EINDHOVEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Oude meetkundestellingen, zoals die van Pappos, Pascal en Desargues tot 'leven' gebracht door de tijd

Citation for published version (APA):
Dijksman, E. A. (1982). Oude meetkundestellingen, zoals die van Pappos, Pascal en Desargues tot 'leven' gebracht door de tijd. *Constructeur*, *jubileumuitgave*, 78-83.

Document status and date:
Gepubliceerd: 01/01/1982

Document Version:
Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

• A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
• The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
• The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

Link to publication

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

• Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
• You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
• You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Download date: 20. May. 2025

Dr. E.A. Dijksman, Afdeling der Werktuigbouwkunde, Technische Hogeschool Eindhoven

Oude meetkundestellingen, zoals die van Pappos, Pascal en Desargues tot 'leven' gebracht door de tijd

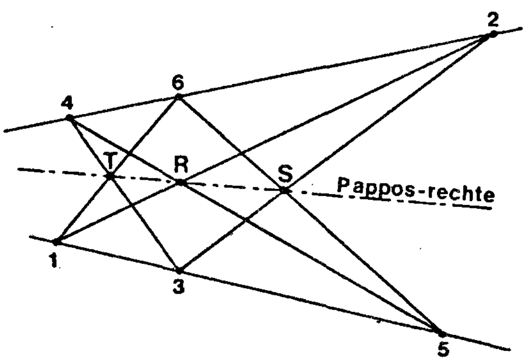
Bewegingsmeetkunde is de meetkunde van figuren, die kunnen bewegen. In de praktijk worden zulke figuren mechanismen of zelfs machines. In feite kan men dus door invoering van het tijdsbegrip de meetkunde 'tot leven' brengen. Als voorbeeld is een stokoude stelling genomen van Pappos, die onder invoering van de dimensie tijd in 'innig' verband blijkt te staan met de meer 'recente' meetkunde stelling van Desargues. De sleutel daartoe geeft de 3-polen-stelling van Aronhold-Kennedy uit de bewegingsmeetkunde van de vorige eeuw. Praktisch laat dit artikel zien onder welke omstandigheden een vakwerk wankel wordt, een resultaat van het in beweging brengen van historische configuraties.

Historische inleiding

Pappos van Alexandrië (± 300 A.D.) was in feite degene, die de meetkunde opnieuw deed herleven, nadat deze na de laatste Griekse meetkundige van enige betekenis, te weten Apollonius van Perga, omstreeks het begin van de christelijke jaartelling, zo goed als tot nul was gereduceerd. Pappos was de man, die zich dan ook tot taak stelde de Griekse meetkunde uit de oudheid in zijn oude glorie te doen herstellen. De nabijheid van de pyramiden met hun verbluffende mate van nauwkeurigheid gebouwd, zal hier wel niet vreemd aan zijn geweest. Ook de invloed van de Griekse farao's in Alexandrië, zoals die van Ptolemeus I t/m VI met op de achtergrond de Griekse wijsgeren Plato, Socrates, Archimedes, Hyppocrates en niet te vergeten Euclides, de grondlegger van de meetkunde, mag hierop niet worden onderschat.

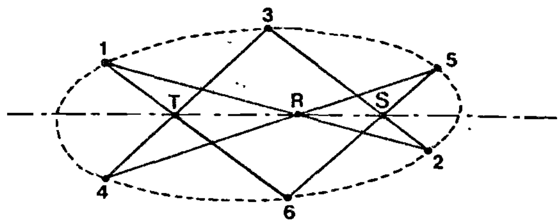
De stelling van Pappos nu, die om zo te zeggen 'in beweging' zal worden gebracht, luidt:

'Van een in een rechtenpaar beschreven zeshoek, snijden de overstaande zijden elkaar in punten van één en dezelfde rechte, de rechte van Pappos' (figuur 1).



Pappos van Alexandrië (300 A.D.)

Figuur 1

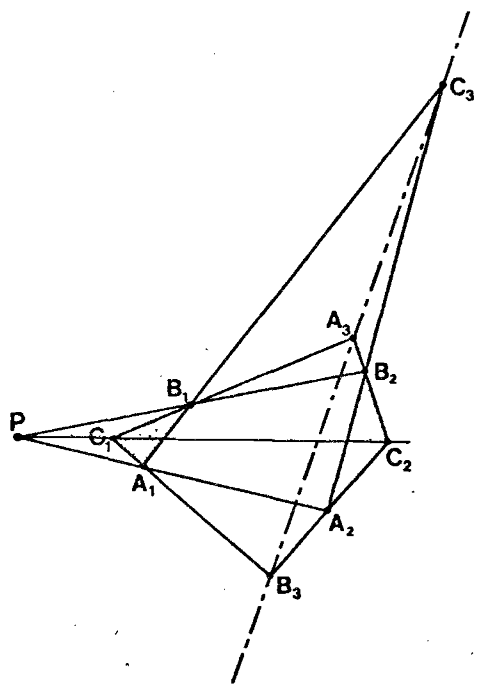


Blaise Pascal (1640)

Figuur 2

Eeuwen later, om precies te zijn in 1640, vond Blaise Pascal een algemenere versie:

'Van een in een kegelsnede ingeschreven zeshoek, snijden de overstaande zijden elkaar in punten van één en dezelfde rechte, de rechte van Pascal' (figuur 2).



Girard Desargues (1596 - 1650)

Figuur 3

Een tezelfdertijd door Girard Desargues (1596-1650) gevonden stelling, schijnbaar van geheel andere aard, blijkt (bewegingsmeetkundig gezien) in sterk verband te staan met de zoëven geformuleerde stellingen van Pappos en Pascal.

Stelling van Desargues: 'Overeenkomstige zijden van twee driehoeken snijden elkaar in punten van een rechte, wanneer de verbindingslijnen van de overeenkomstige hoekpunten door een punt gaan; en omgekeerd'.

(figuur 3)

De betrokken rechte heet de rechte van Desargues; het perspectivisch centrum, het knooppunt van Desargues.

Ieder van de drie genoemde stellingen kan worden bewezen met behulp van de kinematica, ook wel bewegingsmeetkunde genoemd. Dit gebeurt door invoering van een derde dimensie, de tijd, die de beweging introduceert. Meetkundige figuren gaan dan bewegen, waardoor we te doen krijgen met mechanismen, die al of niet een gedwongen beweging uitvoeren.

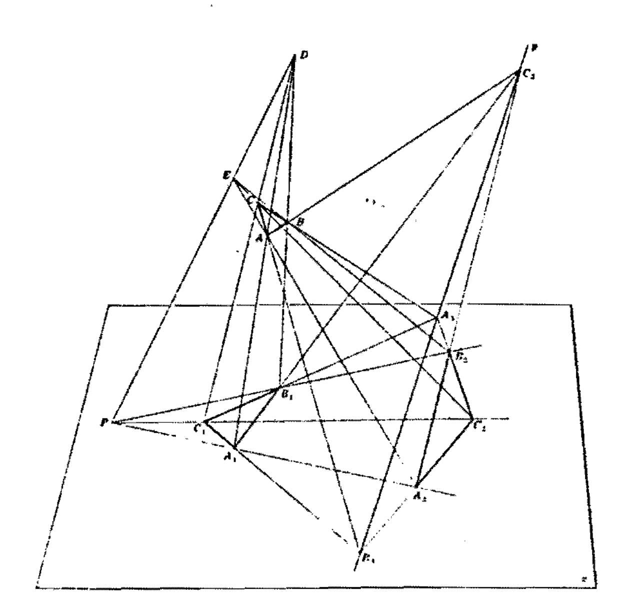
In de wiskunde komt het overigens meerdere malen voor, dat een stelling uit het platte vlak eenvoudig kan worden bewezen door uit te gaan van een ruimtelijke figuur, waarmee dan in feite een derde dimensie is ingevoerd, om daarmee een stelling uit een lagere dimensie te bewijzen. Een prachtig voorbeeld hiervan is juist de genoemde (algemene) stelling van Desargues: 'Projectie van een in de ruimte geplaatste $\triangle ABC$ vanuit twee verschillende punten D en E, op een plat vlak, geven dan juist deze 'perspectivisch gelegen' driehoeken van Desargues' (figuur 4).

Ook in de bewegingsmeetkunde kan (zoals het vervolg laat zien) de stelling van Desargues bewezen worden door de later gevonden, kinematische stelling van Aronhold-Kennedy (1872), die zegt dat telkens drie snelheidspolen op een rechte komen.

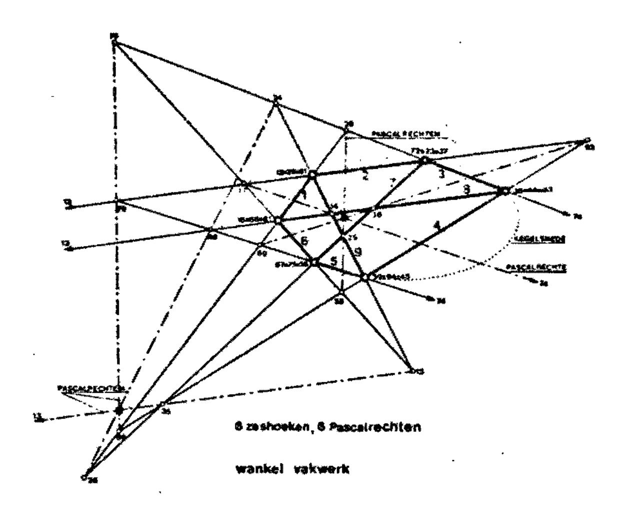
Het bewijs van de stelling van Pappos volgt vanzelfsprekend uit die van Pascal. Terwijl de laatste, evenals de stelling van Desargues, nauw samenhangt met de genoemde stelling van Aronhold-Kennedy (zie ook het boek 'Motion Geometry of Mechanisms', pag. 44, van de schrijver).

Kinematische inleiding

In het voorgaande is reeds duidelijk gemaakt, dat toevoeging van de dimensie tijd statische figuren doet herleven, waardoor we te doen krijgen met de bewegingsmeetkunde, of anders gezegd de kinematica. Zoals we zullen zien, kan de tijd nog op verschillende



Figuur 4



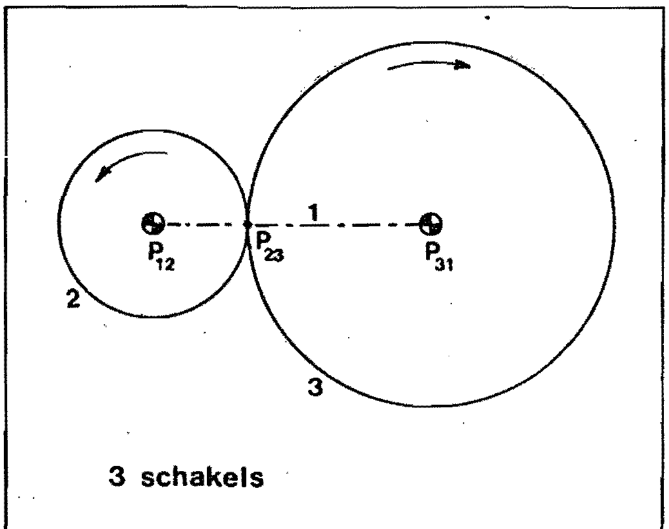
Figuur 5

wijzen worden ingevoerd: bij de configuratie van Desargues gebeurt dit door de tien in de figuur optredende markante punten als 'snelheidspolen' op te vatten, waardoor we te doen krijgen met een zogenaamde (in dit geval volledige) poolconfiguratie, waaraan zoals we later zullen zien, nog een hele verzameling van mechanismen kan worden toegevoegd.

Bij de figuren van Pappos en Pascal zal de zeshoek meer direct opgevat worden als een stangenzeshoek, waarbij de hoekpunten draaipunten tussen de opvolgende zijden zijn. De figuur verandert dan in een mechanisme, waarbij overigens ook weer een poolconfiguratie hoort. Maar ook in dit laatste geval kan men zich meerdere mogelijkheden indenken. Onderscheid is bij voorbeeld nog te maken door het al dan niet onderstellen van een blijvend verblijf, dan wel slechts een momentaan verblijf van de hoekpunten (van de zeshoek) op de kegelsnede. In beide gevallen is het van belang om na te gaan of beweging eigenlijk wel mogelijk is. Het zou namelijk kunnen zijn, dat dit niet zo is, en dat er sprake is van een statische figuur, een vakwerk dus. Het kan ook zijn, dat er sprake is van een momentane beweeglijkheid. Als vakwerk is zoiets dan ongeschikt, omdat we dan te doen hebben met een wankel vakwerk. In feite valt een dergelijke constructie nog onder de definitie van een mechanisme, omdat het in de beschouwde (wankele) positie althans, een éénduidige poolconfiguratie bezit. De technische betekenis van zulke wankele vakwerken is, dat men ze moet **vermijden**. En om deze reden moeten ze juist worden onderzocht. Men denkt vaak, dat men door het aanbrengen van extra staven in de constructie, het vakwerk verstevigt. In het algemeen moge dit zo zijn, maar aan de hand van voorbeelden (die in direct verband staan met de Papposconfiguratie) zullen we laten zien, dat dit soms in het geheel niet helpt, en de constructie desondanks wankel blijft. Om constructieve fouten te voorkomen, is een onderzoek in deze richting dus evident. Een voorbeeld is de stangenzeshoek, waarvan de hoekpunten, dat zijn de functionele draaipunten, zich momentaan althans op een kegelsnede bevinden. Dit mechanisme verandert in een statisch bepaald vakwerk, wanneer overstaande hoekpunten door staven zijn verbonden. Toch blijkt ook dan nog het geheel wankel te zijn, omdat op grond van de stelling van Pascal, een éénduidige poolconfiguratie blijkt te bestaan. De zes daarbij optredende zeshoeken leveren precies zes Pascalrechten, die Aronhold-Kennedy-rechten blijken te zijn, waardoor inderdaad een unieke poolconfiguratie ontstaat, tengevolge waarvan in elk geval een éénduidige (minstens momentane) beweging mogelijk is (figuur 5).

Zoals bekend [11], wordt een poolconfiguratie volledig genoemd, wanneer de configuratie alle snelheidspolen bevat, die bij het

Oude meetkundestellingen, zoals die van Pappos, Pascal en Desargues tot 'leven' gebracht door de tijd



Figuur 6

gegeven aantal lichamen of schakels zullen optreden. Het eenvoudigste voorbeeld met een gesloten keten is wellicht het voorbeeld van een mechanisme bestaande uit twee in het gestel 1 gelagerde en met elkaar in ingrijping zijnde tandwielen 2 en 3 (figuur 6). De vaste ligging van de drie polen P_{12}, P_{23} en P_{31} op de gestelrechte is daarbij een simpel voorbeeld van de reeds eerder genoemde 3-polenstelling van Aronhold (1872)-Kennedy (1886).

Voor vier bewegende vlakken is de stangenvierzijde een prachtig voorbeeld (figuur 7). De poolconfiguratie bestaat in dit geval uit de volledige vierzijde, waarbij de draaipunten van de vierhoek de triviale polen zijn, en de twee overige bepaald worden door herhaalde toepassing van de stelling van Aronhold-Kennedy. Het mechanisme heeft (evenals het voorgaande) één graad van vrijheid van beweging, waardoor een gedwongen beweging ontstaat. De beweging is permanent, omdat met uitzondering van strekbare vierzijden in iedere stand een unieke poolconfiguratie bestaat.

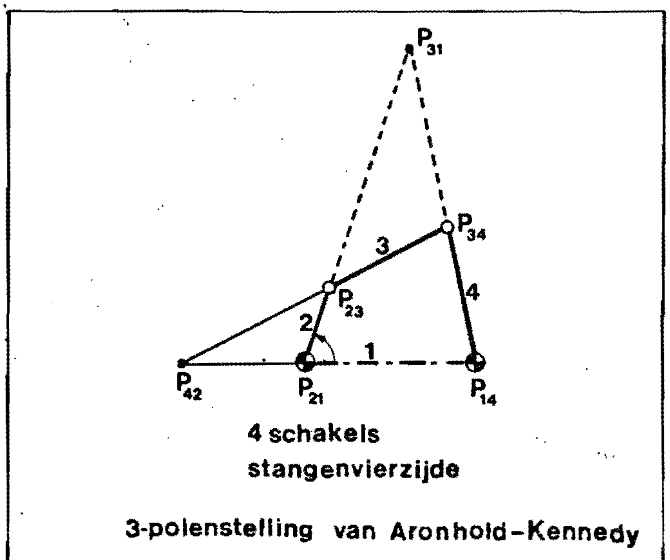
De Configuratie van Desargues

In een toepassing van een mechanisme, bestaande uit vijf bewegende schakels die te zamen een gedwongen beweging uitvoeren, krijgen we te maken met tien snelheidspolen, zoals ook blijkt uit het aantal elementen in de als zodanig (overigens ten onrechte) bekend staande driehoek van Pascal.

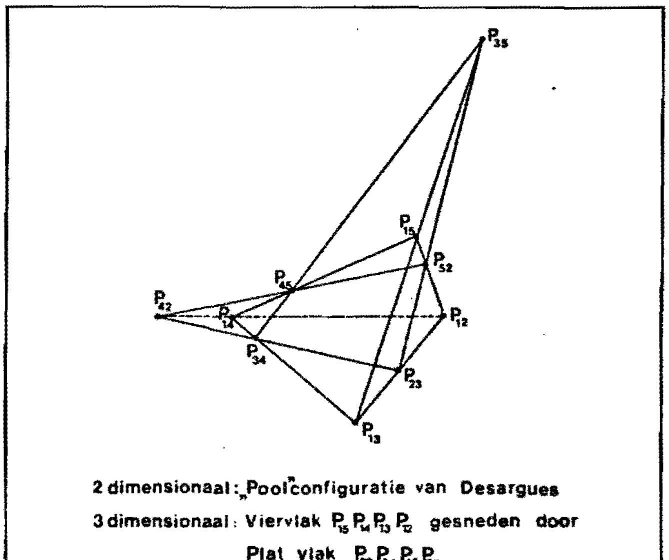
$$\begin{array}{c} P_{12} \\ P_{13}\quad P_{32} \\ P_{14}\quad P_{34}\quad P_{42} \\ P_{15}\quad P_{45}\quad P_{53}\quad P_{52} \end{array}$$

De volledige poolconfiguratie bestaat dus uit deze tien polen en uit tien Aronhold-Kennedy-rechten, waarop telkens drie van zulke polen voorkomen. Het geheel blijkt juist de Configuratie van Desargues te vormen (figuur 8). Duidelijk is, dat het bewijs van de stelling van Desargues onmiddellijk volgt uit een herhaalde toepassing van de 3-polenstelling van Aronhold-Kennedy. De invoering van een 3e dimensie, de tijd, is hier debet aan; zij geeft aanleiding tot een beter inzicht in de geometrie van het platte vlak, waarin de tijd niet eens voorkwam.

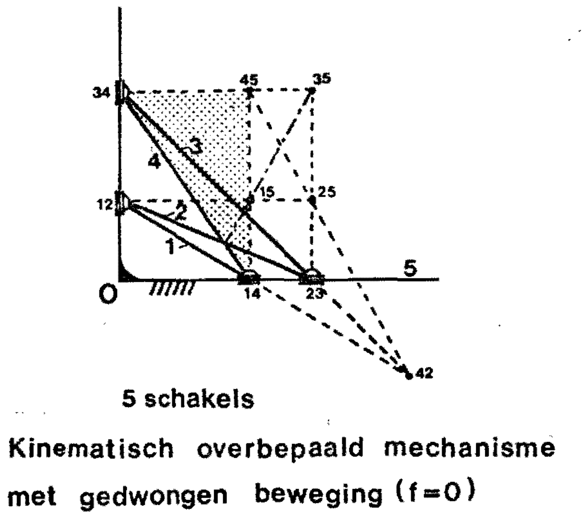
Een mechanisme, dat een gedwongen beweging uitvoert en vijf bewegende schakels bezit, heeft dus een 'poolconfiguratie' van Desargues. Datzelfde geldt voor een wankel vakwerk opgebouwd met vijf schakels. Ook het omgekeerde is waar: bij een éénduidige 'poolconfiguratie' van Desargues hoort een mechanisme of een vakwerk, dat in ieder geval momentaan een (infinitesimaal) kleine beweging kan uitvoeren. Of het mechanisme ook permanent kan blijven bewegen, hangt alleen af van het feit, of in iedere (willekeurige) stand een poolconfiguratie van Desargues is aan te wijzen. Als voorbeeld kiezen we een mechanisme (of, zo men wilt, een vakwerk) bestaande uit een stangenvierhoek, waarvan de hoekpunten zich langs twee vaste, onderling loodrechte assen bewegen



Figuur 7



Figuur 8



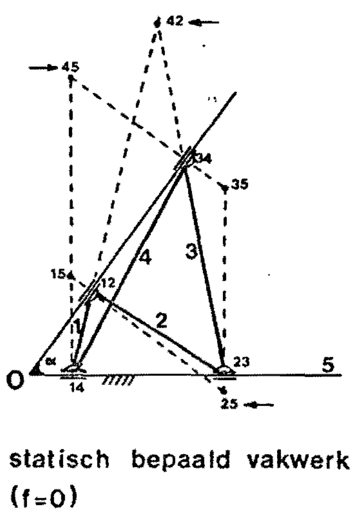
Figuur 9

(figuur 9). Een berekening volgens het Grübler-Kutzbach criterium [5] leert, dat dit eigenlijk een statisch bepaald vakwerk is met nul graden van vrijheid van beweging. De praktijk leert echter anders. Het blijkt namelijk, dat bij iedere (willekeurige) stand een unieke poolconfiguratie van Desargues hoort, waardoor de constellatie geen vakwerk, maar een mechanisme is, dat een permanente (gedwongen) beweging kan uitvoeren. Voor het bewijs van het bestaan van de poolconfiguratie van Desargues in dit geval, is het voldoende een zeshoek te beschouwen door de oneindig verre punten van de twee, onderling loodrechte, assen en door de hoekpunten van de stangenvierzijde. De stelling van Pappos kan dan worden toegepast. De Papposrechte blijkt dan tevens de rechte van Desargues te zijn voor twee in de figuur op te merken rechthoekige driehoeken. Op grond van de stelling van Desargues liggen deze driehoeken dan perspectivisch en hebben we te maken met de configuratie van Desargues, die de poolconfiguratie voorstelt van het aangeduide mechanisme met vijf schakels. Daarmee is het bewijs geleverd voor zijn permanente beweging. Tevens is (voor dit geval althans) een direct geometrisch verband gevonden tussen de stellingen van Pappos en Desargues. Zij herleven in de vorm van de bewegingsmogelijkheid van dit toch in feite 'kinematisch overbepaalde' mechanisme.

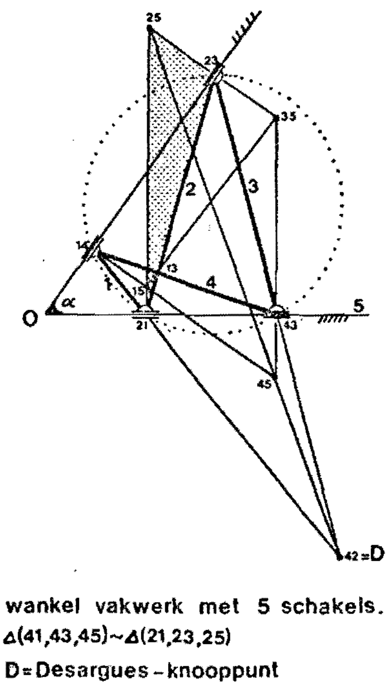
Het is duidelijk, dat voor het geval de twee vaste assen niet loodrecht op elkaar staan, het bewijs niet meer opgaat, omdat dan de Papposrechte geen kinematische betekenis meer heeft (de Papposrechte verbindt dan niet langer de polen van twee zogenaamde 'elliptische' bewegingen). De configuratie, waarbij dus de twee vaste assen een hoek $\alpha \neq 90°$ insluiten, blijkt dan, in overeenstemming ditmaal met het Grübler-Kutzbach kriterium, inderdaad een statisch bepaald vakwerk te zijn, en géén mechanisme (figuur 10).

Nu wordt het echter interessant om na te gaan wat de voorwaarde is, opdat bij $\alpha \neq 90°$ tóch een minimale beweging mogelijk wordt. Het blijkt, dat dit zich voordoet, wanneer de hoekpunten van de stangenvierzijde op een cirkel liggen. In dat geval wordt het vakwerk dus een wankel vakwerk. Momentane beweging is dus pas mogelijk, wanneer de hoekpunten, die zich langs een scheefhoekig assenstelsel moeten bewegen, tevens op een cirkel liggen. Alleen in dat geval bestaat dus de poolconfiguratie van Desargues (figuur 11).

Om deze stelling te kunnen bewijzen, proberen we een kegelsnede te trekken door de vier genoemde hoekpunten en door de oneigenlijke (dat zijn de oneindig verre) punten in richtingen loodrecht op de twee (schuif-)assen. De stangenzeshoek door deze punten wordt dan omschreven door een hyperbool, waardoor de stelling van Pascal kan worden toegepast. De Pascalrechte, gezien als rechte van Desargues, geeft dan aanleiding tot een Desarguesconfiguratie, hetgeen tot de momentane beweeglijkheid leidt (permanente beweging is hierbij niet mogelijk, omdat in het algemeen de koordevierhoek geen koordevierhoek blijft). De



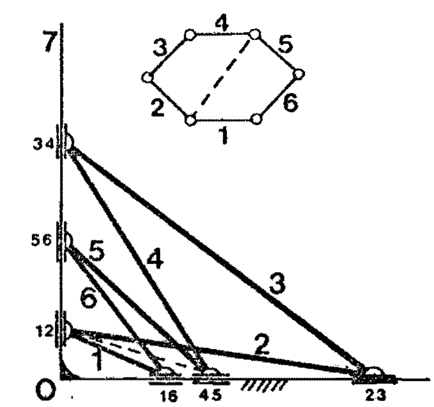
Figuur 10



Figuur 11

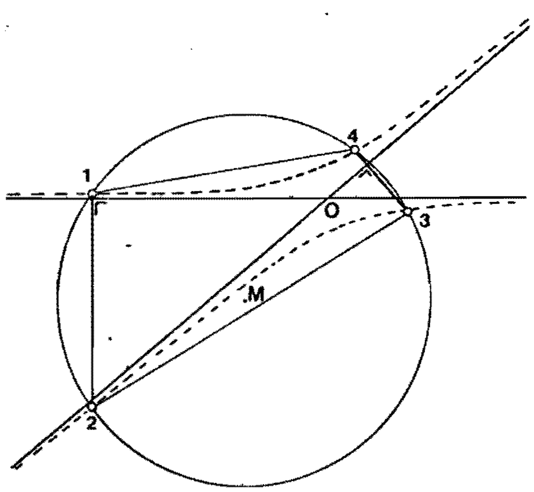
Oude meetkundestellingen, zoals die van Pappos, Pascal en Desargues tot 'leven' gebracht door de tijd

basis voor het bewijs, dat de zes genoemde punten op eenzelfde kegelsnede komen, vormt de hulpstelling, dat de hyperbool door de vier hoekpunten van een koordevierhoek, die een asymptoot heeft loodrecht op één der zijden van de vierhoek, een tweede asymptoot heeft, die loodrecht staat op de overstaande zijde van deze vierhoek. (Het bewijs hiervan kan weer worden vereenvoudigd tot een eigenschap van de cirkel door hernieuwde toepassing van de stelling van Pascal, figuur 12.)



(kinematisch overbepaald) mechanisme. Papposrechte is polenrechte voor diagonaalstaven

Figuur 13

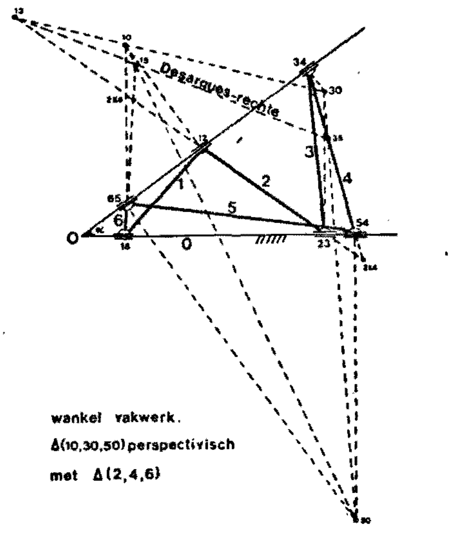


hyperbool door 4 hoekpunten v.e. koordevierhoek met asymptotische richtingen loodrecht 2 overstaande zijden

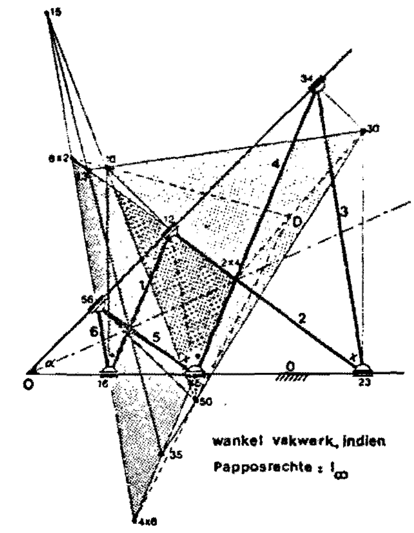
Figuur 12

De configuratie van Pappos kinematisch beschouwd

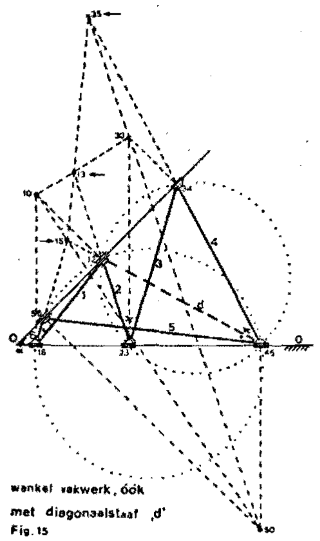
De configuratie van Pappos kan 'tot leven' worden gebracht door de hoekpunten van de zeshoek te nemen op twee onderling loodrechte assen (figuur 13). De zeshoek en het vaste assenstelsel samen vormen dan een configuratie met zeven schakels, die op grond van het Grübler-Kutzbach kriterium, een statisch bepaald vakwerk ($f = 0$) zou moeten zijn. Het blijkt echter, dat we ongestoord overstaande hoekpunten met stangen kunnen verbinden. Doen we dit één keer, dan hebben we te doen met twee op elkaar gestapelde stangenvierzijden, waarvan voor ieder de (permanente) beweging volgens het gestelde in de voorgaande paragraaf mogelijk is. De beweging wordt dus door het aanbrengen van 1,2 of 3 van die 'diagonaalstaven' in het geheel niet beïnvloed. Ook als we ze achterwege laten blijft (permanente) beweging dus mogelijk. In tegenspraak met de globale uitkomst van het Grübler-Kutzbach kriterium, hebben we hier dus te doen met een kinematisch overbepaald mechanisme, dat een gedwongen beweging kan uitvoeren. (Daarbij volvoert iedere schakel op zich een elliptische beweging.)
Overstaande staven van de zeshoek snijden elkaar juist in de drie relatieve polen van de drie diagonaalstaven, al of niet aanwezig. Volgens Aronhold-Kennedy, liggen deze polen op een rechte, in dit geval tevens de Pappos-rechte.
Wanneer de twee vaste assen een hoek α insluiten, die $\neq 90°$ is, houdt echter weer iedere beweging op en krijgen we vanzelfsprekend te doen met een statisch bepaald vakwerk. Het een en ander kan worden aangetoond met behulp van de poolconfiguratie. Deze blijkt niet meer eenduidig te zijn: uitgaande van de hoekpunten van de zeshoek, die triviale polen zijn en voorts van de ('elliptische') polen die overeenkomen met de zes elliptische bewegingen, blijkt al ras, dat de drie relatieve polen tussen de oneven genummerde staven niet meer op een rechte komen, terwijl dit volgens Aronhold-Kennedy wel het geval zou moeten zijn. Vandaar, dat beweging voor $\alpha \neq 90°$ in het algemeen niet mogelijk is. Te onderzoeken valt nog een mogelijke instantane beweging. Hiervoor is, blijkens het feit, dat $f = 0$, één conditie voldoende. Uit het voorgaande volgt, dat deze conditie niets anders kan zijn dan die waarbij de drie relatieve polen P_{13}, P_{35}, P_{51} tussen de oneven genummerde staven op een rechte liggen. Is dit het geval, dan hebben we te doen met een wankel vakwerk, dat momentaan een infinitesimaal kleine, maar in de praktijk, vanwege de in het vakwerk aanwezige spelingen, toch een verontrust grote, beweging kan uitvoeren (figuur 14).
De Papposrechte heeft in dit geval geen directe betekenis. Wel is ook hier weer een configuratie van Desargues herkenbaar: de driehoeken, gevormd door de 'elliptische' polen 10, 30, 50 van de oneven staven en gevormd door de snijpunten van de even staven (2, 4, 6) liggen namelijk 'perspectivisch'. De Aronhold-Kennedy-rechte P_{13}-P_{35}-P_{51} is daarbij dan de rechte van Desargues. Het perspectivisch punt, het knooppunt van Desargues, is dus het snijpunt van de drie lijnen $10-(6\times 2)$, $30-(2\times 4)$ en $50-(4\times 6)$. Ook dit laatste kan gezien worden als de noodzakelijk en voldoende voorwaarde, opdat het vakwerk een wankel vakwerk is.
Merk op, dat bij het geven van het scheefhoekige assenstelsel en Δ (10, 30, 50) de hele figuur reeds bepaald is, waarbij het dan maar de vraag is of 15, 13 en 35 wel op een rechte komen. In het geval ze echter wel op een rechte liggen, zijn alle overige polen ook éénduidig uit de Desargues-configuratie af te leiden, reden waarom in de figuur althans, de poolconfiguratie niet volledig is



Figuur 14



Figuur 16



Figuur 15

getekend.
Een bijzonder geval wordt verkregen door de configuratie op te bouwen door uit te gaan van twee cirkels, die elkaar snijden in twee (hoek-)punten op de twee scheve assen (figuur 15). De vier overige hoekpunten van de zeshoek vindt men dan in de resterende snijpunten van de twee assen met de twee cirkels. Het vakwerk is nu zeker wankel, omdat tot tweemaal toe vier hoekpunten op een cirkel liggen. We hebben dan te doen met twee op elkaar gestapelde stangenvierzijden 1-6-5-*d* en 2-3-4-*d*. De diagonaalstaaf *d*, die de 'machtlijn' is van de twee cirkels, kan zonder meer aan het vakwerk worden toegevoegd, zonder dat de momentane beweeglijkheid van het geheel, in gevaar wordt gebracht. Zoals blijkt uit de figuur, liggen ook de polen 13, 15 en 35 op een rechte en hebben we te doen met de perspectivische configuratie van Desargues. Omdat we hier te doen hebben met twee koordevierhoeken, zijn aan de constructie in dit geval ook twee voorwaarden opgelegd, die het daardoor een bijzonder geval maken ten opzichte van het in het voorgaande behandelde, meer algemene geval. In het algemeen echter kon men, ook als aan de perspectiviteitseis (hier de conditie voor een wankel vakwerk) was voldaan, toch niet die enkele diagonaalstaaf *d* tussenvoegen, omdat dan het wankele karakter van het vakwerk zou verdwijnen. Kan de diagonaalstaaf wèl worden tussengevoegd, zoals in de laatste constructie, dan kan men het weer niet willekeurig doen, omdat aanbrengen van de andere diagonaalstaven ook dan het wankele karakter van het vakwerk gaat verstoren.
Een wankel vakwerk, waarbij de Papposrechte de oneigenlijke rechte is, wordt gedemonstreerd in figuur 16. In dit geval loopt de diagonaal 12 - 45 evenwijdig aan de staven 3 en 6, waardoor de driehoeken 56, 16, (1×5) en (43, 23, 2×4) perspectivisch zijn gelegen en zodoende de punten 0, (1×5) en (2×4) op één rechte komen. Uit de gegeven configuratie valt ook af te leiden, dat de polen 51, 13 en 35 op één rechte komen, waardoor de momentane beweeglijkheid wordt gegarandeerd, zodat de constellatie inderdaad een wankel vakwerk blijkt te zijn. Voorwaarde is, dat de Pappos-rechte de oneigenlijke rechte is.
Het geheel vertoont ook enige gelijkenis met de Neurenberger Schaar, die overigens ook al in tekeningen van Leonardo da Vinci (1452-1519) te vinden is.

Literatuur

[1] Pascal, B., *Essay pour les coniques*. Paris, 1640
[2] Desargues, G. (1596-1650): Poudra, M., *Oevres de Desargues*, 2 vol, Paris 1876
[3] Aronhold, S., *Grundzüge der Kinematischen Geometrie*, Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses in Preusen, 51 (1872), 129-55
[4] Kennedy, A.B.W., *The Mechanics of Machinery*, MacMillan, London 1886
[5] Grübler, M., *Getriebelehre. Eine Theorie des Zwanglaufes und der ebenen Mechanismen*, Springer Verlag, Berlin, 1917
[6] Kutzbach, K., *Mechanische Leitungsverzweigung. Maschinenbau. Der Betrieb*, 8, 710-16, 1929
[7] Bottema, O., *De elementaire meetkunde van het platte vlak*, Noordhoff, Groningen 1938
[8] Ayres, F., *Projective Geometry*, Schaum Publishing Company, 1967
[9] Coxeter, H.S.M. and Greitzer, S., *Geometry Revisited*, Random House, The L.W. Singer Company, 1967
[10] Laman, G., *On graphs and rigidity of plane skeletal structures*, J. Eng. Math. 4, 1970, 331-40
[11] Dijksman, E.A., *Motion Geometry of Mechanisms*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne, 1976
[12] Dijksman, E.A., *Cinemática de Mecanismos*, Editorial Limusa, S.A. Mexico 1981
[13] Charles Gibbs-Smith and Gareth Rees, *The Inventions of Leonardo da Vinci*, Phaidon-Oxford, 1978.