aan X respectievelijk Y.

Konform de theoretische beschouwingen in [2] stellen we voorts:

- $D(x_i)$ is de verzameling van waarden die x_i kan aannemen. $(x_i \in X)$.
- $D(y_i)$ is de verzameling van waarden die y kan aannemen $(y_i \in Y)$
- T_x is de vektorruimte opgespannen door de elementen van X.
- T_y is de vektorruimte opgespannen door de elementen van Y.
- $\underline{x} \in T_x$ ($\underline{x}$ is dus een vektor).
- $\underline{y} \in T_y$ ($\underline{y}$ is dus een vektor).

Ook hier zullen we, ietwat slordig, voor $\underline{x}$ en $\underline{y}$ de termen input respectievelijk output gebruiken.

Het resultaat van de beschouwingen is geschetst in figuur 1.



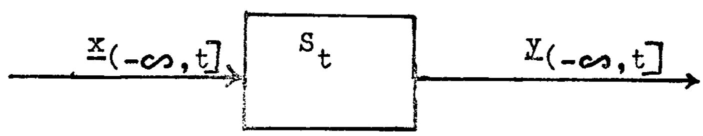
figuur 1.

Wij willen thans het dynamische gedrag beschrijven. De vektoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ op tijdstip t_o duiden we aan met $\underline{x}(t_o)$ en $\underline{y}(t_o)$. Gedurende het interval $T = (-\infty, t]$ kunnen $\underline{x}(t_o)$ en $\underline{y}(t_o)$ banen $\underline{x}_{(-\infty,t]}$ en $\underline{y}_{(-\infty,t]}$ doorlopen. We houden de beschouwingen voor een kontinu interval T. Zij gaan evenwel ook op voor een reeks van diskrete tijdstippen. Men vervangt daartoe $T = (-\infty, t]$ door een passende verzameling. Ten overvloede merken we op dat T een geordende verzameling is.

De meest algemene beschrijving van een black-box kan worden geformuleerd in de vorm van een binaire-relatie f_t.

$$f_t \subset D(\underline{x}_{(-\infty,t]}) \times D(\underline{y}_{(-\infty,t]})$$

waarin f_t overal gedefinieerd is. (Dit is geen wezenlijke beperking, aangezien hieraan door een geschikte keuze van $D(\underline{x}_{(-\infty,t]})$ steeds kan worden voldaan.



figuur 2.

4. Enige eigenschappen.

In paragraaf 3 hebben we een algemene beschrijving gegeven van het gedrag van een black-box in de vorm van de binaire relatie f_t.

$$f_t \subset D(\underline{x}_{(-\infty,t]}) \times D(\underline{y}_{(-\infty,t]})$$

Veelal maakt men onder meer onderscheid tussen deterministische en stochastische systemen(1), systemen met- en zonder geheugen. In de volgende paragrafen definieren wij enkele van deze begrippen.

Het is evident dat uitspraken over de black-box uitsluitend kunnen worden gedaan door middel van uitspraken over f_t. Daarom definieren we de betreffende eigenschappen als eigenschappen van f_t.

4.1 Stochastische - versus deterministische systemen.

Voor de definiëring van de begrippen stochastisch en deterministisch gaan we uit van f_t.

(1) In het navolgende zullen wij stilzwijgend het begrip systeem hanteren zonder steeds op te merken dat het een black-box is.

Definitie:

Zij S_t een systeem beschreven door f_t

$f_t \subset D(\underline{x}_{(-\infty,t]}) \times D(\underline{y}_{(-\infty,t]})$

waarin f_t overal gedefinieerd is.

f_t is een afbeelding $\Longleftrightarrow$ S_t is een deterministisch systeem

$\neg f_t$ is een afbeelding $\Longleftrightarrow$ S_t is een stochastisch systeem.

Een deterministisch systeem kan derhalve worden gekarakteriseerd als:

$f_t : D(\underline{x}_{(-\infty,t]}) \rightarrow D(\underline{y}_{(-\infty,t]})$

Voor een stochastisch systeem evenwel is dit niet mogelijk aangezien in het algemeen de verzameling $f_t(\underline{x}_{(-\infty,t]})$ meerdere elementen heeft. In dat geval kan het systeem, in principe, worden beschreven met behulp van een simultane kansverdeling $p_{ft}(\underline{x}_{(-\infty,t]}, \underline{y}_{(-\infty,t]})$.

Het is goed te bedenken dat het hier een diskrete verdeling betreft aangezien $\underline{x}_{(-\infty,t]}$ en $\underline{y}_{(-\infty,t]}$ geen kontinue variabelen zijn maar elementen van een verzameling.

4.2 Het begrip geheugen.

Allereerst willen wij het begrip geheugen definieren voor deterministische systemen.

Zij $S = \langle \{\omega_0\}, E, I, O \rangle$ een deterministisch systeem in het interval $(-\infty,t]$ beschreven door:

$f_t : D(\underline{x}_{(-\infty,t]}) \rightarrow D(\underline{y}_{(-\infty,t]})$.

Definieer vervolgens:

$f_{t_0,t} \subset D(\underline{x}_{[t_0,t]}) \times D(\underline{y}_{[t_0,t]})$

met $t_0 < t$

Definitie.

$\exists\, t_0 (t_0 \in (-\infty,t) \Rightarrow \neg f_{t_0,t}$ is een afbeelding)

$\Rightarrow$ S heeft een geheugen.

De lengte van het geheugen zou men intuitief kunnen omschrijven als dat "deel" van het verleden wat nog van invloed is op het gedrag van het heden. Voor deterministische systemen, waar wij allereerst over spreken, laat zich uit f_t de afbeelding g_t afleiden.

$$g_t : D(\underline{x}_{(-\infty,t]}) \rightarrow D(\underline{y}(t))$$

Naar analogie van $f_{t_o,t}$ kunnen we de binaire relatie $g_{t_o,t}$ definieren.

$$g_{t_o,t} \subset D(\underline{x}_{[t_o,t]}) \times D(\underline{y}(t))$$

<u>Definitie</u>:
De lengte van het geheugen is gedefinieerd als $t - t^*$ waarbij voor t^* geldt:

- $t^* \in (-\infty,t)$
- $\forall t_1 \forall t_2 (t_1 \in (-\infty,t) \wedge t_2 \in (-\infty,t) \wedge t_1 > t^* \wedge t_2 \leq t^*$
  $\Rightarrow g_{t_2,t}$ is een afbeelding $\wedge \neg\, g_{t_1,t}$ is een afbeelding)

Voor stochastische systemen willen we het begrip geheugen op ekwivalente wijze vastleggen.

Zoals in paragraaf 4.1 is gesteld is een stochastisch systeem een systeem $S = \langle \{\omega_o\}, E, I, O \rangle$ wat wordt beschreven door de binaire relatie f_t die geen afbeelding is.
Men kan een stochastisch systeem beschrijven met behulp van de kansverdeling $p_{ft}(\underline{x}_{(-\infty,t]}, \underline{y}_{(-\infty,t]})$. Uit deze kansverdeling leiden we de kansverdeling $p_{g_t}(\underline{x}_{(-\infty,t]}, \underline{y}^*(t))$ af.

Daartoe definieren we:

$$\Omega_{\underline{y}^*(t)} = \left\{ \underline{y}_{(-\infty,t]} \;\middle|\; \underline{y}_{(-\infty,t]} \in D(\underline{y}_{(-\infty,t]}) \wedge \underline{y}(t) = \underline{y}^*(t) \right\}$$

De gezochte kansverdeling is nu:

$$p_{g_t}(\underline{x}_{(-\infty,t]}, y^*(t)) = \sum_{\underline{y}_{(-\infty,t]} \in \Omega_{\underline{y}^*(t)}} p_{f_t}(\underline{x}_{(-\infty,t]}, \underline{y}_{(-\infty,t]})$$

Voor de eenvoud van notatie laten we het sterretje weg en gaan in het vervolg uit van een stochastisch systeem beschreven door de kansverdeling $p_{g_t}(\underline{x}_{(-\infty,t]}\,,\ \underline{y}(t))$.

Vervolgens definieren we de kansverdeling

$p_{g_{t_o,t}}(\underline{x}_{[t_o,t]}\,,\ \underline{y}(t))$.

Hieruit zijn de volgende konditionele kansverdelingen af te leiden.

$p_{g_{t_o,t}}(\underline{y}(t) \mid \underline{x}_{[t_o,t]})$

$p_{g_{t,t}}(\underline{y}(t) \mid \underline{x}(t))$

Definitie.

Een stochastisch systeem heeft een geheugen indien

$$\forall t_o\ (t_o \in (-\infty,t) \Rightarrow p_{g_{t_o,t}}(\underline{y}(t) \mid \underline{x}_{[t_o,t]}) \neq p_{g_{t,t}}(\underline{y}(t) \mid \underline{x}(t))$$

De lengte van het geheugen kan nu als volgt worden gedefinieerd.

Definitie.

De lengte van het geheugen van een stochastisch systeem is gedefinieerd als $t - t^*$

waarbij voor t^* geldt:

- $t^* \in (-\infty,t)$
- $\forall t_1 \forall t_2 (t_1 \in (-\infty,t) \wedge t_2 \in (-\infty,t) \wedge t_1 > t^* \wedge t_2 \leq t^*$

$$\Rightarrow p_{g_{t_2,t}}(\underline{y}(t) \mid \underline{x}_{[t_2,t]}) = p_{g_{t^*,t}}(\underline{y}(t) \mid \underline{x}_{[t^*,t]})$$

$$p_{g_{t_1,t}}(\underline{y}(t) \mid \underline{x}_{[t_1,t]}) \neq p_{g_{t^*,t}}(\underline{y}(t) \mid \underline{x}_{[t^*,t]}))$$

Samenvattend kunnen we stellen:

Deterministische systemen zijn systemen die kunnen worden beschreven met de afbeelding g_t.

$g_t : D(\underline{x}_{(-\infty,t]}) \rightarrow D(\underline{y}(t))$

De lengte van het geheugen is $t - t^*$.

Hierin is t^* zodanig dat

$g_{t^*,t} \subset D(\underline{x}_{[t^*,t]}) \times D(\underline{y}(t))$ "nog juist" een afbeelding is.

Stochastische systemen zijn systemen die kunnen worden beschreven met de binaire relatie g_t en de kansverdeling p_{g_t}

$g_t \subset D(\underline{x}_{(-\infty,t]}) \times D(\underline{y}(t))$

$p_{g_t}(\underline{x}_{(-\infty,t]}\ ,\ \underline{y}(t))$

De lengte van het geheugen is $t - t^*$ waarin t^* zó dat informatie over de baan $\underline{x}_{(-\infty,t^*)}$ "nog juist niet relevant is".

4.3 Toestandsbepaalde systemen.

We zullen het begrip toestand (state) allereerst invoeren voor deterministische systemen. Daarbij gaan we uit van een deterministisch systeem S met geheugen.

$f_t : D(\underline{x}_{(-\infty,t]}) \rightarrow D(\underline{y}_{(-\infty,t]})$

$f_{t_o,t} \subset D(\underline{x}_{[t_o,t]}) \times D(\underline{y}_{[t_o,t]})$

Hierbij veronderstellen we t_o zódanig dat $f_{t_o,t}$ geen afbeelding is.

Het zal, op grond van paragraaf 4.2 duidelijk zijn dat hieruit volgt dat de lengte van het geheugen van S groter is dat $t - t_o$.

Een globale definitie van het begrip toestand is de volgende. De toestand van systeem S is die vektor $\underline{s}(t_o)$ welke de informatie bevat uit het verleden die relevant is voor de bepaling van de output. Dit moet nu nauwkeuriger worden geformuleerd.

Definitie.

Zij S een deterministisch systeem met geheugen waarvoor geldt:

$f_t : D(\underline{x}_{(-\infty,t]}) \rightarrow D(\underline{y}_{(-\infty,t]})$

$f_{t_o,t} \subset D(\underline{x}_{[t_o,t]}) \times D(\underline{y}_{[t_o,t]})$

waarin $f_{t_o,t}$ geen afbeelding is.

Voorts:

$A = D(\underline{s}(t_o)) \times D(\underline{x}_{[t_o,t]})$.

Indien $\mathcal{f}^*_{t_o,t} \subset A \times D(\underline{y}_{[t_o,t]})$ een afbeelding is heet

$\underline{s}(t_o)$ de toestand (state) van S op tijdstip t_o.

Men noemt $D(\underline{s}(t_o))$ wel de toestandsruimte.

Niet in alle gevallen kan zo'n $\underline{s}(t_o)$ worden gevonden. We zullen systemen waarvoor zo'n $\underline{s}(t_o)$ op ieder moment in het beschouwde tijdsinterval te vinden is, een toestandsbepaald systeem noemen.

Men kan zich voorstellen dat, op analoge wijze, het begrip toestand kan worden gedefinieerd voor stochastische systemen. We doen dat niet maar maken slechts de opmerking dat men in dat geval te doen krijgt met konditionele kansverdelingen van de vorm

$$p_{f_t}(\underline{y}\,[t_o,t] \mid \underline{x}\,[t_o,t]\ ,\ \underline{s}(t_o))$$

Hierin bevat $\underline{s}(t_o)$ allerelevante informatie omtrent $\underline{x}(-\infty,t_o)$

Er is een nauwe samenhang tussen de koncepten geheugen en toestand. Dit zullen we in de volgende paragraaf aanduiden.

4.4 De samenhang tussen de koncepten geheugen en toestand.

Wij willen de samenhang tussen de begrippen geheugen en toestand analyseren. Dit doen wij voor een deterministisch systeem met een geheugen van eindige lengte (t-t*).
Dit impliceert dat het systeem kan worden beschreven met behulp van de afbeelding $g_{t^*,t}$

$$g_{t^*,t} : D(\underline{x}\,[t^*,t]) \longrightarrow D(\underline{y}(t))$$

Aangezien de lengte van het geheugen t-t* is, geldt voor elke $t_o > t^*$ dat $g_{t_o,t}$ geen afbeelding is.

$$g_{t_o,t} \subset D(\underline{x}\,[t_o,t]) \times D(\underline{y}(t))$$

Indien het systeem toestandsbepaald is geldt:

$$\mathcal{J}^*_{t_o,t} : D(\underline{s}(t_o)) \times D(\underline{x}\,[t_o,t]) \longrightarrow D(\underline{y}(t))$$

waarin $\underline{s}(t_o)$ de toestand (of toestandsvektor) op t_o voorstelt.

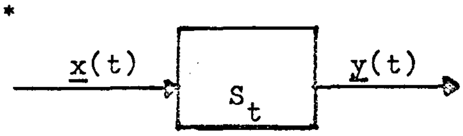
De toestand $\underline{s}(t_o)$ bevat kennelijk de informatie over het interval $[t^*,t_o]$.

Een formeel bewijs hiervan zullen we niet geven; we hebben er ook niet expliciet naar gezocht.

5. Voorbeelden.

Eenlineaire differentiaalvergelijking.

Zij S een deterministisch systeem met een geheugen ter lengte t-t*



Uit paragraaf 4.2 weten we dat S_t beschreven kan worden door:

$g_{t^*,t} : D(\underline{x}_{[t^*,t]}) \times D(\underline{y}(t))$

En voor $t_o > t^*$ (1)

$\mathcal{S}^*_{t_o,t} : D(\underline{s}(t_o)) \times D(\underline{x}_{(t_o,t]}) \rightarrow D(\underline{y}(t))$

We gaan na in hoeverre een en ander in overeenstemming is met een systeem S_t wat wordt beschreven door de onderstaande lineaire differentiaalvergelijking.

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

$$\int_{y(t_o)}^{y(t)} dy = \int_{t_o}^{t} x(t)dt$$

$$y(t) = y(t_o) + \int_{t_o}^{t} x(t)dt$$

Nu:

$g_{t_o,t} \subset D(x_{[t_o,t]}) \times D(y(t))$

Het is evident dat $g_{t_o,t}$ geen afbeelding is vanwege de beginvoorwaarde $y(t_o)$. Bij elke $x_{[t_o,t]}$ behoren meerdere elementen uit $D(y(t)$.

Definieren we nu $\mathcal{S}^*_{t_o,t}$ als volgt:

$\mathcal{S}^*_{t_o,t} : D(y(t_o)) \times D(x_{[t_o,t]}) \rightarrow D(y(t))$

$\mathcal{S}^*_{t_o,t}$ is een afbeelding omdat inderdaad bij ieder paar $< y(t_o), x_{[t_o,t]} >$ een en niet meer dan een element $y(t) \in D(y(t))$ behoort. Kennelijk is $y(t_o)$ hier de toestand $\underline{s}(t_o)$ op tijdstip t_o.

Op grond van het voorgaande kunnen we nu het systeem S_t op drie ekwivalente manieren beschrijven.

- $\frac{dy}{dt} = x$
- $y(t) = y(o) + \int_o^t x\, dt$
- $\mathcal{S}^*_{t_o,t} : D(y(t_o)) \times D(x_{[t_o,t]}) \rightarrow D(y(t))$

(1) Zie par. 4.3.

waarin

$$\mathcal{S}^*_{t_o,t} = \{ <y(t_o),\ x_{[t_o,t]},\ y(t)> \mid y(t_o) \in D(y(t_o)) \wedge x_{[t_o,t]} \in D(x_{[t_o,t]}) \wedge y(t) \in D(y(t)) \wedge P(y(t),\ y(o),\ x_{[t_o,t]}) \}$$

waarin $P(y(t),\ y(o),\ x_{[t_o,t]}) : y(t_o) = y(o) + \int_{t_o}^{t} x\ dt$

Met dit voorbeeld is de ekwivalentie aangestipt van beschrijvingen in de door ons gehanteerde verzamelingstheoretische vorm en de bekende beschrijvingen in de vorm van lineaire differentiaalvergelijkingen. Het voordeel van de beschrijving zoals wij die hanteren is gelegen in het feit dat zijn universeel is.
Men kan de beschrijving nl. gebruiken voor een willekeurig predikaat P.

Een model van het individu.

In de technische wetenschappen is de beschrijving van het dynamisch gedrag van systemen door middel van differentiaalvergelijkingen zeer gebruikelijk. In de gedragswetenschappen is men hiermee pas begonnen in het laatste decennium. Wij zullen niet een voorbeeld hanteren waar reeds gebruik wordt gemaakt van differentiaalvergelijkingen aangezien dat formeel analoog zou zijn aan het voorgaande voorbeeld.
In plaats daarvan kiezen wij een verbaal model van het gedrag van een individu en zullen daarvan laten zien dat dit verbale model kan worden vertaald in de door ons ingevoerde theoretische begrippen zoals toestand en black box.
In [3] postuleren March en Simon een model van een individu.
Wij citeren: "The behavior of an organism through a short interval of time is to be accounted for by (1) its internal state at the beginning of the interval, and (2) its environment at the beginning of the interval. The same two sets of factors, the initial state and the environment, determine not only the behavior but also what the internal state will be at the next moment of time. This is a familiar description of an organism, which provides for the simultaneous influence of nature and nurture and which is compatible with the ordinary mathematical descriptions of dynamic systems.
The internal state of the organisam, by the terms of the de-

scription, is implicitly a function of its whole previous history. In the human organism most of the internal state is contained in what we call the memory. The memory includes (but is not limited to) all sorts of partial and modified records of past experiences and programs for responding to environmental stimuli."

March en Simon werken het model verder uit met hypothesen betreffende "leren", "doel" e.d.

Wij zullen hen daarin nu niet volgen. Wij formuleren de geciteerde passages thans in een mathematische vorm en leggen vervolgens het verband met de door ons ingevoerde theorie.

Notatie.

"a short interval of time" : $[t_o, t]$ met $t = t_o + \Delta t$

" behavior" : $\underline{y}_{[t_o,t]}$

"internal state at the beginning": $\underline{s}(t_o)$

"environment at the beginning" : $\underline{x}(t_o)$

Mathematisch geformuleerd luidt het model:

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{t_o,t} : D(\underline{s}(t_o)) \times D(\underline{x}(t_o)) \rightarrow D(\underline{y}_{[t_o,t]}) \\ \mathcal{G}_{t_o,t} : D(\underline{s}(t_o)) \times D(\underline{x}(t_o)) \rightarrow D(\underline{s}(t)) \end{cases}$$

In paragraaf 3 wordt $\mathcal{S}^*_{t_o,t}$ geintroduceerd.

$$\mathcal{S}^*_{t_o,t} : D(\underline{s}(t_o)) \times D(\underline{x}_{[t_o,t]}) \rightarrow D(\underline{y}_{[t_o,t]})$$

Indien we t naar t_o laten naderen, nadert $\mathcal{S}_{t_o,t}$ naar $\mathcal{S}^*_{t_o,t}$.

De afbeelding $\mathcal{G}_{t_o,t}$ wordt vaak gebruikt bij de zg. toestandsbeschrijving van systemen. Bij deze beschrijving, die vanzelfspreken alleen van toepassing is voor deterministische(1) toestandsbepaalde systemen, hanteert men een stelsel vergelijkingen van de vorm:

(1) Voor stochastische systemen kan een analoge beschouwing worden gehouden.

$$\begin{cases} \underline{s}(t) = f(s(t_o), \underline{x}_{[t_o,t]}) \\ \underline{y}(t) = g(\underline{s}(t)) \end{cases}$$

Hoewel March en Simon in de geciteerde passage niet expliciet stellen dat het model stochastisch is, nemen wij aan dat zij dat wel bedoelen. Met name uit de laatste passage van de betreffende paragraaf blijkt dit o.i. impliciet:
"This, then, is the general picture of the human organism that we will choose to analyse organizational behavior. It is a picture of a choosing, decision making, problem solving organism..."
Men zou in onze terminologie nu het geciteerde gedeelte van het model als volgt kunnen weergeven.
Het gehanteerde model van een individu is een toestandsbepaald, stochastisch systeem met geheugen.

<u>Literatuur</u>.

[1] A. de Leeuw "De bestudering van systemen"
groep organisatieleer, afd. bedrijfskunde i.o.
Technische Hogeschool Eindhoven, 6-11-'68.

[2] A. de Leeuw "Het relatiebegrip"
groep organisatieleer, afd. bedrijfskunde i.o.
Technische Hogeschool Eindhoven, 19-12-'68.

[3] J.G. March and H.A. Simon "Organisations"
Wiley 1958.