

# Onderzoek aan niet-lineaire systemen met behulp van simple cell mapping

**Citation for published version (APA):**

Lemmens, D. J. R. C. (1992). *Onderzoek aan niet-lineaire systemen met behulp van simple cell mapping*. (DCT rapporten; Vol. 1992.033). Technische Universiteit Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1992

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

**ONDERZOEK AAN NIET-LINEAIRE SYSTEMEN**

**MET BEHULP VAN**

**SIMPLE CELL MAPPING**

stagiair: Didier Lemmens  
periode : 15-01-'92 tot 26-02-'92  
begeleider: Jeroen van der Spek  
verslagnummer: 92033

T.U.E., Vakgroep WFW

## SAMENVATTING

Met behulp van de simple cell mapping-methode worden de vergelijkingen van Van der Pol, Duffing en van een impact oscillator bekeken. Door de gevonden oplossingen te vergelijken met in de literatuur reeds bekende resultaten kan een uitspraak gedaan worden over de methode. Verder is gekeken naar de invloed van de celgrootte, de integratie-nauwkeurigheid, de lengte van het integratie-interval van de cell map-operatie, de ligging van de cellen t.o.v. discontinuïteiten en naar parametervariëaties in de bewegingsvergelijkingen op de gevonden oplossing. In het kort volgen hier de gevonden conclusies:

- de simple cell map-methode blijkt steeds, na juiste interpretatie van de resultaten, de juiste oplossing te geven. De methode werkt dus goed.
- de invloed van de integratie-nauwkeurigheid is gering mits zij een orde kleiner wordt gekozen dan de celgrootte.
- celverfijning leidt alleen tot contourverduidelijking van attractiegebieden en niet tot het nauwkeuriger bepalen van periodes van periodieke oplossingen of ligging en vorm van attractiegebieden.
- de nauwkeurigheid waarmee periodes van periodieke oplossingen en vorm en ligging van de attractiegebieden wordt bepaald is afhankelijk van: de integratie-nauwkeurigheid, de ligging van de cellen t.o.v. de exacte oplossing en de lengte van het integratie-interval van de cell map-operatie.
- over de invloed van de ligging van de cellen t.o.v. discontinuïteiten is moeilijk een uitspraak te doen.
- verlenging van het integratie-interval van de cell map-operatie is een goede optie om op een snelle manier tot een verbetering van de resultaten te komen.

## INHOUDSOPGAVE

-	Samenvatting.....	blz. 1
-	Inhoudsopgave.....	blz. 2
-	Gebruikte symbolen.....	blz. 3
1-	Inleiding.....	blz. 4
2-	De cell mapping-methode.....	blz. 5
3-	Anlyse van de Van der Pol vergelijking met de cell map-methode.....	blz. 9
4-	Analyse van de Duffing vergelijking met de cell map-methode.....	blz. 11
5-	De impact oscillator.....	blz. 15
6-	Algemene conclusies.....	blz. 24
-	Literatuur.....	blz. 25
-	Bijlages.....	blz. 26

## LIJST VAN GEBRUIKTE SYMBOLEN

- Z : celnummer.
- C : cell map-operatie.
- $q, x_1$  : toestandsvariabele; meestal de verplaatsing.
- $q', x_2, y$  : afgeleide van de toestandvariabele; meestal de versnelling.
- Gr : groepnummer van een periodieke groep.
- S : stapnummer
- P : periodenummer
- d : dempingsconstante bij Duffing vergelijking
- a : excitatie-amplitude van de kracht in Duffing vergelijking
- w : hoeksnelheid
- t : tijd
- eps : integratie-nauwkeurigheid
- r : restitutie-coëfficiënt
- F : kracht bij impact oscillator
- : excitatie-amplitude van de kracht bij de impact oscillator
- $*, \dots, x, o$  : symbolen die gebruikt worden om de resultaten van berekeningen weer te geven in een Poincaré-Sectie

## 1 INLEIDING

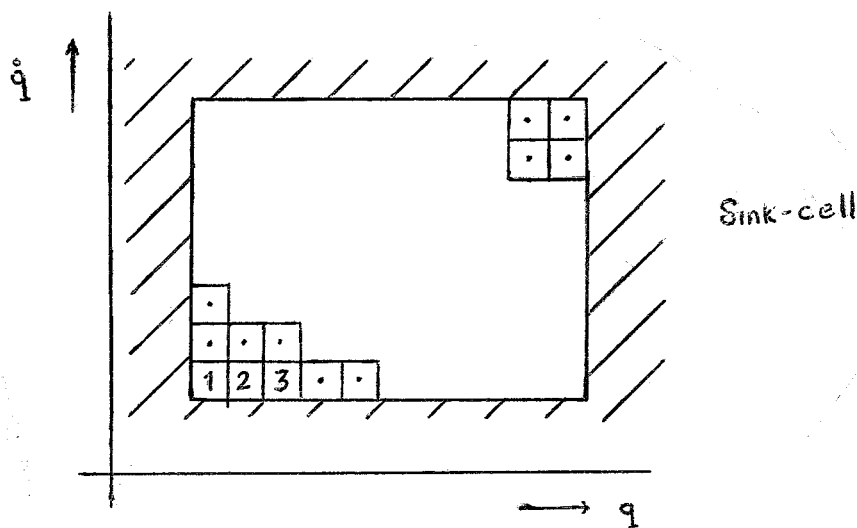
Bij de bestudering van het globale gedrag van niet-lineaire dynamische systemen kan gebruik gemaakt worden van 'simple cell mapping'. Deze methode gaat uit van een discretisatie (een verdeling in cellen) van de faseruimte, waarbij attractoren van het systeem gelocaliseerd en bijbehorende attractiegebieden bepaald kunnen worden. In de vakliteratuur komt het bepalen van deze gebieden slechts zelden ter sprake. Dit is waarschijnlijk een gevolg van het feit dat dat analytisch alleen in zwak niet-lineaire gevallen mogelijk is en het numeriek zeer veel tijd kost. De toepassing van 'simple cell mapping' heeft deze situatie sterk veranderd; het is nu zelfs voor sterk niet-lineaire systemen mogelijk de aantrekkingsgebieden van de stabiele oplossingen op efficiënte wijze te bepalen. Door de oplossingen zoveel mogelijk te vergelijken met in de literatuur reeds bekende resultaten kan men inzicht krijgen in de juistheid van de door 'simple cell mapping' gevonden oplossingen.

Als eerste zal in dit verslag de simple cell mapping-methode globaal worden uitgelegd. Daarna zullen achtereenvolgens de Van der Pol vergelijking, de Duffing vergelijking en de vergelijkingen van de impact oscillator worden bekeken. Naast vergelijking met de in de literatuur bekende resultaten is ook de invloed van parameter-varianties bekeken.

## 2 DE CELL MAPPING-METHODE

Tijdens de analyse van een (sterk) niet-lineair systeem is men meestal geïnteresseerd in het globale patroon van stabiele en instabiele oplossingen en de bij de stabiele oplossingen behorende attractiegebieden. Één van de weinige manieren, tot nu toe, om inzicht te krijgen in het gedrag van een sterk niet-lineair systeem is numerieke integratie, over een groot tijdsinterval, om de beweging te berekenen. Voor iedere set beginvoorwaarden moet een nieuwe berekening worden uitgevoerd. Dit is een zeer tijdrovende en inefficiënte bezigheid, tenzij men slechts geïnteresseerd is in een zeer beperkt gebied van beginvoorwaarden.

Bij de cell mapping-methode wordt het interessante gedeelte van het  $N$ -dimensionale faseruimte opgedeeld in een groot aantal cellen waarvan de zwaartemiddens uitgangsbeginvorwaarden vormen (zie onderstaande figuur).

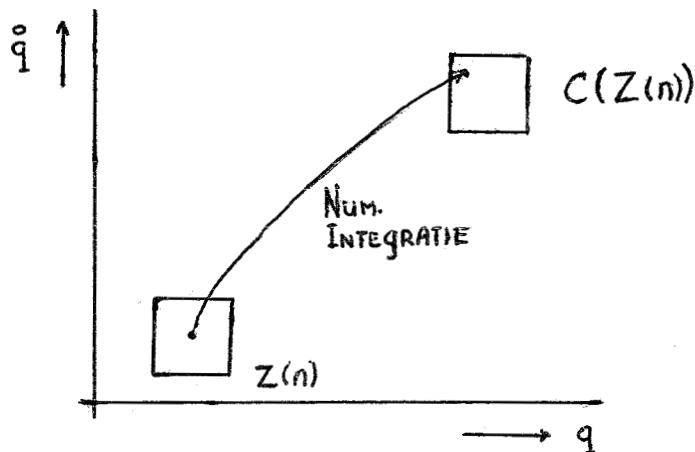


Opmerking: binnen dit verslag worden de resultaten meestal weergegeven m.b.v. een Poincaré-Sectie; hierbij wordt de toestand van het systeem, iedere keer na een vast tijdsinterval, op de faseruimte geprojecteerd.

Elke cel heeft een celnummer  $Z$  en wordt beschouwd als een ondeelbare toestandseenheid.

We definiëren nu de celmap operatie  $C$ : aan de hand van de uitgangsbeginvorwaarden van een cel uit de faseruimte wordt door numerieke integratie van de bij het systeem behorende

bewegingsvergelijkingen, over een bepaald tijdsinterval, de ligging van de beeldcel bepaald (zie onderstaande figuur).



Bij een heteronoom systeem nemen we als integratie-interval de periodetijd van dit systeem, bij een autonoom systeem een willekeurig tijdsinterval mits niet te klein.

$C^m(Z)$  geeft de operatie  $C$   $m$  keer toegepast op de cel met celnummer  $Z$  weer.

Indien geldt dat  $Z=C^k(Z)$ , na  $k$  afbeeldingen zijn we dus weer op dezelfde cel terecht gekomen, dan is deze cel onderdeel van een periodieke groep met periode  $k$  (aangeduid als een P-K groep) en heet een periodieke cel. Deze periodieke groepen komen in aanmerking om de periodieke oplossingen van het onderzochte systeem te vormen.

Periodieke groepen met veel cellen zouden kunnen wijzen op een chaotische oplossing. Om dit te controleren kan men een punt nemen van het bijbehorende attractiegebied en dit helemaal numeriek integreren. Door het resultaat te bekijken kan men zien of de oplossing daadwerkelijk periodiek of chaotisch is.

Verder is het mogelijk, dat een cel na  $r$  stappen wordt afgebeeld op een cel van een periodieke groep. Deze cel behoort dan tot het attractiegebied van deze periodieke groep en heet een transiënte cel.

Als laatste is er nog de mogelijkheid, dat de cel na een aantal stappen buiten het als interessant aangegeven deel van het fasevlak terecht komt. Dit gebied noemt men ook wel de sink-cell. Deze zogenaamde sink-cell is een P-1 cel omdat een cel, door operatie  $C$  in de putcel terecht gekomen, deze cel niet meer verlaat.

De cell mapping-methode doet dus niets anders dan de cellen, die het die het interessante deel van de faseruimte opbouwen, verdelen in periodieke groepen en bij deze periodieke groepen behorende attractiegebieden.



## Het algoritme van het cell mapping-programma.

Om de toestand van een bepaalde cel bij te houden, worden er in het programma ,voor iedere cel, drie getallen gebruikt:

- Gr(Z) : groepnummer waartoe de cel behoort; iedere cel die tot een bepaalde periodieke groep of tot diens attractiegebied behoort, heeft hetzelfde groepnummer.
- S(Z) : stapnummer; geeft aan hoeveel stappen nodig zijn voordat deze cel wordt afgebeeld op een cel van een periodieke groep. Cellen die zelf onderdeel zijn van een periodieke groep hebben uiteraard een stapnummer gelijk aan nul.
- P(Z) : periodenummer; geeft aan hoe groot de periode is van een bepaalde periodieke oplossing. Alle cellen die tot dezelfde periodieke groep of tot diens attractiegebied behoren, hebben hetzelfde periodenummer.

Verder moet het programma onderscheid kunnen maken tussen drie soorten cellen:

- 1 - Cellen die nog niet aan de beurt geweest zijn in het cell mapping-programma; zij heten virgin-cells en om ze te kunnen herkennen worden bij de start de groepnummers van alle cellen op nul gezet.
- 2 - Cellen die op dit moment 'in proces' zijn. Indien een virgin-cell door het cell map-algoritme wordt opgeroepen, verandert het groepnummer in -1 (dit is een zuiver symbolische waarde om de cel te herkennen).
- 3 - Cellen die reeds het cell map-algoritme hebben doorlopen. Zij worden gekenmerkt door een positief groepnummer omdat zij ,door het algoritme, zijn toegewezen tot een bepaalde periodieke groep of attractiegebied.

Het cell map-algoritme werkt nu als volgt: men gaat uit van de beginvoorwaarden vastgelegd door het midden van een virgin-cell met groepnummer nul. Via cell map-operatie C wordt de beeldcel bepaald (bijvoorbeeld door numerieke integratie over een periode van  $2\pi$ ). Voor de cel die dan gevonden wordt bestaan er drie mogelijkheden:

- 1 - het groepnummer van de gevonden cel is een positief getal. Dit houdt in, dat de cel reeds toegewezen is bij een periodieke groep. Verdere integratie is niet meer nodig, omdat dit reeds in voorgaande stappen is gebeurd. Het groepnummer van de virgin-cell wordt nu gelijk aan het groepnummer van de gevonden beeldcel.
- 2 - het groepnummer van de gevonden cel is -1. Dit houdt in dat deze cel reeds een keer tijdens de run is gepasseerd. We hebben dus een nieuwe periodieke groep gevonden. Alle cellen van deze run krijgen nu een groepnummer dat 1 hoger is dan de laatst gevonden periodieke groep.
- 3 - het groepnummer van de gevonden cel is nul. Opnieuw wordt het midden van deze cel bepaald en met behulp van de cell mapping-operatie C wordt de volgende beeldcel bepaald, net zolang totdat situatie 1 of 2 optreedt.

Uiteraard wordt tijdens de run van het programma ook het stapnummer en periodenummer bijgehouden.

Het grote voordeel van de celmapping methode is, dat door het efficiënt opslaan van reeds gevonden informatie de integratietijd voor de cell mapping-operatie 'C' klein gekozen kan worden. Op die manier kan men vlug een globaal inzicht krijgen in het gedrag van het systeem op een redelijk groot gebied zonder dat voor iedere beginvoorwaarde een hele numerieke integratie uitgevoerd moet worden.

Het zal duidelijk zijn dat celgrootte, ligging van de cellen en de lengte van het integratie-interval (dit laatste vooral indien er sprake is van een chaotisch inschakelverschijnsel dat na uitdemping overgaat in een periodieke oplossing) van invloed zullen zijn op de nauwkeurigheid van de resultaten.

Bovenstaande is slechts een globale uitleg van het cell mapping-programma. Voor de wetenschappelijke onderbouwing wordt verwezen naar [1].

### 3 ANALYSE VAN DE VAN DER POL VERGELIJKING MET DE CELL MAP-METHODE

De differentiaalvergelijking van Van der Pol ziet er als volgt uit:

$$q'' - \mu(1-q^2)q' + q = 0$$

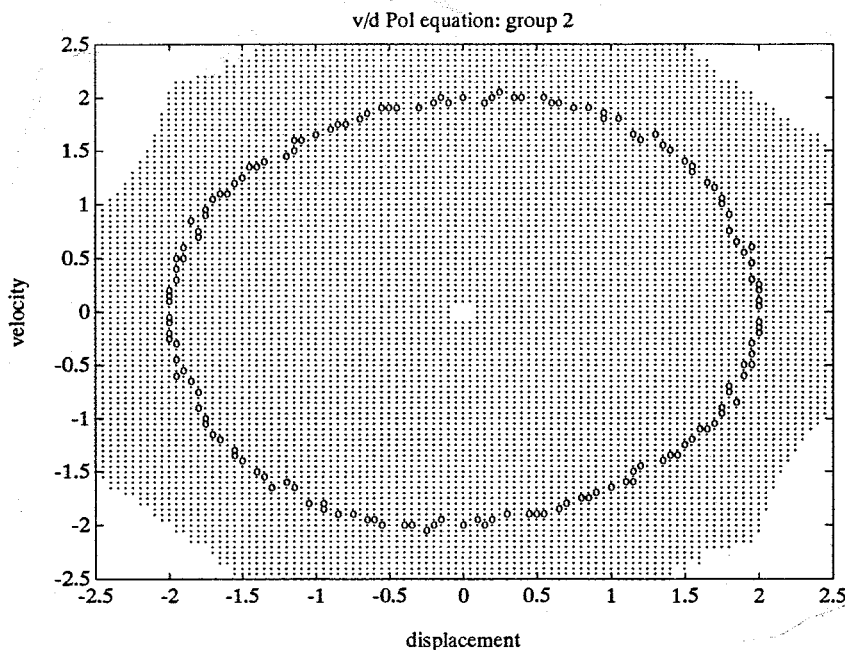
De analytische oplossing van deze differentiaalvergelijking, voor kleine waarden van  $\mu$  en weergegeven in de faseruimte, is een cirkel met straal twee (zie [2]).

We schrijven nu de tweede-orde differentiaalvergelijking om in een stelsel van twee eerste-orde differentiaalvergelijkingen (deze worden door het cell map-programma gebruikt):

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2; \\x_2' &= \mu(1-x_1^2)x_2 - x_1;\end{aligned}$$

Voor de berekening met het cell map-programma nemen we  $\mu=0.1$ . Verder nemen we als celgrootte: [0.04,0.04] en als integratienauwkeurigheid van de cell map-operatie C:  $\text{eps}= 1e-6$ .

In onderstaande figuur is het resultaat weergegeven:



Als tijdsinterval van integratie is 1.3 sec. genomen. Dit interval is vrij willekeurig gekozen omdat hier sprake is van een autonoom systeem (er is dus geen periodetijd). In het plaatje is de cirkel met straal 2 te zien (aangegeven met 'o').

Verder is het met '.' aangegeven gebied het attractiegebied van de stabiele periodieke oplossing.

Het witte oppervlak in het midden is opgebouwd uit negen P-1 oplossingen die instabiel zijn (ze hebben immers geen attractiegebied). Zij stellen de instabiele oplossing van de Van der Pol vergelijking in het punt (0,0) voor.

De witte gebieden aan de randen van het plaatje horen bij het attractiegebied van de stabiele periodieke oplossing, maar zijn door de cell map-operatie in de putcel terecht gekomen en als gevolg van de definitie van deze cel daar blijven steken.

De cell map-methode levert de juiste oplossing. Dit geeft vertrouwen in de werking van het programma. Een voordeel is dat voor het cell map-programma ook grotere waarden van  $\mu$  genomen kunnen worden. Voor deze grotere waarden geldt de analytische oplossing echter niet meer zodat we de resultaten moeten gaan vergelijken met numeriek bepaalde oplossingen (dit is hier verder niet uitgevoerd).

#### 4 ANALYSE VAN DE DUFFING VERGELIJKING MET DE CELL MAP-METHODE

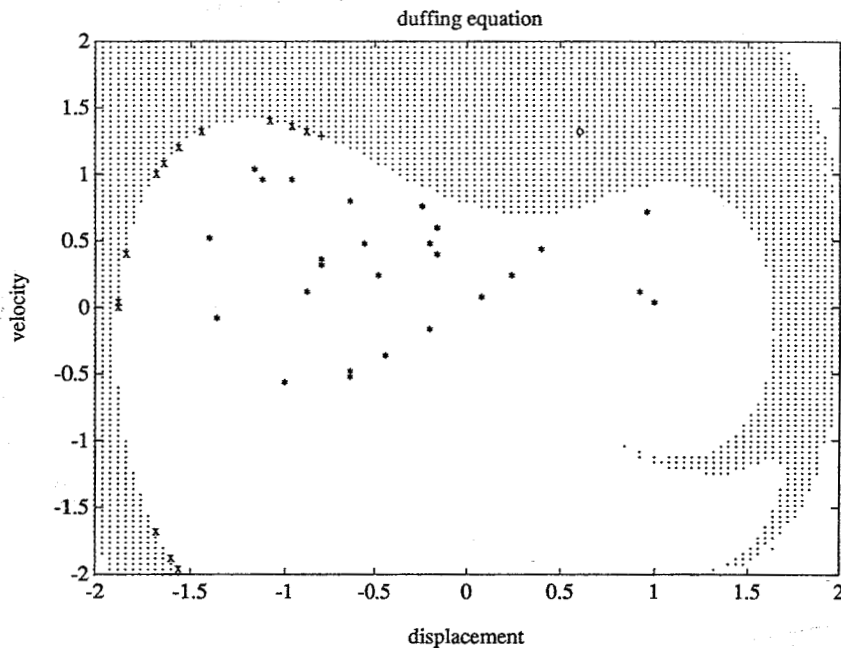
Als tweede wordt de differentiaalvergelijking van Duffing geanalyseerd. Ze ziet er als volgt uit:

$$q''' + dq' - q + \mu q^3 = a \cos(\omega t)$$

Als parameterwaardes nemen we in eerste instantie (om een eerste globale indruk van het gedrag te krijgen):

- $\mu=1$  (deze parameter wordt voor alle verdere berekeningen constant gehouden)
- $d=0.15$  ;  $a=0.3$  ;  $\omega=1$
- celgrootte:  $[0.04, 0.04]$
- integratienauwkeurigheid van celmap-operatie C:  $\text{eps}= 1e-6$
- gebied:  $-2 \leq q \leq 2$  ;  $-2 \leq q' \leq 2$

Indien deze waardes worden ingevoerd in het cell map-programma krijgen we het volgende resultaat te zien (als integratie-interval van de cell map-operatie C nemen we integratie over de periodetijd:  $2\pi$ ):

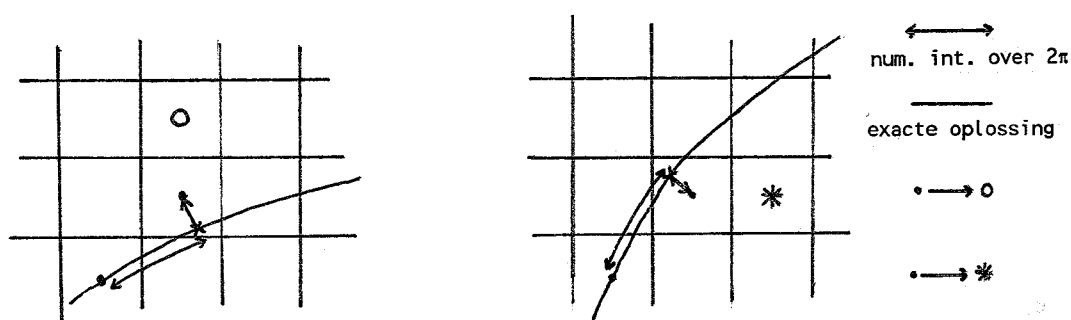


Er ontstaan drie periodieke oplossingen:

- aangegeven met o: stabiele periodieke oplossing met periode één (het cell map-algoritme komt immers vanuit deze cel, na één keer over  $2\pi$  integreren, weer op deze zelfde cel terecht). De '.' vormen het bijbehorende attractiegebied.

- aangegeven met \*: meerdere grote periodieke groepen die, na numerieke integratie vanuit punten van de (wit gelaten) bijbehorende attractiegebieden, tot één chaotische oplossing blijken te behoren.
- niet aangegeven: enkele cellen die in de sink-cell terecht zijn gekomen.
- aangegeven met +: een zadeloplossing met periode één. Het attractiegebied is aangegeven met 'x' en zou de hele rand tussen stabiele periodieke oplossing en chaotische oplossing moeten beslaan.

Dat het laatstgenoemde attractiegebied niet in zijn geheel gevonden wordt, heeft de volgende reden: het cell map-programma gaat uit van de celmidden om de volgende beeldcel te bepalen. Hierdoor kunnen de volgende situaties ontstaan:



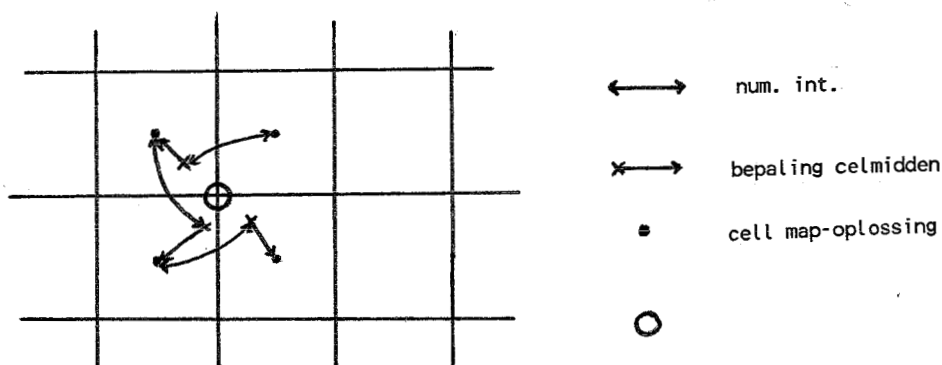
We zien dat de ligging van de cellen t.o.v. de werkelijke oplossing, door numerieke integratie over een lang tijdsinterval gevonden, beslist of de desbetreffende cel bij het juiste attractiegebied terecht komt (uiteraard zijn ook de lengte van het integratie-interval bij cell map-operatie  $C$  en de integratienauwkeurigheid van belang). Celverfijning kan een verbetering te zien geven (de cellen komen nu anders t.o.v. de oplossing te liggen) maar dit hoeft niet per definitie zo te zijn.

Als eerste zal onderzoek plaats vinden naar de invloed van de celgrootte op het gevonden resultaat. Uitkomsten zullen worden vergeleken met de uitgangsfiguur op de vorige bladzijde.

De resultaten zijn weergegeven in bijlage I. Symbolen voor de pijl geven het attractiegebied aan, achter de pijl staat de bijbehorende periodieke oplossing. Het is duidelijk te zien dat celverfijning leidt tot nauwkeurigere contouren van de verschillende attractiegebieden. Ook is te zien dat de celverfijning niet leidt tot het vinden van het hele attractiegebied van de zadeloplossing.

Het kiezen van een twee keer zo fijne cel houdt wel in, dat de rekentijd ongeveer vier keer zo lang wordt. Lengte van de rekentijd en nauwkeurigheid van de contour zullen tegen elkaar moeten worden afgewogen bij het bepalen van de optimale celgrootte waarmee een bepaald probleem wordt doorgekend.

Het feit dat bij een celgrootte van  $[0.1, 0.1]$  een stabiele P-1 en P-5 oplossing worden gevonden i.p.v. één stabiele P-1 oplossing, is weer een gevolg van het feit dat het programma rekent met en uitgaat van celmidden. Daardoor is het mogelijk dat de gevonden oplossing iedere keer weer wordt weggetrokken van de exacte oplossing (zie onderstaande figuur):



#### Variatie van integratienauwkeurigheid 'eps':

Als tweede is de invloed van de integratienauwkeurigheid 'eps' onderzocht. Deze integratienauwkeurigheid bepaalt in welke beeldcel het programma na integratie terecht komt. Het blijkt dat ze van weinig invloed is zolang ze niet groter wordt gekozen dan de ordegrootte van de cel.

De berekeningen zijn uitgevoerd bij de uitgangscelgrootte van  $[0.04, 0.04]$ . De respectievelijke integratienauwkeurigheden zijn:  $\text{eps} = 1e-3$ ,  $\text{eps} = 1e-2$  (dit is dus in ordegrootte van de cel) en  $\text{eps} = 1e-1$ . De resultaten zijn weergegeven in bijlage II. Van de laatste berekening zijn geen resultaten opgenomen, omdat deze tot pure onzin leidde.

#### Variatie van dempingsconstante 'd':

Het volgende waarnaar gekeken is, is de invloed van de grootte van de dempingsconstante  $d$  (bij de uitgangscelgrootte). De resultaten zijn weergegeven in bijlage III. Duidelijk is te zien, dat hoe groter de dempingsconstante, hoe kleiner het attractiegebied van de periodieke P-1 oplossing wordt. Een verklaring hiervoor zou kunnen zijn, dat door vergroting van 'd' het systeem steeds sterker

gedempt wordt. Daardoor wordt het moeilijker om een periodieke oplossing in stand te houden. Het attractiegebied van deze oplossing wordt daardoor kleiner.

Het feit, dat er soms meer dan één 'o' gevonden wordt is weer te verklaren door de ligging van de cellen t.o.v. de oplossing. Door de constante celgrootte verandert de ligging van de cellen weliswaar niet, maar door verandering van 'd' verandert wel de ligging van de P-1 oplossing.

#### Variatie van excitatie amplitude 'a':

Door de excitatie-amplitude 'a' te vergroten (bij de uitgangscelgrootte) zien we dat het attractiegebied van de stabiele periodieke P-1 oplossing steeds groter wordt. Een verklaring hiervoor zou kunnen zijn dat bij constante demping ( $d=0.15$ ) de excitatie-amplitude steeds groter wordt. Daardoor wordt als het ware gemakkelijker een periodieke beweging in stand te houden. De resultaten zijn weergegeven in bijlage IV.

Opmerkelijk is, dat voor  $a=0.32$  geen chaotische oplossing meer gevonden wordt. Deze is vervangen door een instabiele (er zijn maar een paar transiënte cellen) P-3 oplossing, in de figuur aangegeven met '+'. Ook bij deze serie plaatjes geldt bovenstaande verklaring voor het vinden van meer dan één 'o' op de plaats van de P-1 oplossing.

#### Variatie van de 'ligging' van het integratie-interval:

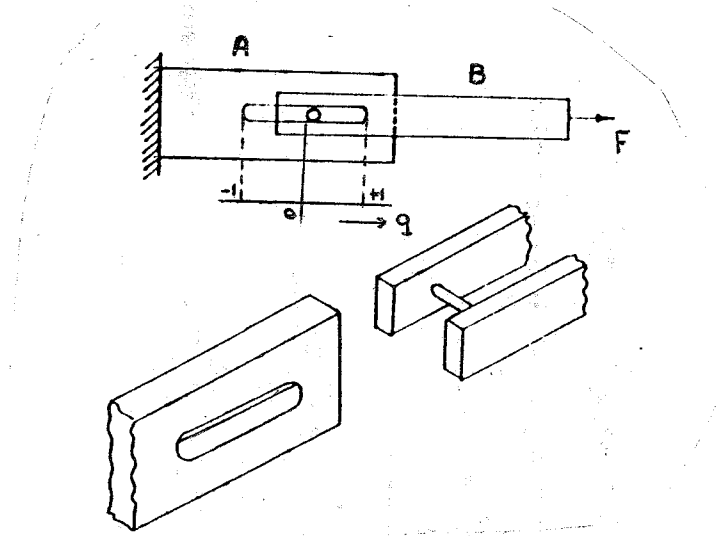
Dit houdt in, dat we de integratietijd niet van  $0 - 2\pi$  laten lopen maar van  $0+\Phi - 2\pi+\Phi$ , waarbij voor  $\Phi$  geldt:

$$\Phi = [ 0 , \frac{1}{4}\pi , \frac{1}{2}\pi , \dots 2\pi ]$$

De resultaten zijn in bijlage V weergegeven. Mooi is te zien hoe het attractiegebied van de P-1 en de P-1 oplossing zelf roteren rond de chaotische attractor. Het plaatje dat hoort bij  $\Phi=0$  dient uiteraard gelijk te zijn aan het plaatje bij  $\Phi=2\pi$ .



De door ons beschouwde oscillator ziet er als volgt uit:



Hij bestaat uit een ingeklemd deel A en een bewegend deel B. Deel B kan vrij bewegen wat tot uitdrukking komt in de bewegingsvergelijking (er is geen stijfheids- of dempingsterm). De botsing van deel B met deel A aan het einde van de gleuf wordt inelastisch verondersteld:

$$q' \rightarrow -rq' ; \quad r < 1$$

waarbij  $r$  de zogenaamde restitutie-coëfficiënt is. Deel B wordt geëxciteerd door een kracht  $F$ . Voor dit probleem wordt slechts een periodieke kracht beschouwd.

$$F = \gamma \sin(t)$$

Hierin stelt  $\gamma$  de amplitude van de kracht voor en  $t$  de tijd.

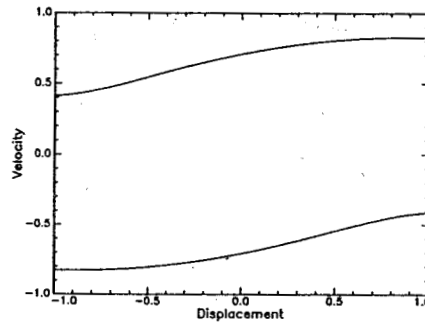
Dit leidt tot het volgende stelsel vergelijkingen ( $q$  is de verplaatsing van deel B t.o.v. deel A, waarbij  $q=0$  overeenkomt met het midden van de gleuf en  $q=\pm 1$  met de uiteinden, zie bovenstaande figuur):

$$q'' = \gamma \sin(t) \quad \text{voor } |q| < 1$$

$$q' \rightarrow -rq' \quad \text{voor } |q| = 1$$

$$A \rightarrow \gamma = 0.20826$$

Voor de verdere analytische uitwerking van het probleem wordt verwezen naar [3]. Hieruit blijkt dat voor  $r=0.5$  en  $\gamma=0.20826$  voor bepaalde beginvoorwaarden een P-1 oplossing ontstaat die er in het fasevlak als volgt uitziet:



let op: hier wordt de hele beweging geprojecteerd op het fasevlak. In de tot nu toe steeds gebruikte Poincaré map wordt de beweging na een vast tijdsinterval (meestal  $2\pi$ ) geprojecteerd.

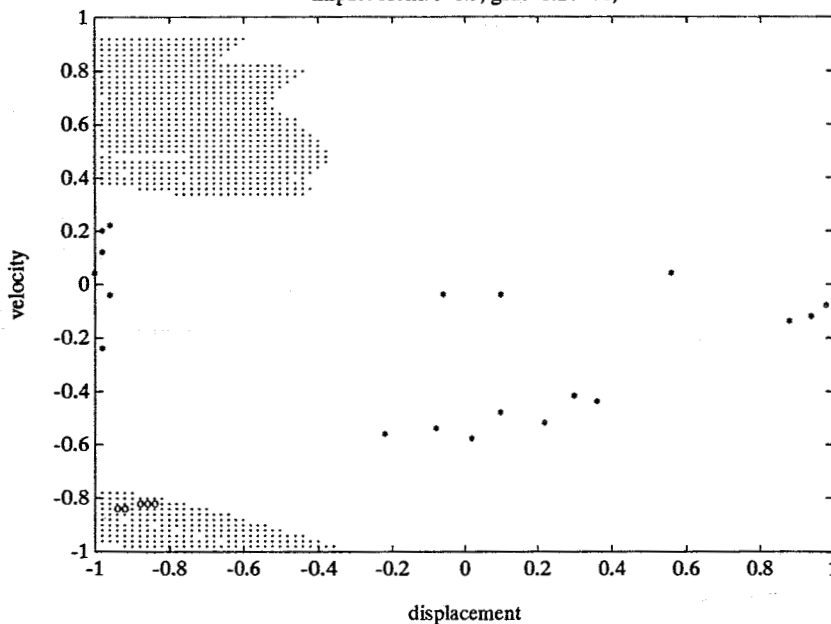
In het cell map-programma werken we weer met twee eerste-orde differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} q' &= y; \\ y' &= \sin(t) \quad \text{voor } q < 1; \\ y &\rightarrow -ry \quad \text{voor } q = 1; \end{aligned}$$

Indien we bovenstaande waarden invoeren ( $\gamma=0.20826$ ;  $r=0.5$ ) bij een celgrootte van  $[0.02, 0.02]$  ontstaat het volgende resultaat:

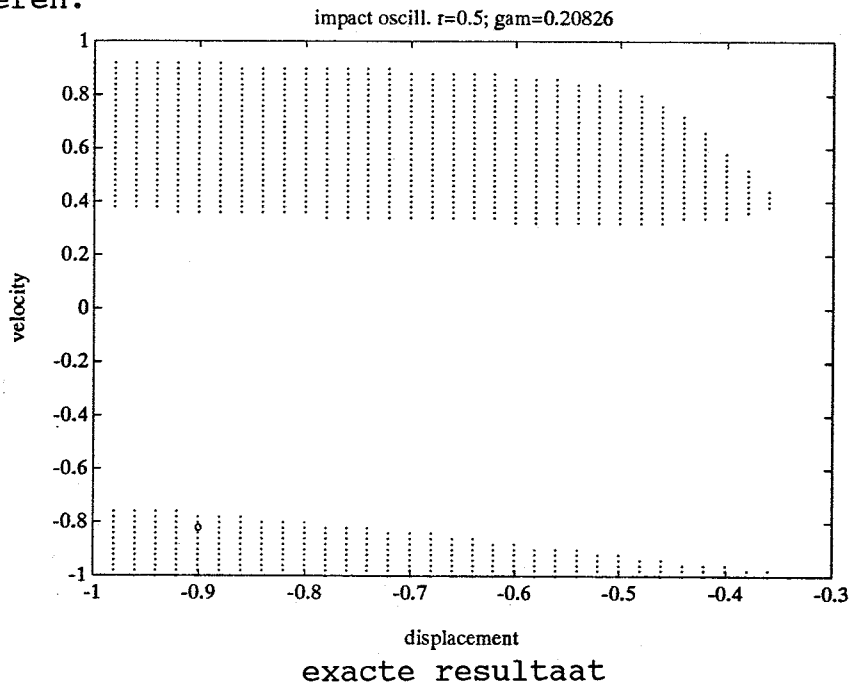
uitgangsfiguur

impact oscill.  $r=0.5$ ;  $\gamma=0.20826$ ;



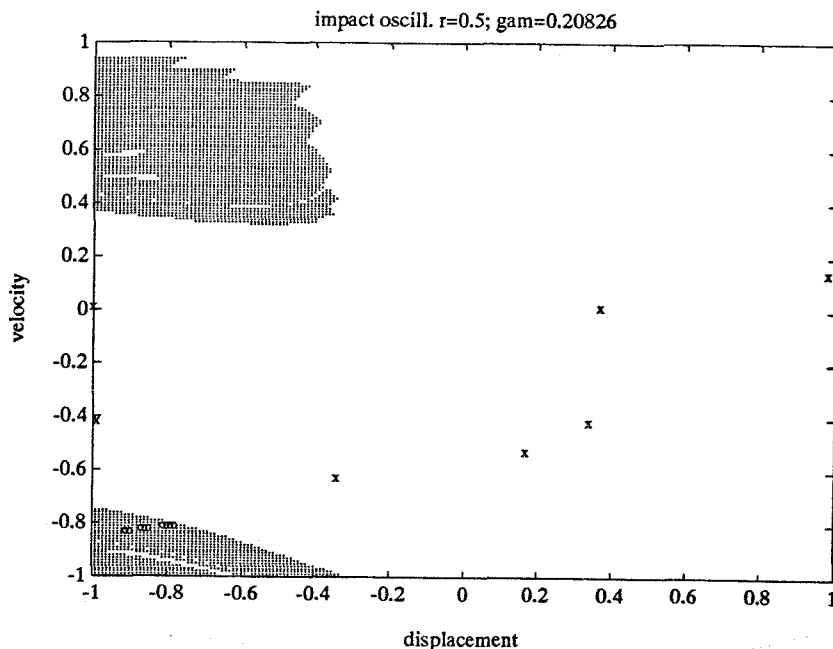
We zien dat er vijf P-1 groepen (aangegeven met 'o') gevonden worden. Uit het feit dat de vijf 'o' van de vijf P-1 oplossingen dicht bij elkaar liggen valt te concluderen dat het waarschijnlijk om één P-1 oplossing gaat die overeenkomt met de analytisch bepaalde periodieke oplossing (de reden hiervoor is bij de vergelijking van Duffing reeds behandeld). Vandaar dat de bijbehorende attractiegebieden als één geheel zijn weergegeven met '.'. Verder wordt er nog een P-19 oplossing gevonden, aangegeven met '\*', die na integratie over een lang tijdsinterval, een chaotische oplossing blijkt te zijn. Als laatste ligt er in het attractiegebied van de vijf P-1 oplossingen een klein gebiedje dat afgebeeld wordt bij het chaotische attractiegebied (witte gebied). Na langdurige numerieke integratie blijkt dat dit gebiedje wel degelijk bij het attractiegebied van de vijf P-1 oplossingen hoort.

Indien we de figuur vergelijken met het 'exacte' resultaat zien we dat ook de vorm van het attractiegebied van de vijf P-1 oplossingen niet juist is. Dit 'exacte' resultaat is gevonden door over een veel groter tijdsinterval dan de tot nu toe gekozen  $2\pi$  te integreren.



### Celverfijning:

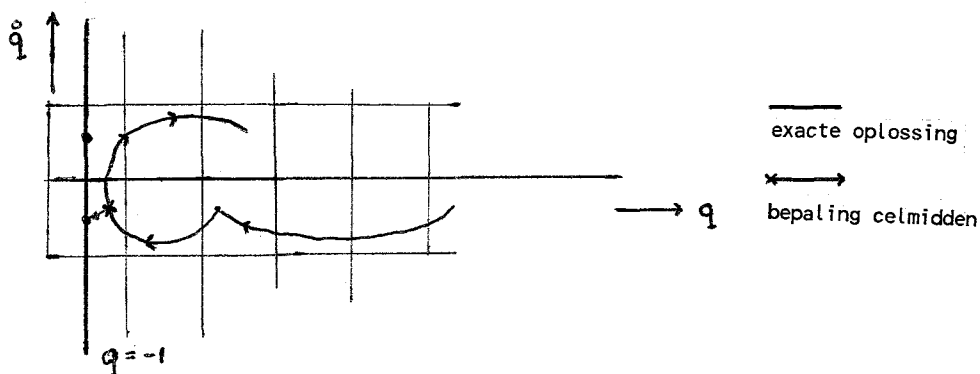
Als eerste zullen we een twee keer zo fijne cel kiezen  $[0.01, 0.01]$  om te zien of de resultaten beter worden. We hadden bij de vergelijking van Duffing reeds geconcludeerd dat celverfijning niet per definitie hoeft te leiden tot het nauwkeuriger bepalen van de ligging van periodieke oplossingen. Wel is het zo dat door celverfijning de contouren van de attractiegebieden duidelijker zichtbaar worden.



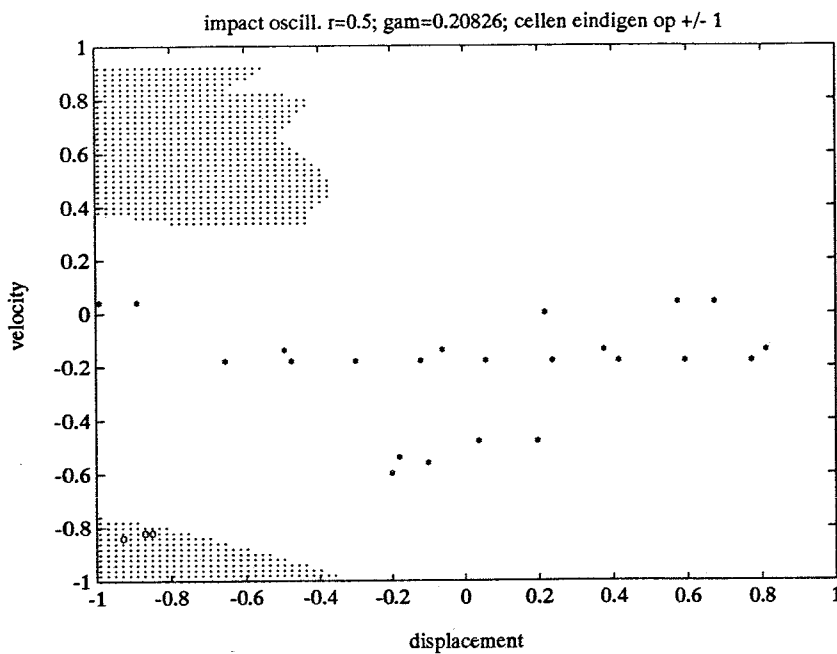
Indien het resultaat wordt vergeleken met het exacte dan zien we dat de gewenste P-1 oplossing nog steeds niet wordt gevonden. Ook is het nog steeds zo dat binnen het attractiegebied van de periodieke oplossing 'gaten' zitten. De vorm ervan is wel beter geworden. De chaotische oplossing is in dit geval aangegeven met 'x'.

#### Positie van de cellen t.o.v. de gleuf-uiteinden:

Tot nu toe is het bij iedere celgrootte zo geweest dat de cellen met hun middens op  $q=\pm 1$  lagen. Daardoor is het zo dat een beweging die in de buurt van deze waarden komt hierop wordt vastgezet (het cell map-algoritme werkt immers met celmiddens). Het zou echter best zo kunnen zijn dat deel B zich in werkelijkheid van de wand afbeweegt (zie onderstaande tekening).



Er zouden dus betere resultaten moeten ontstaan door de middens niet op  $q=\pm 1$  te kiezen. Indien dit wordt toegepast zien we het volgende (zie figuur op de volgende blz.):



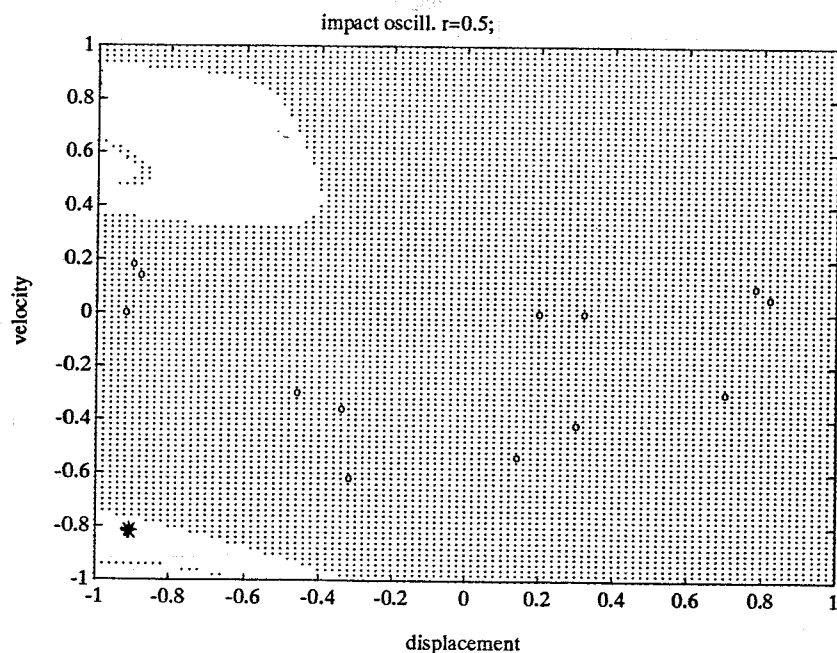
celgrootte: [0.019802, 0.019802])

Weer wordt de verwachte P-1 oplossing niet gevonden. Ook is de vorm van het attractiegebied van de gevonden periodieke oplossing niet juist. De enige verbetering is dat dit attractiegebied nu wel één geheel vormt (zonder gaten).

#### Verlenging van het integratie-interval:

Tot nu toe hebben we als cell map-operatie steeds de integratie van nul tot  $2\pi$  genomen. Omdat we bij dit probleem vaak te maken hebben met een uitdempend chaotisch inschakelverschijnsel wordt, door het integratie-interval van de cell map-operatie langer te kiezen, de oplossing over een groter tijdsinterval bekeken alvorens het algoritme beslist of een bepaalde cel bij het periodieke of chaotische attractiegebied hoort. Daardoor zouden de resultaten nauwkeuriger moeten worden.

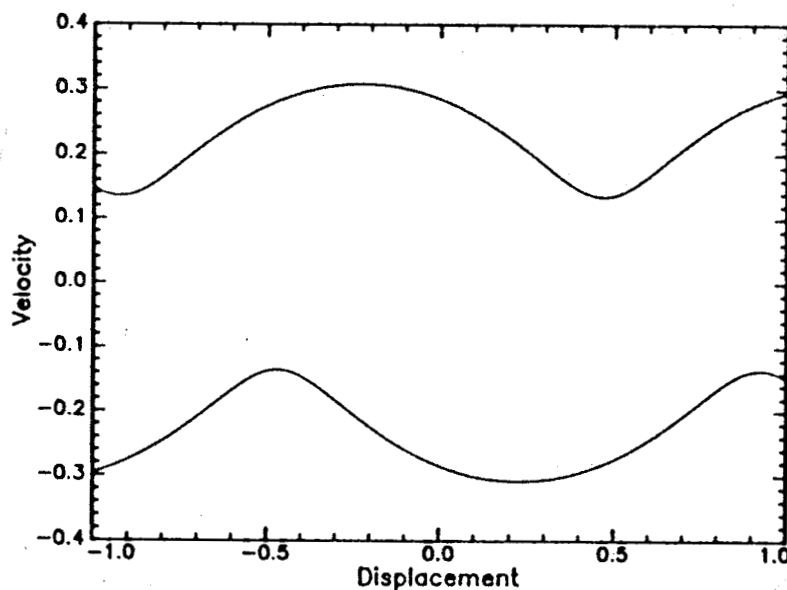
In onderstaande figuur zijn de resultaten weergegeven (twee keer zo lange integratie-tijd):



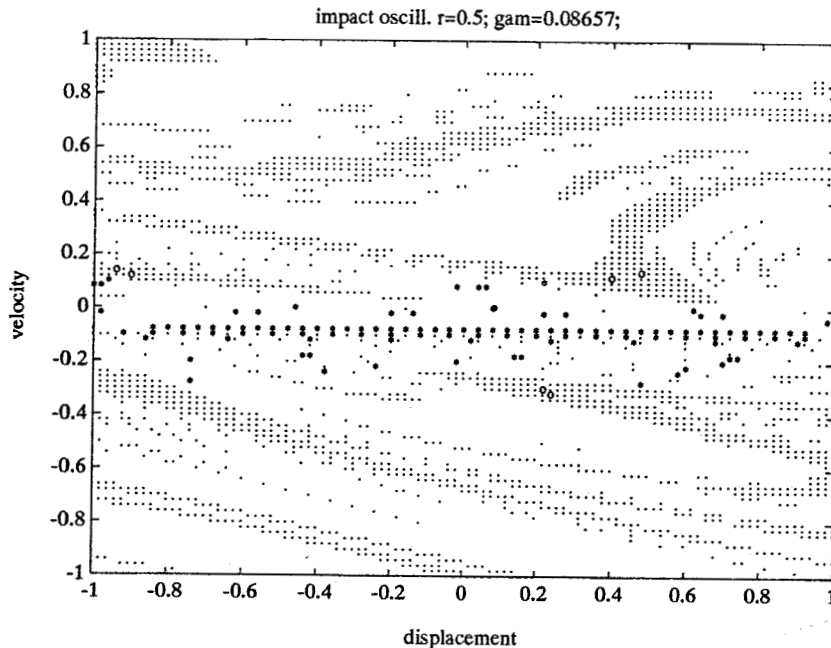
Nu wordt de P-1 oplossing wel gevonden (aangegeven met een '\*'). Ook de vorm van het bijbehorende attractiegebied (wit) is goed in overeenstemming met het 'exacte' resultaat. Helaas is het wel weer zo dat dit attractiegebied geen mooi dicht oppervlak meer is. Omdat dit programma geschreven is om snel een globale indruk te krijgen van oplossingen en ligging van attractiegebieden van een bepaald probleem, is het belangrijk dat de periodes van de oplossingen en de contouren van de attractiegebieden juist zijn. Verlenging van het integratie-interval is dus een goede optie om betere resultaten te krijgen. Vergelijken we bijvoorbeeld de resultaten van celverfijning, vier keer zolang rekentijd als bij uitgangsfiguur, met die van een langere integratietijd, in dit geval twee keer zolang rekentijd als bij uitgangsfiguur, dan zien we dat er sneller, maar ook nauwkeurigere resultaten verkregen worden. Celverfijning leidt immers alleen tot duidelijkere contouren. Het geeft geen garantie dat de ligging van de attractiegebieden ook daadwerkelijk goed is. Dit laatste wordt bepaald door de ligging van de cellen t.o.v. de oplossing. (zie vergelijking van Duffing)

$$B \rightarrow \gamma = 0.08657$$

Als volgende probleem beschouwen we:  $r=0.5$ ,  $\gamma=0.08657$ . Uit [3] volgt dat voor dit probleem, bij geschikte keuze van beginsnelheid:  $y_0$  en tijd waarop de kracht beschouwd wordt:  $t_0$ , een P-3 oplossing ontstaat. In de faseruimte ziet deze er als volgt uit:



Invoeren van deze waarden voor gamma en r bij een uitgangscelgrootte van [0.02,0.02] leidt tot het volgende resultaat:

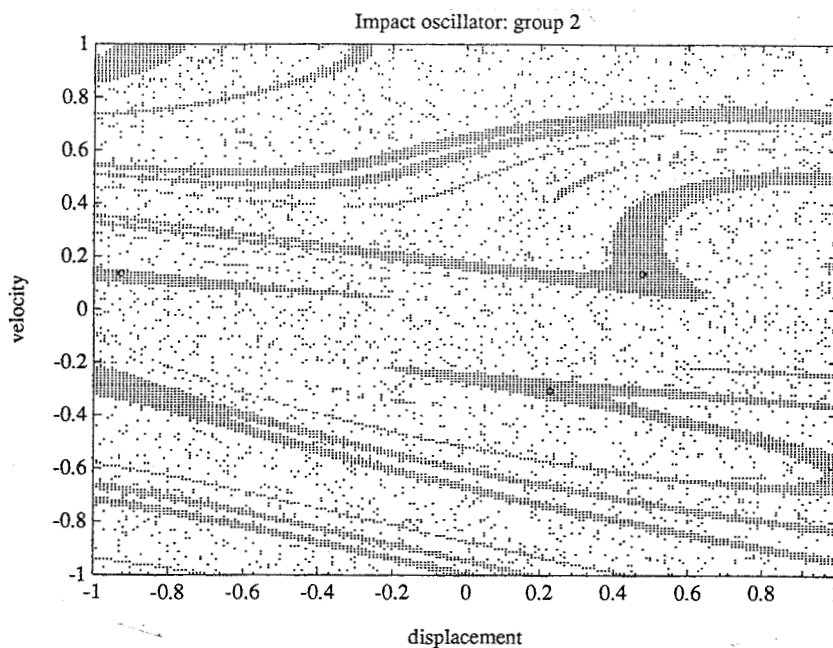


Er ontstaan twee P-3 oplossingen (aangegeven met 'o') en een zeer grote periodieke groep (aangegeven met '\*') met het bijbehorende witte attractiegebied (de '.' horen bij de twee P-3 oplossingen). Deze grote periodieke groep blijkt na numerieke integratie een chaotische oplossing te zijn.

Door de paarsgewijze ligging (de 'o' liggen twee en twee bij elkaar) van de twee P-3 oplossing zouden deze in werkelijkheid op de gezochte P-3 oplossing kunnen duiden.

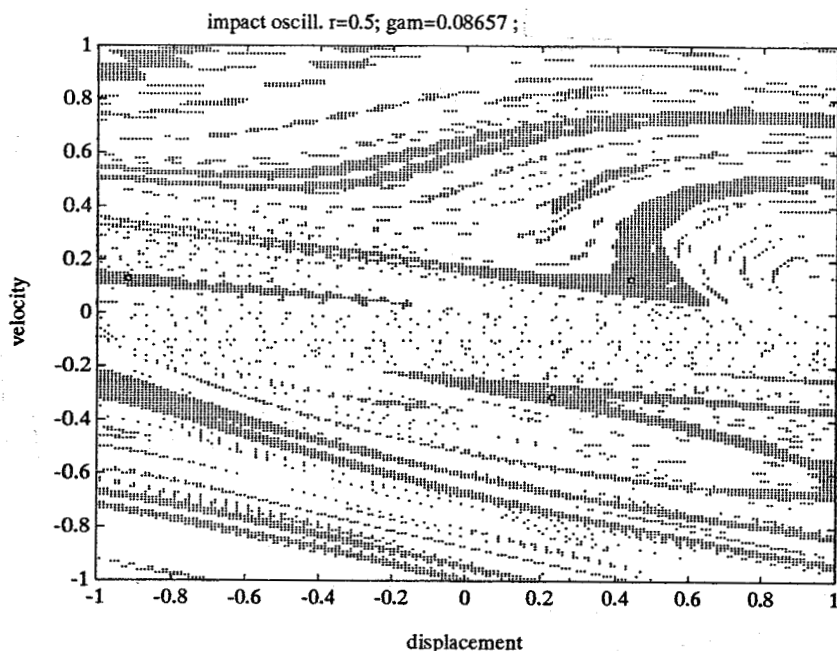
In de onderstaande figuur is de 'exacte' oplossing weergegeven. Deze is weer gevonden door een langdurige numerieke integratie vanuit elke cel op te starten.

Alleen de periodieke oplossing ('o') en het bijbehorende attractiegebied ('.') is weergegeven. Het witte gebied is weer het attractiegebied van de chaotische oplossing.



## Celverfijning:

Als eerste zal weer celverfijning worden toegepast om te zien of de resultaten beter worden. De celgrootte wordt nu  $[0.01, 0.01]$ :



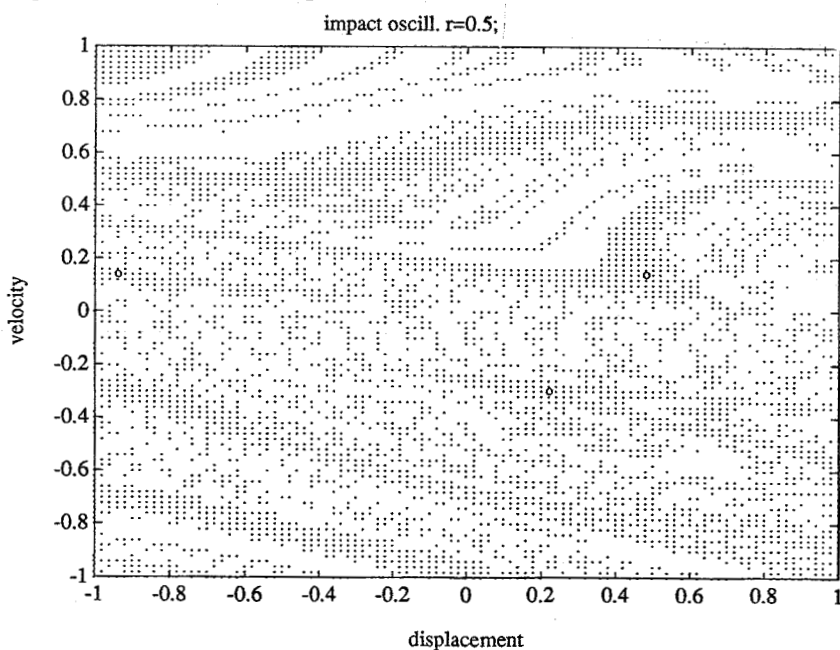
De P-3 oplossing ('o') wordt hier, bij toeval, wel gevonden. Celverfijning leidde immers alleen tot het duidelijker bepalen van de contouren van de verschillende attractiegebieden (zie Duffing vergelijking). Het is dan ook te zien dat de contouren van de attractiegebieden ('.') beter beginnen te lijken op die van de 'exacte' oplossing.

Bij een gedetailleerdere vergelijking zien we toch verschillen. De meeste gebieden zijn te wit. Dit zou dus een verkeerd beeld kunnen geven van het gedrag van het systeem.

De chaotische oplossing is weer niet weergegeven.

## Verlenging van het integratie-interval:

Door het integratie-interval van de cell map-operatie  $C$  te verlengen (twee keer zo lang) en als celgrootte  $[0.02, 0.02]$  te nemen krijgen we de volgende resultaten.





Opvallend is dat de P-3 oplossing ('o'), met een vrij grove cel, hier wel meteen wordt gevonden. Ook zijn er veel minder witte gebieden te zien. Dit komt overeen met het algemene beeld van het systeem dat door de exacte oplossing wordt opgeroepen. Alleen de contouren van de verschillende attractiegebieden zijn niet erg duidelijk.

Ook hieruit blijkt weer dat verlenging van het integratie-interval een goede optie is om snel betere resultaten te krijgen. Sterke punten van deze optie zijn dat de juiste periodes van de periodieke oplossingen gevonden worden en dat er een goede globale indruk van het gedrag van het systeem over een groot gebied wordt verkregen.

## 6 ALGEMENE CONCLUSIES

- het cell map-programma blijkt goed te werken. De gevonden resultaten komen, na juiste interpretatie, overeen met de in de literatuur reeds gevonden oplossingen.
- de grootte van de integratie-nauwkeurigheid 'eps' blijkt van weinig invloed te zijn op de resultaten zolang de orde-grootte ervan kleiner is dan de celgrootte.
- celverfijning leidt alleen tot duidelijkere contouren van de attractiegebieden. Zij leidt niet tot het nauwkeuriger bepalen van de periodes van de periodieke oplossingen of tot het nauwkeuriger bepalen van de ligging en vorm van de attractiegebieden.
- de juistheid van ligging en vorm van de attractiegebieden en de juistheid van de gevonden periodes van de periodieke oplossingen wordt bepaald door de integratie-nauwkeurigheid 'eps', de lengte van het integratie-interval van de cell map-operatie en de ligging van de cellen t.o.v. de exacte oplossing.
- over de invloed van de ligging van de cellen t.o.v. discontinuïteiten is moeilijk een uitspraak te doen. Verandering van de positie van de cellen leverde de ene keer betere resultaten op dan in de uitgangssituatie, de andere keer slechtere.
- een prima optie om snel betere resultaten en een betere indruk van het gedrag van het systeem te krijgen is de lengte van het integratie-interval van de cell map-operatie twee keer zo groot te kiezen. Het hangt hierbij van de gekozen celgrootte af hoe duidelijk de contouren van de attractiegebieden zijn. Hierbij wordt opgemerkt dat een twee keer zo lang integratie-interval leidt tot een twee keer zo lange rekentijd dan bij de gekozen uitgangssituatie. Een twee keer zo kleine cel leidt tot een vier keer zo lange rekentijd.

## LITERATUUR

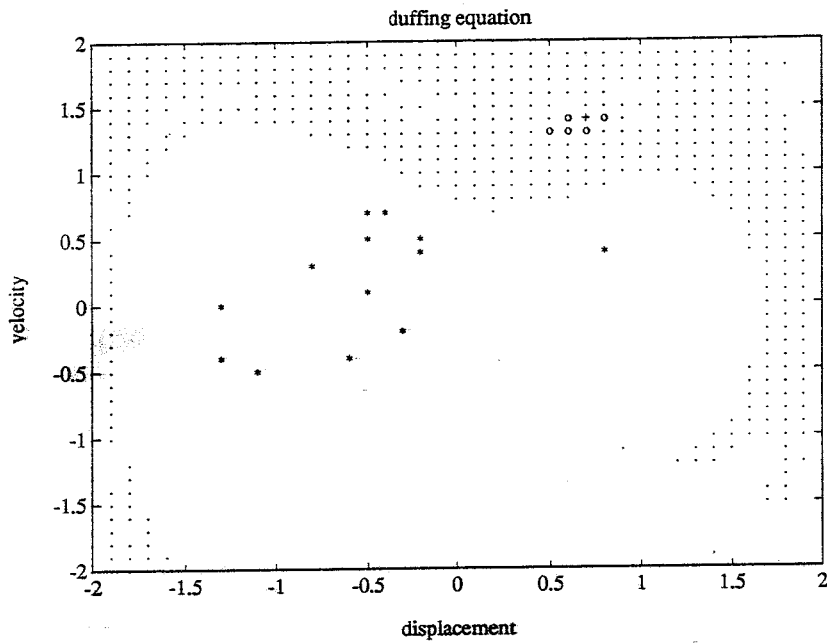
- 1 Hsu, C.S., "A Theory of Cell-To-Cell Mapping Dynamical Systems," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 47,1980, pp.931-939.
- 2 van Campen, D.H., "Niet-lineaire Dynamica," T.U.E.,1989, pp. 3.2 - 3.6
- 3 Li, G.X., Rand, R.H., Moon, F.C., "Bifurcations and chaos in a forced zero-stiffnes impact oscillator," Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 25, No 4,1990, pp. 417-432
- 4 de Jager, M.K.J., "Chaotische Dynamica En Fundamentele Werktuigbouwkunde," T.U.E.,1991.

**BIJLAGES I - V**

Bijlage I

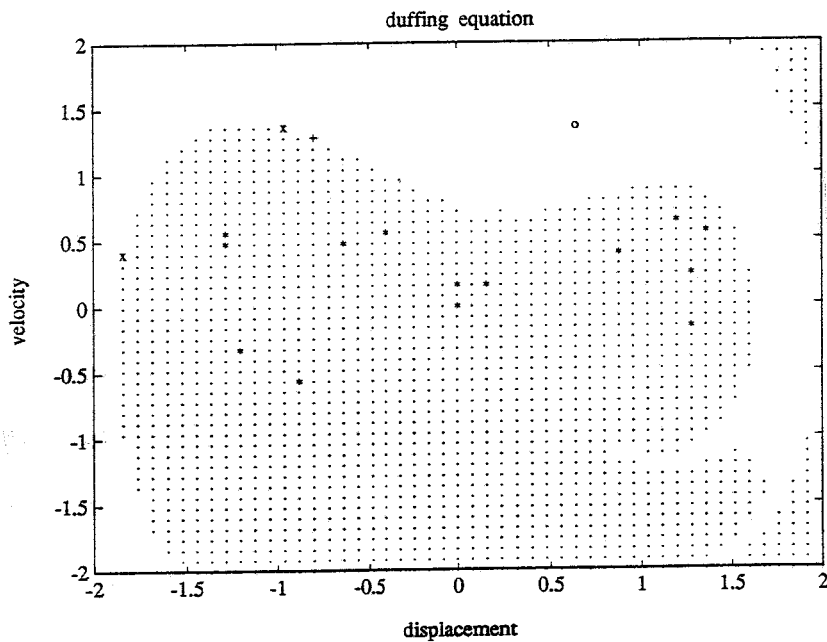
CELVERFIJNING BIJ DUFFING VERGELIJKING:  $a=0.3$ ;  $d=0.15$ ;  $w=1$ ;  $\epsilon=1e-6$

celgrootte : [0.1,0.1]



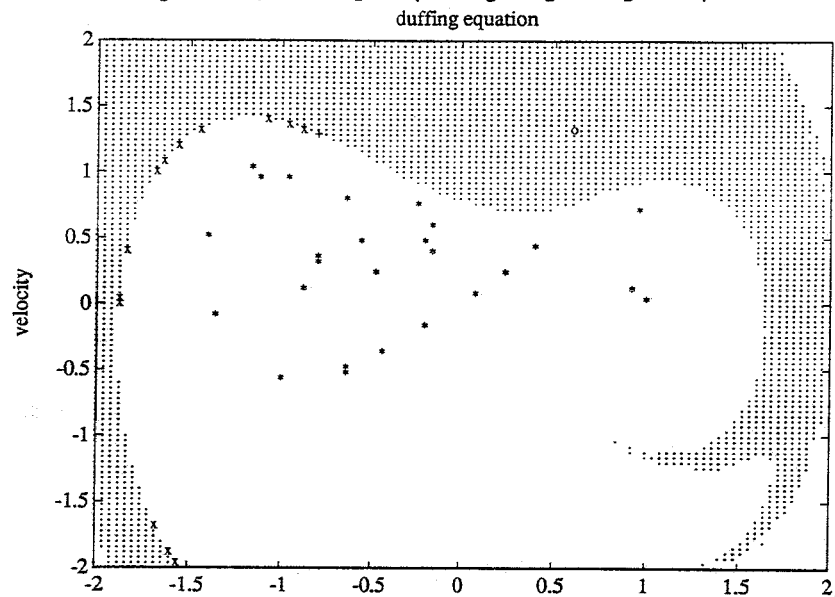
per: .  $\rightarrow$  o,+  
chaos: wit  $\rightarrow$  \*

celgrootte : [0.08,0.08]

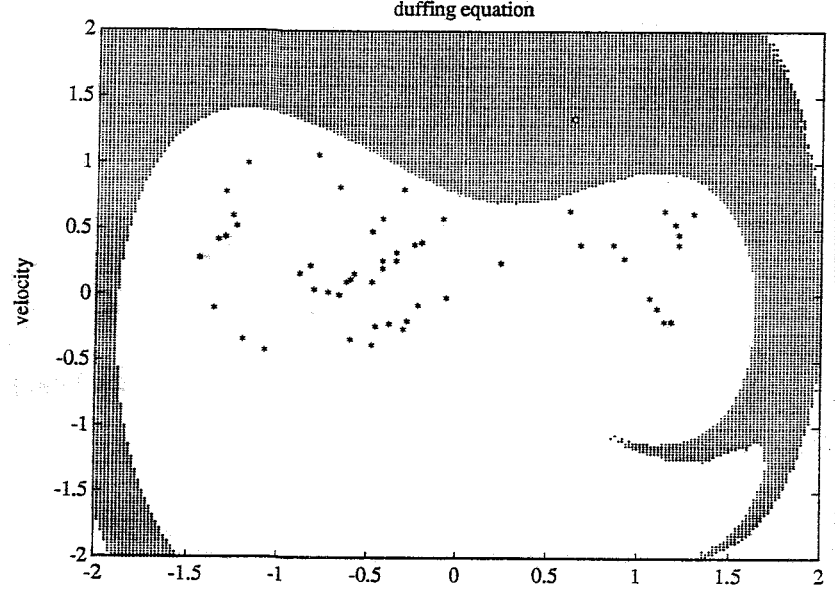


per: wit  $\rightarrow$  o  
chaos: .  $\rightarrow$  \*  
zadel: x  $\rightarrow$  +

celgrootte : [0.04,0.04] (uitgangsfiguur)

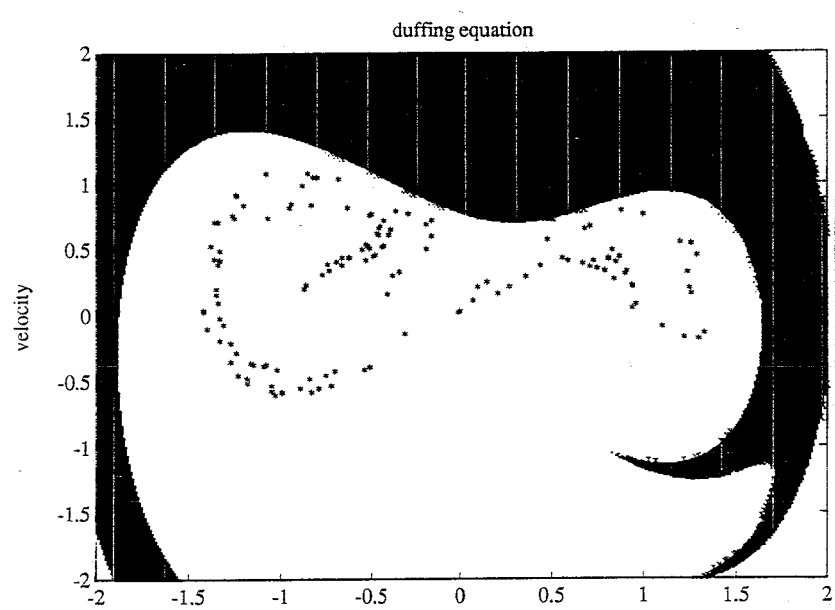


celgrootte : [0.02,0.02] displacement



per: . -> o  
chaos: wit -> \*

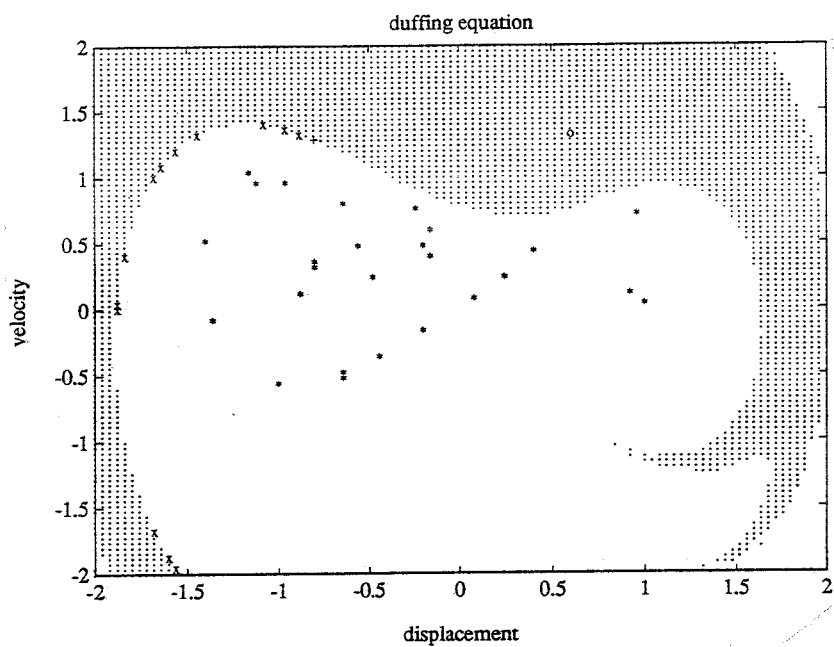
celgrootte : [0.01,0.01] displacement



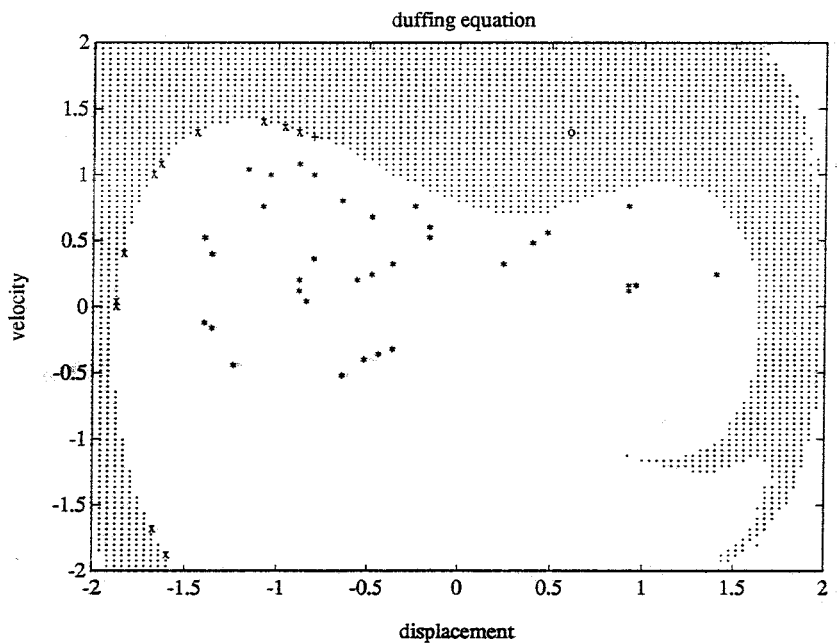
per: . -> o  
chaos: wit -> \*  
zadel: x -> +

# Bijlage II

VARIATIE INTEGRATIENAUWKEURIGHEID BIJ DUFFING VERGELIJKING:  
a=0.3; d=0.15; w=1; celgrootte:[0.04,0.04]

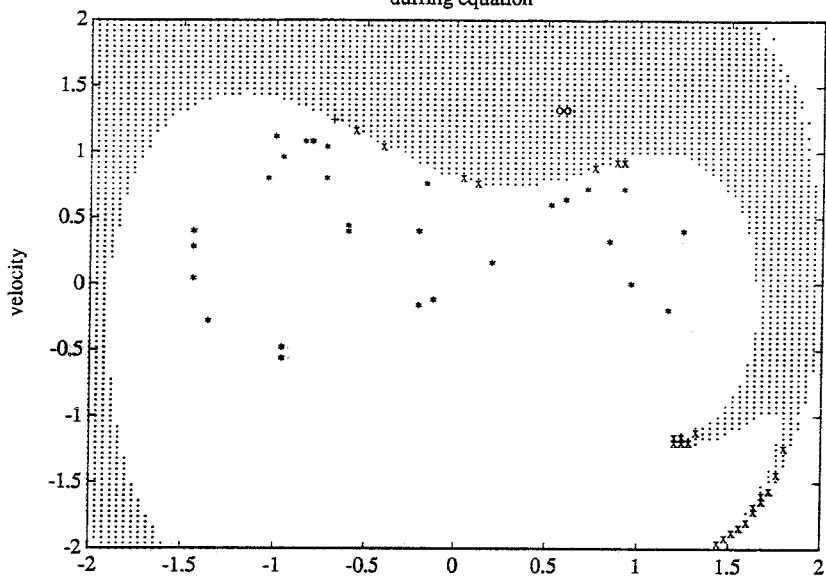


uitgangsnauwkeurigheid



eps= 1e-3

duffing equation



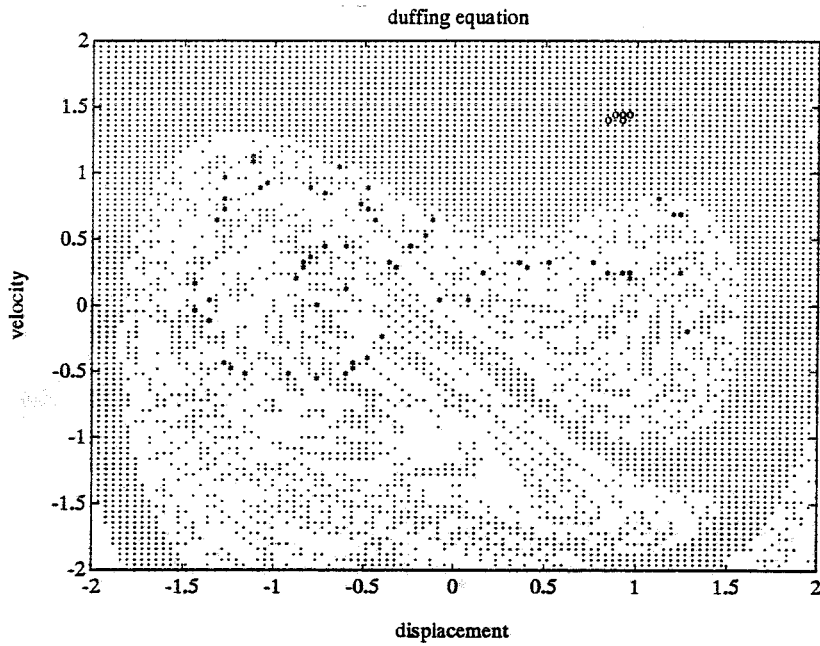
displacement

eps= 1e-2

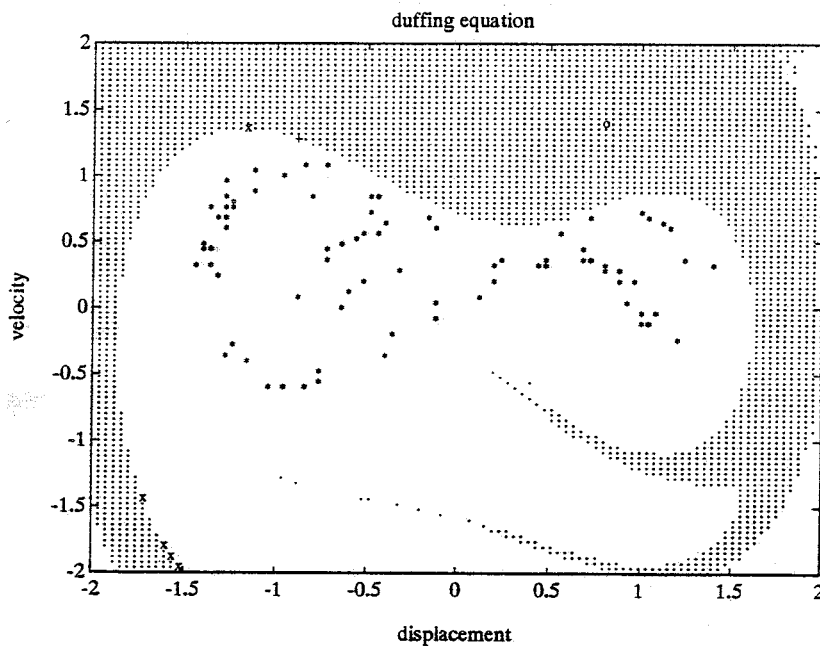


Bijlage III

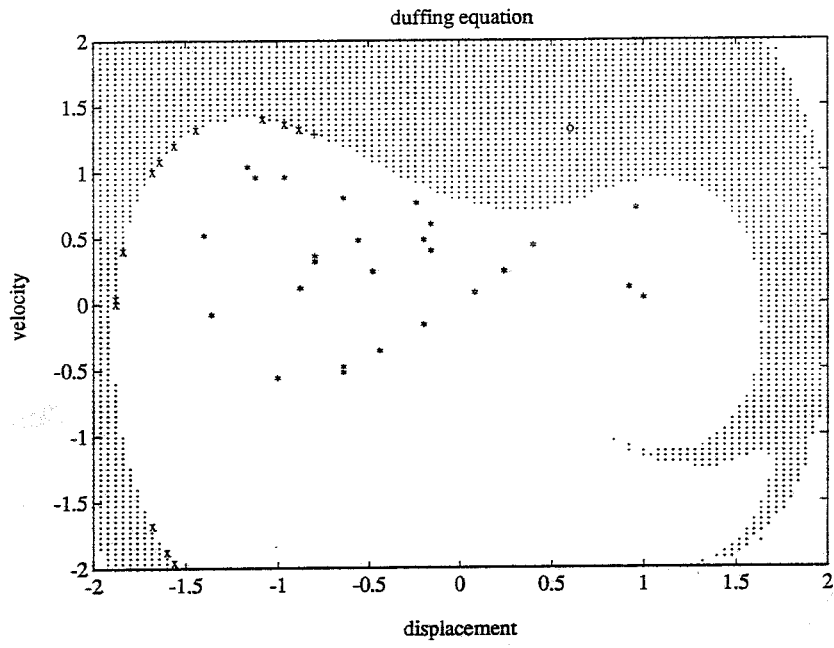
VARIATIE VAN DEMPINGSCONSTANTE 'd' BIJ DUFFING VERGELIJKING:  
a=0.3; w=1; eps=1e-6; celgrootte: [0.04,0.04]



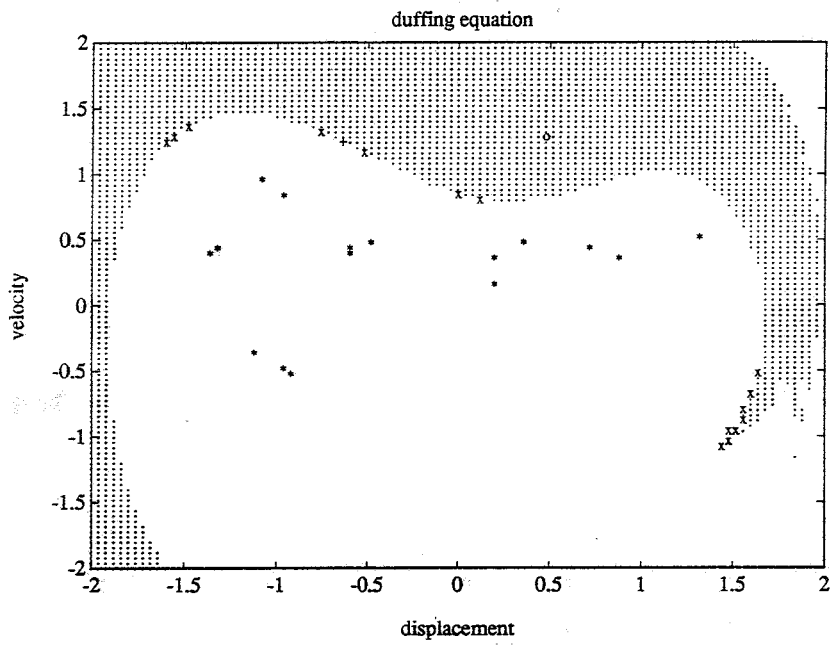
d=0.13



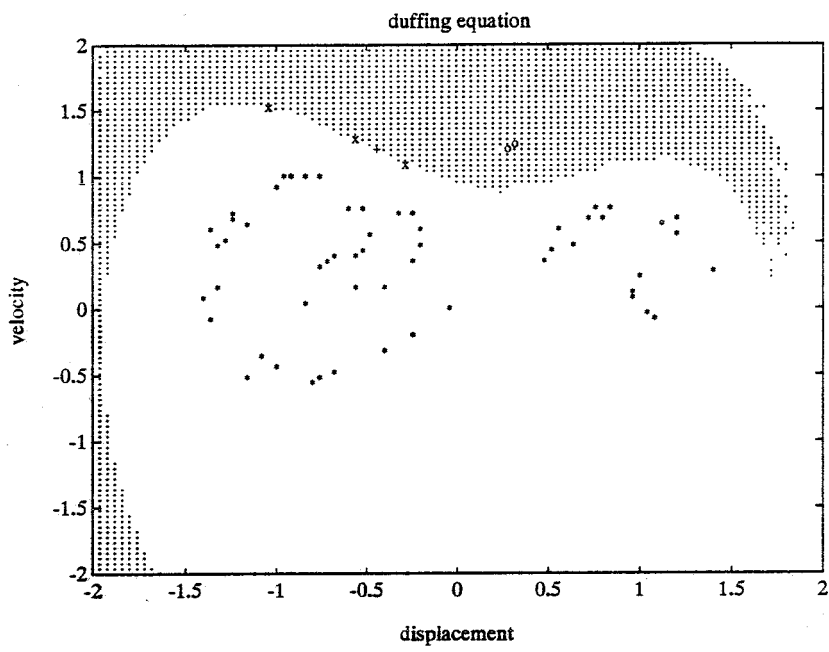
d=0.14



uitgangsgrootte dempingsconstante



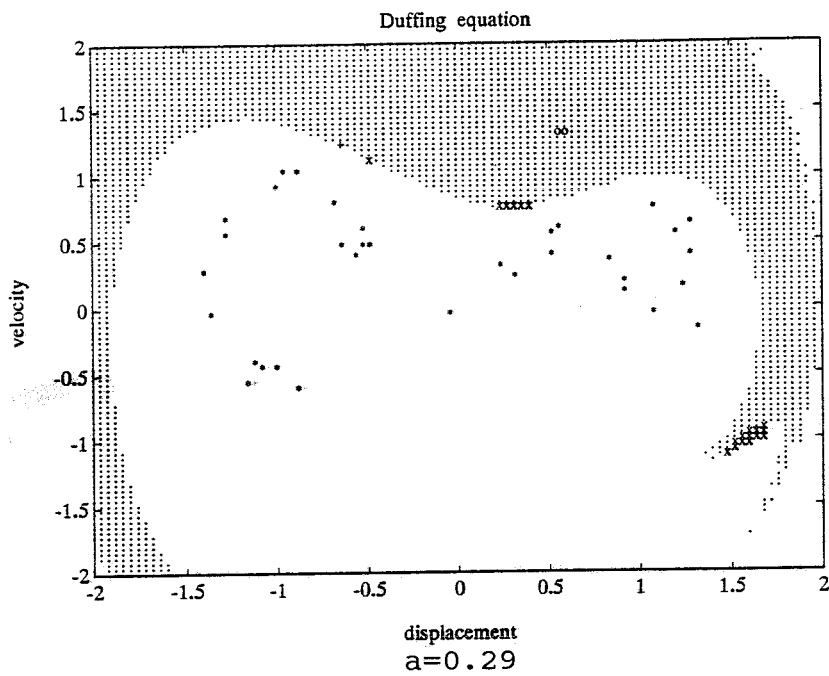
$d=0.16$



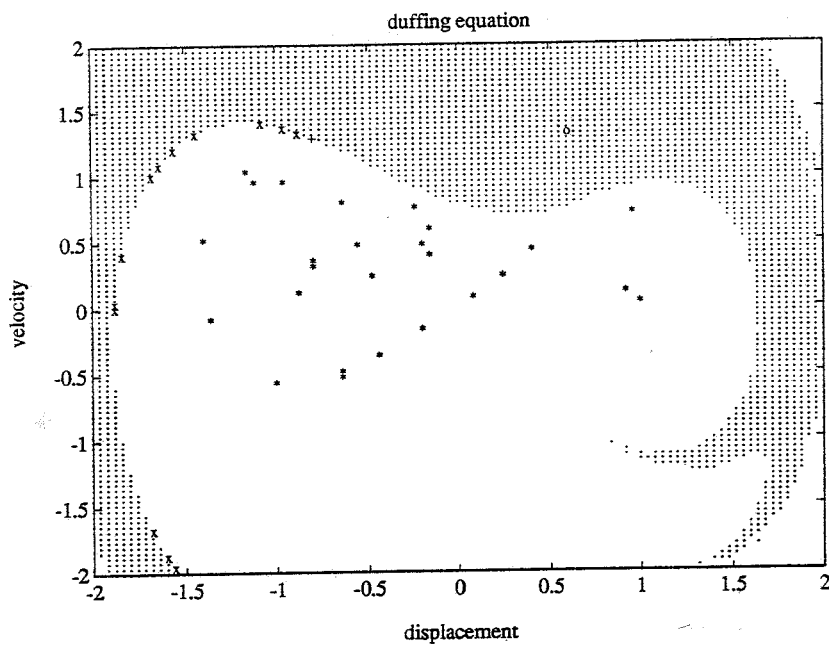
$d=0.17$

Bijlage IV

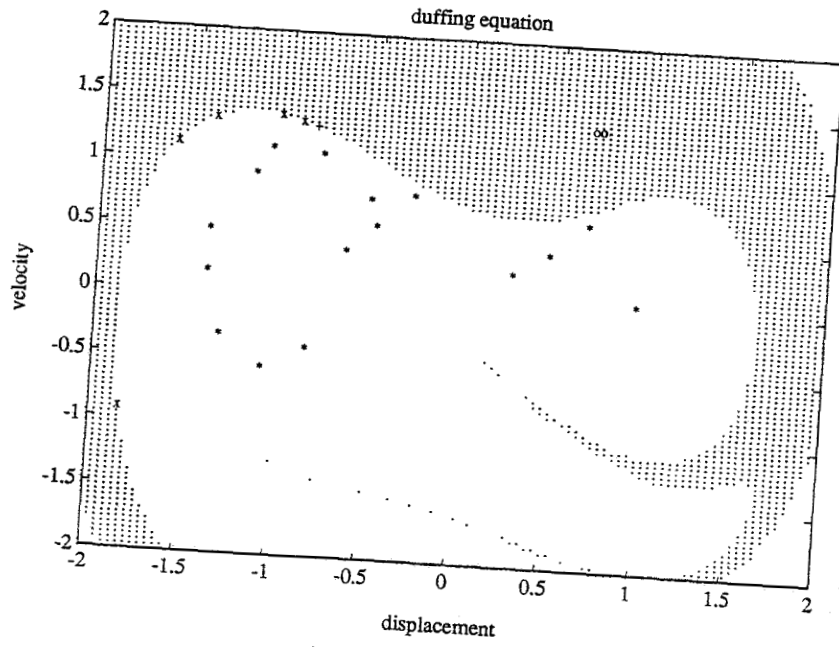
VARIATIE VAN EXCITATIE-AMPLITUDE 'a' BIJ DUFFING VERGELIJKING:  
d=0.15; w=1; eps=1e-6; celgrootte: [0.04,0.04]



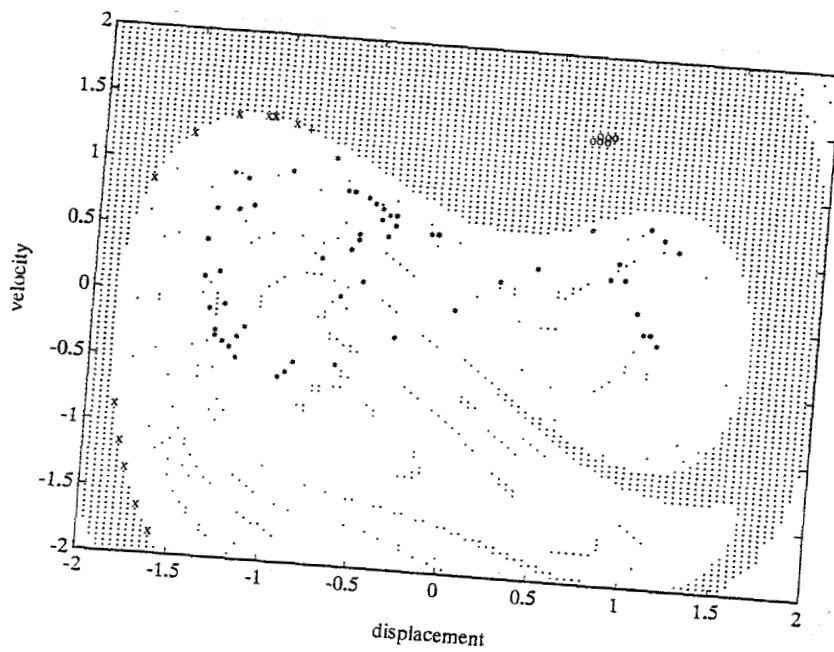
per: . → o  
chaos:wit → \*  
zadel: x → +



uitgangsgrootte excitatie-amplitude

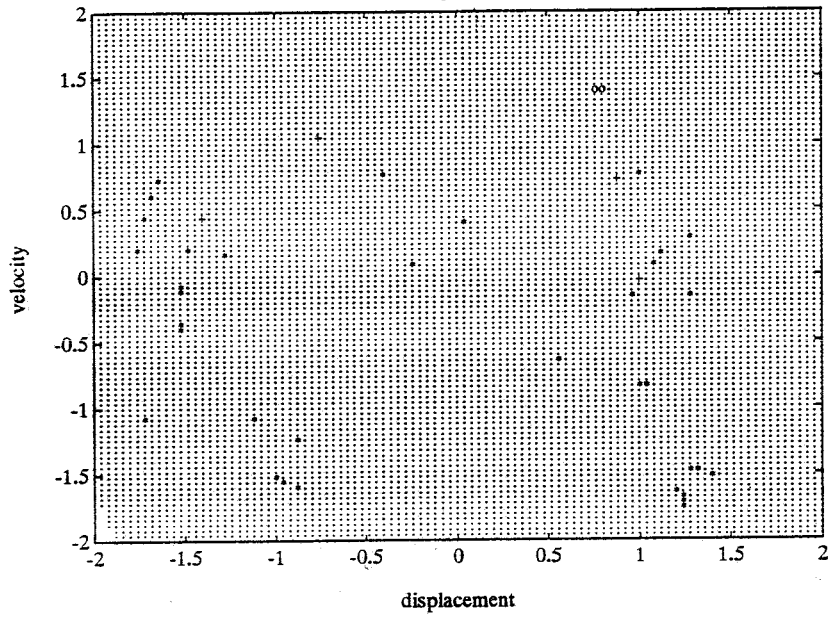


$a=0.31$



$a=0.315$

Duffing equation

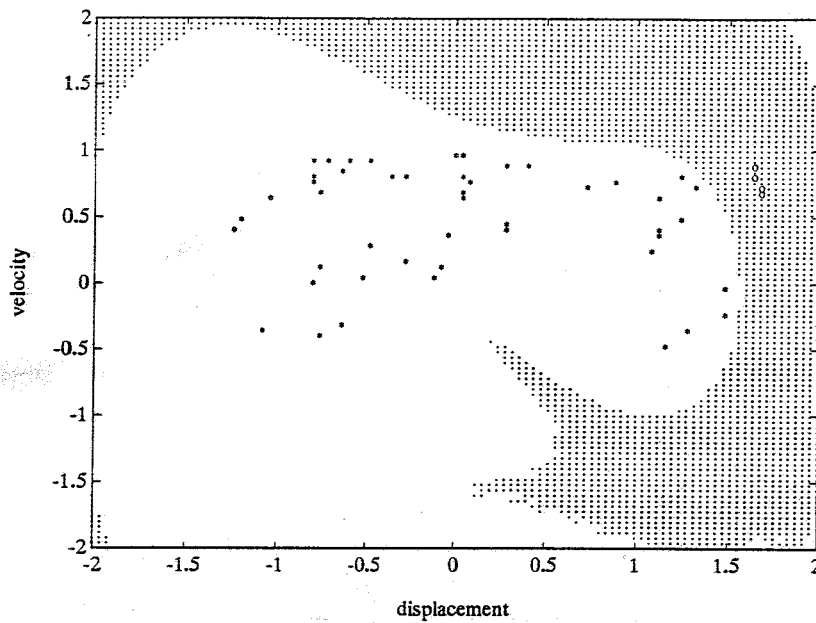


per: . → o  
\* → +

$a=0.32$

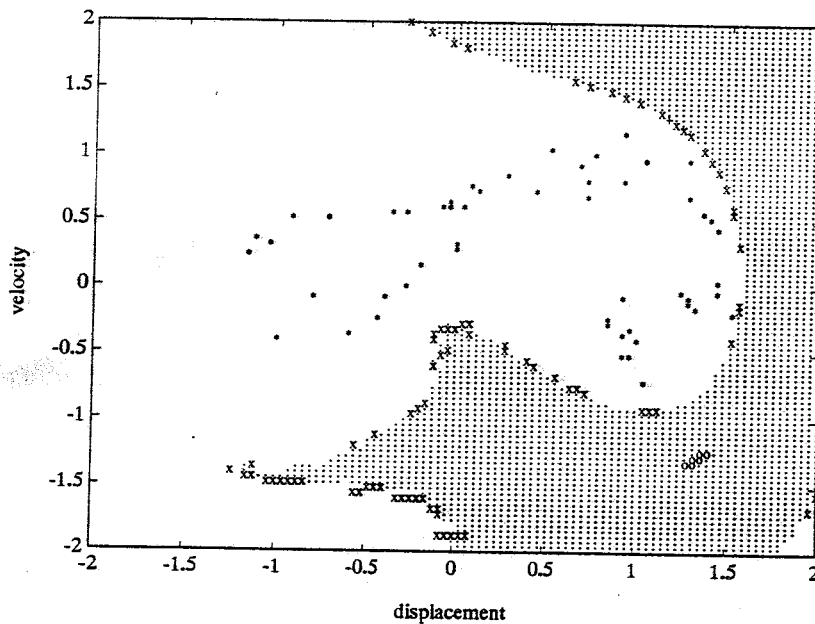
Bijlage V

FASEVERSCHUIVING IN INTEGRATIE-INTERVAL BIJ DUFFING VERGELIJKING  
a=0.3; d=0.15; w=1; eps=1e-6

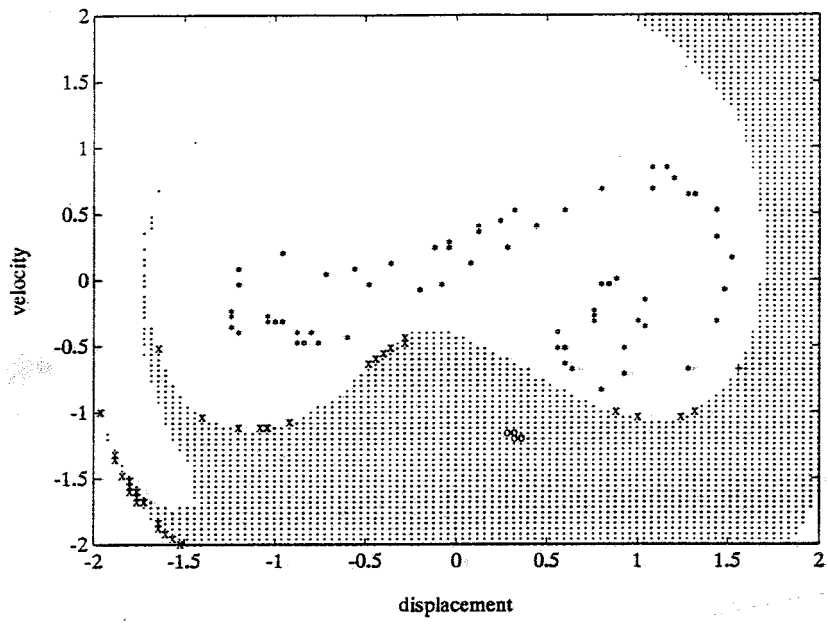


per: . → o  
chaos:wit → \*

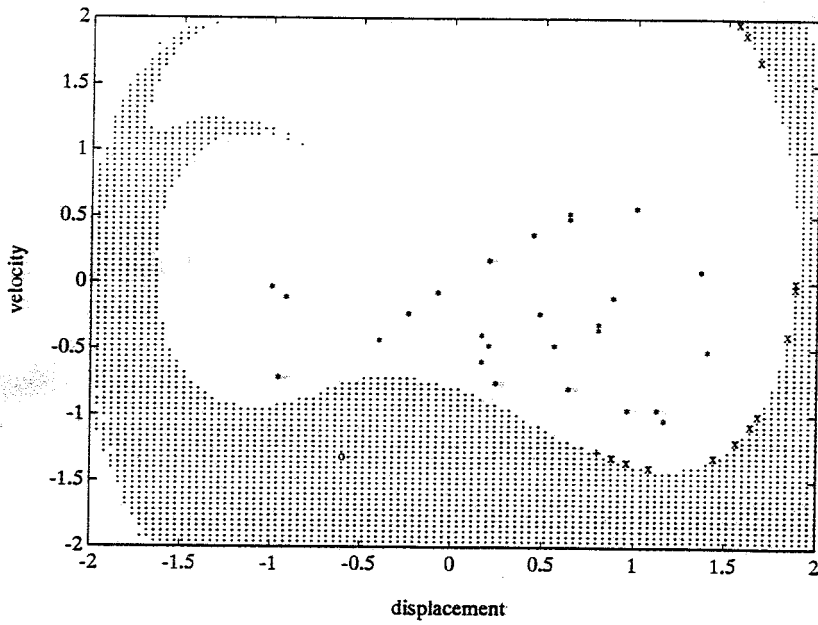
$$\Phi = 0.25\pi$$



$$\Phi = 0.5\pi$$

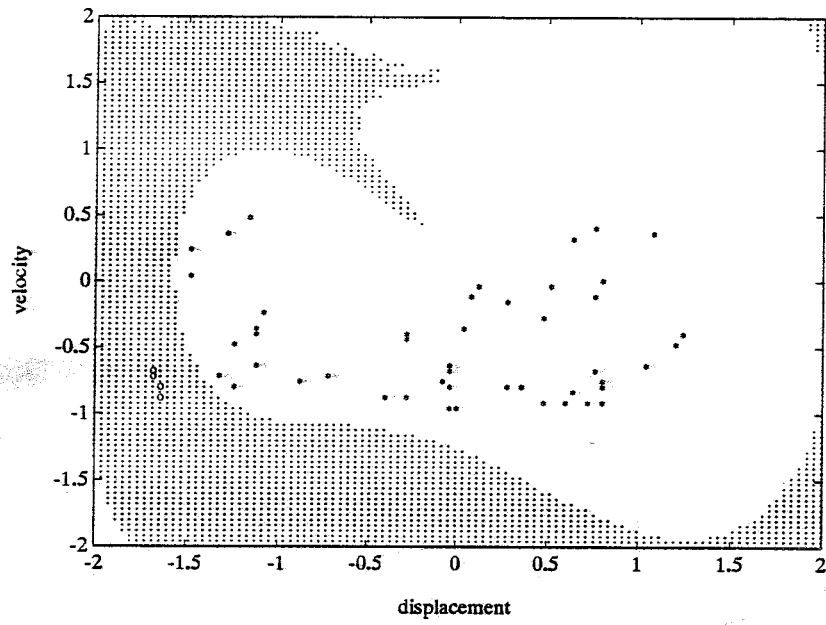


$$\Phi = 0.75\pi$$

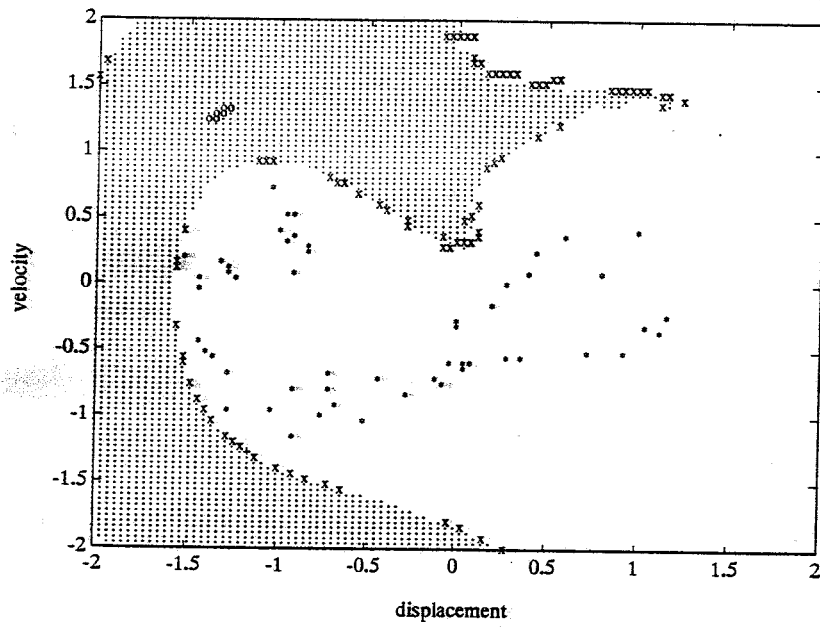


$$\Phi = \pi$$

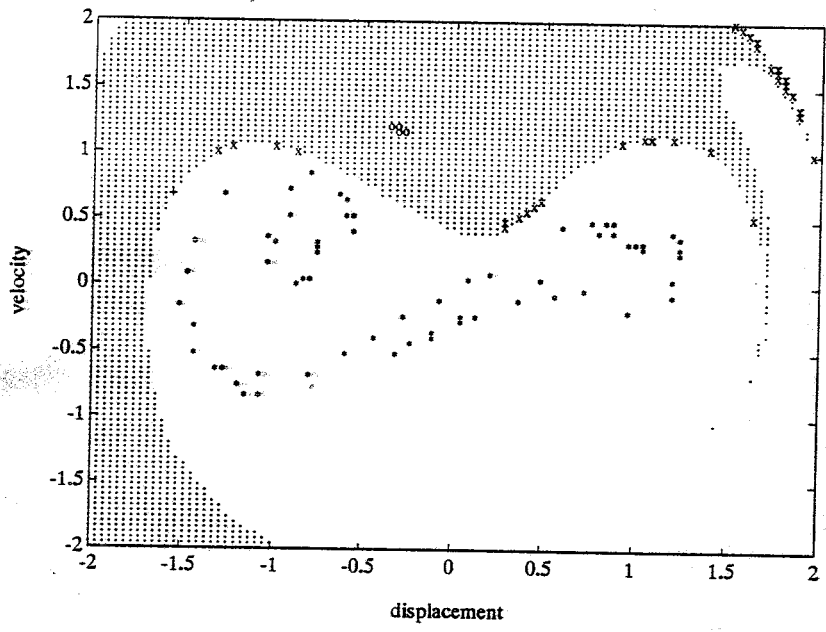




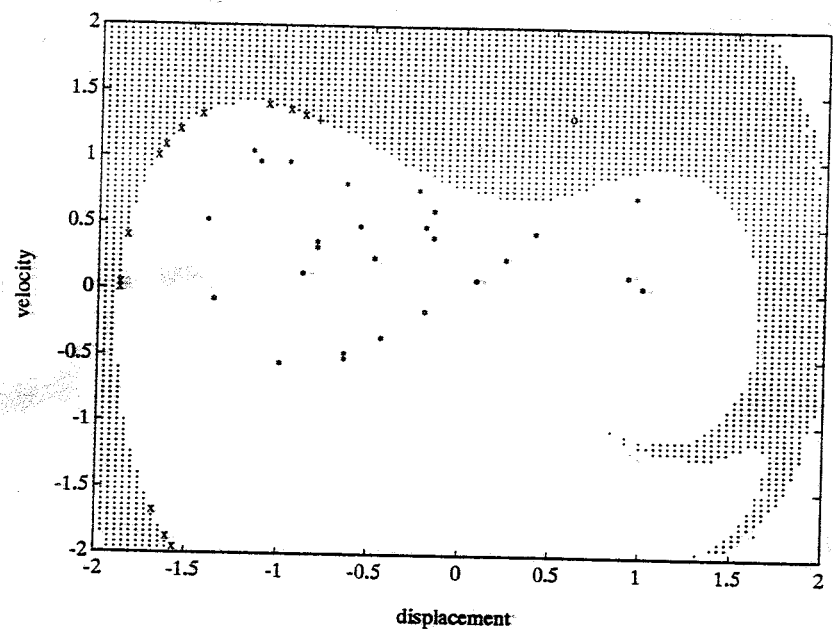
$$\Phi = 1.25\pi$$



$$\Phi = 1.5\pi$$



$$\Phi = 1.75\pi$$



$$\Phi = 2\pi$$