Integralen voor de ζ-functie van Riemann

INTEGRALEN VOOR DE ζ-FUNCTIE VAN RIEMANN.

DOOR

N. G. DE BRUIJN.

De reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, waarin met $\frac{1}{k^s}$ bedoeld is $e^{-s \lg k}$ ($\lg k$ reëel), convergeert gelijkmatig voor $R(s) = \sigma \geq 1 + \delta > 1$, wegens $\left|\frac{1}{k^s}\right| = \frac{1}{k^\sigma} \leq \frac{1}{k^{1+\delta}}$.

Voor $\sigma > 1$ is dus $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ een analytische functie.

De variant $C_n(s) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^s} - \int_1^n \frac{dt}{t^s}$, $\left(\frac{1}{t^s} = e^{-s \lg t}, \lg t \text{ reëel}\right)$ (1)

convergeert voor $\sigma > 0$. We hebben nl.:

$$\frac{1}{a^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-ay} y^{s-1} dy \quad (\sigma > 0,\ a > 0), \ \ldots\ldots \quad (2)$$

en:

$$\int_1^n \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^n dt \int_0^\infty e^{-ty} y^{s-1} dy = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty y^{s-1} dy \int_1^n e^{-ty} dt =$$

$$= \int_0^\infty y^{s-1} \frac{e^{-y} - e^{-ny}}{y} dy.$$ (Verwisseling van integraties is geoorloofd wegens de gelijkmatige convergentie van $\int_0^\infty e^{-ty} y^{s-1} dy$ aan beide grenzen voor $0 < \delta \leq t \leq n$, terwijl de integrand een continue functie van t is.) Nu is dus:

$$C_n(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-y} - e^{-yn}}{1 - e^{-y}} - \frac{e^{-y} - e^{-ny}}{y} \right\} y^{s-1} dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{e^{-y}}{y} \right\} y^{s-1} dy - \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1 - e^{-y}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{y} \right\} e^{-ny} y^{s-1} dy \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$\left| \frac{e^y}{e^y - 1} - \frac{1}{y} \right|$ heeft voor $y \geqq 0$ een bovenste grens A; de laatste integraal is dus in absolute waarde kleiner dan

$$A\int_0^\infty e^{-ny}y^{\sigma-1}\,dy = \frac{A}{n^\sigma}\,\Gamma(\sigma) \;\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$\dfrac{\Gamma(\sigma)}{|\Gamma(s)|}$ is naar boven begrensd in elk begrensd gebied, dat geheel rechts van de rechte $\sigma = \delta > 0$ ligt. In een dergelijk gebied is nu wegens (3) en (4) $C_n(s)$ gelijkmatig convergent. Daar bovendien voor alle n $C_n(s)$ analytisch is $(\sigma > 0)$, stelt ook $\lim\limits_{n=\infty} C_n(s)$ voor $\sigma > 0$ een analytische functie voor.

Daar voor $\sigma > 1$: $\lim\limits_{n=\infty} C_n(s) = C(s) = \zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ is, blijkt hieruit, dat de functie $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ analytisch kan worden voortgezet tot de rechte $\sigma = 0$, en dat dus $C(s) = \zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ $(\sigma > 0)$.

Uit (3) blijkt, nu dat

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \left\{\frac{1}{e^y-1} - \frac{e^{-y}}{y}\right\} y^{s-1}\,dy \quad (\sigma>0) \ldots (5)$$

Voor $\sigma > 1$ is $\dfrac{1}{\Gamma(s)}\displaystyle\int_0^\infty e^{-y}y^{s-2}\,dy = \dfrac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s)} = \dfrac{1}{s-1}$, dus

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{y^{s-1}}{e^y-1}\,dy \quad (\sigma > 1) \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Voor $0 < \sigma < 1$ is

$$\frac{1}{1-s} = \lim_{\delta=0}\int_\delta^1 \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\lim_{\delta=0}\int_\delta^1 dt\int_0^\infty e^{-ty}y^{s-1}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{1-e^{-y}}{y}y^{s-1}\,dy - \lim_{\delta=0}\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{1-e^{-\delta y}}{y}y^{s-1}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{1-e^{-y}}{y}y^{s-1}\,dy \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Om dit laatste te bewijzen, nemen we eerst N zoo groot, dat $\displaystyle\int_N^\infty y^{\sigma-2}\,dy < \frac{\epsilon}{2}$ is, vervolgens $\delta\ (>0)$ zoo klein, dat $\dfrac{\delta N^\sigma}{1-\delta N} < \dfrac{\epsilon\sigma}{2}$ (hieraan is bv. voldaan als we $\delta < \dfrac{1}{2N}$ en tevens $< \dfrac{\epsilon\sigma}{4N^\sigma}$ nemen.) Dan is:

$$0 \leq \left| \int_0^\infty \frac{1-e^{-\delta y}}{y} y^{s-1}\, dy \right| \leq \left| \int_0^N \frac{1-e^{-\delta y}}{y} y^{s-1}\, dy \right| +$$
$$+ \left| \int_N^\infty \frac{1-e^{-\delta y}}{y} y^{s-1}\, dy \right| < \int_0^N \frac{\delta}{1-\delta y} y^{\sigma-1}\, dy +$$
$$+ \int_N^\infty y^{\sigma-2}\, dy < \frac{\delta}{1-\delta N} \frac{N^\sigma}{\sigma} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Uit (5) en (7) volgt nu:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{y} \right\} y^{s-1}\, dy \quad (0 < \sigma < 1) \ldots\ldots (8)$$

Met behulp van de integraal (5) kan worden aangetoond, dat $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ over het geheele complexe vlak analytisch kan worden voortgezet.

De functie $\dfrac{1}{1-e^{-y}} - \dfrac{1}{y}$ is regulier in $y = 0$ en dus in de omgeving van dat punt in een machtreeks te ontwikkelen:

$$\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots\ldots \; |y| < 2\pi.$$

Voor $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ schrijven we nu:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{k=0}^{n} \int_0^\infty e^{-y} a_k y^{s+k-1}\, dy + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y} - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=0}^{n} a_k y^k \right\} e^{-y} y^{s-1}\, dy = a_0 + a_1 s + a_2 s(s+1) + \ldots + a_n s(s+1) \ldots$$
$$\ldots (s+n-1) + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y} - \sum_{k=0}^{n} a_k y^k \right\} e^{-y} y^{s-1}\, dy \ldots (9)$$

De laatste integraal is gelijkmatig convergent aan beide grenzen voor $N \geq \sigma \geq -n - 1 + \delta$; aangezien $\dfrac{1}{\Gamma(s)}$ in het geheele complexe vlak regulier is, is de laatste uitdrukking voor $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ een analytische functie in het gebied $\sigma > -n - 1 + \delta$. Voor n kan ieder natuurlijk getal gekozen worden, zoodat hiermee de voortzetting over het geheele vlak is bewezen.

De ζ-functie heeft derhalve als eenige singulariteit een pool van de eerste orde met residu $+1$ in $s = 1$. Verder is

$$\lim_{s=1} \{ \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \} = \lim_{n=\infty} C_n(1) = \lim_{n=\infty} \{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dt}{t} \} = C.$$

(Constante van Euler).

Uit (5) volgt nu:

$$C = \int_0^\infty \{ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{e^{-y}}{y} \} \, dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

De formule van Dirichlet:

$$C = \int_0^\infty \{ \frac{1}{1+y} - e^{-y} \} \, dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

volgt hieruit door te bedenken, dat:

$$\lim_{\delta=0} \int_\delta^\infty \{ \frac{1}{y(1+y)} - \frac{1}{e^y - 1} \} \, dy = \lim_{\delta=0} \lg \left[\frac{1+\delta}{\delta} (1 - e^{-\delta}) \right] = 0.$$

Uit (11) vinden we door partieele integratie:

$$C = \int_0^\infty \{ \frac{1}{1+y} - e^{-y} \} \, d \lg y = \left| \left(\frac{1}{1+y} - e^{-y} \right) \lg y \right|_0^\infty -$$

$$- \int_0^\infty e^{-y} \lg y \, dy + \int_0^\infty \frac{\lg y \, dy}{(1+y)^2} = - \Gamma'(1) \quad \text{wegens}$$

$$\int_0^1 \frac{\lg y}{(1+y)^2} \, dy = - \int_1^\infty \frac{\lg y}{(1+y)^2} \, dy,$$

terwijl het niet-geintegreerde stuk nul is.

Vervolgens zullen hier eenige integralen worden ontwikkeld, waarbij de afgeleiden van $\lg \Gamma(x)$ in de integrand voorkomen. Daartoe is het wenschelijk, eerst eenige minder algemeen bekende formules daarover af te leiden.

De integraal $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{(1+x)^{-p} - (1+x)^{-q}}{x^{1-\alpha}} \, dx \quad (p > 0, q > 0)$

convergeert aan beide grenzen gelijkmatig voor $0 \leq \alpha \leq \delta$ (waarin $\delta < p$ en $\delta < q$). Voor $\delta \geq \alpha > 0$ is $I(\alpha) = B(\alpha, p - \alpha) - B(\alpha, q - \alpha)$. Wegens de continuiteit van $I(\alpha)$ voor $\alpha = 0$ geldt:

$$\mathrm{I}(0) = \lim_{a=0} \mathrm{I}(a) = \lim_{a=0} \left\{\frac{\Gamma(a)\Gamma(p-a)}{\Gamma(p)} - \frac{\Gamma(a)\Gamma(q-a)}{\Gamma(q)}\right\} =$$

$$= \lim_{a=0} \Gamma(1+a)\left\{\frac{\Gamma(p-a)}{a\Gamma(p)} - \frac{\Gamma(q-a)}{a\Gamma(q)}\right\} =$$

$$= \lim_{a=0}\left\{\frac{\Gamma(q)-\Gamma(q-a)}{a\Gamma(q)} - \frac{\Gamma(p)-\Gamma(p-a)}{a\Gamma(p)}\right\} = \frac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)} - \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}.$$

We vinden dus:

$$\mathrm{I}(0) = \int_0^\infty \frac{(1+x)^{-p}-(1+x)^{-q}}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{y^{-p}-y^{-q}}{y-1}\,dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}\,dx = \frac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)} - \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Door reeksontwikkeling van $\dfrac{1}{1-x}$ in de integrand van $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}\,dx$ vinden we: $\dfrac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)} - \dfrac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} =$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{p+k} - \frac{1}{q+k}\right) + \int_0^{1-\delta} \frac{x^{p+n}-x^{q+n}}{1-x}\,dx + \int_{1-\delta}^1 \frac{x^{p+n}-x^{q+n}}{1-x}\,dx.$$

Aangezien we nu eerst δ zoo klein kunnen nemen, dat $\left|\displaystyle\int_{1-\delta}^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}\,dx\right| < \dfrac{\epsilon}{2}$ is, $\left(\text{dus ook } \left|\displaystyle\int_{1-\delta}^1 \frac{x^{p+n}-x^{q+n}}{1-x}\,dx\right| < \dfrac{\epsilon}{2}\right)$, en vervolgens n zoo groot, dat $(1-\delta)^n \displaystyle\int_0^{1-\delta} \frac{|x^p-x^q|}{1-x}\,dx < \frac{\epsilon}{2}$ $\left(\text{dus ook } \left|\displaystyle\int_0^{1-\delta} \frac{x^{p+n}-x^{q+n}}{1-x}\,dx\right| < \dfrac{\epsilon}{2}\right)$, volgt hieruit, dat:

$$\frac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)} - \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p+k} - \frac{1}{q+k}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Door $p = 1$ te nemen, vinden we in verband met

$$\Gamma'(1) = -\mathrm{C} = \lim_{n=\infty}\left[\lg n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\right]$$

$$\frac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)} = \lim_{n=\infty}\left\{\lg n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q+k}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Uit (13) volgt ook nog:

$$\frac{d^2 \lg\Gamma(q)}{dq^2} = \lim_{\delta=0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q+k)(q+k+\delta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q+k)^2} \quad \ldots (15)$$

Limietovergang is geoorloofd wegens de gelijkmatige convergentie van $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q+k)(q+k+\delta)}$ voor $0 \leq |\delta| \leq q - \delta'$. De uitdrukkingen in (14) en (15) zijn gelijkm. conv. in elk begrensd en afgesloten gebied, dat geen der punten $q = 0, -1, -2, \ldots\ldots$ bevat, zoodat de gelijkheden met uitzondering van die punten in het geheele complexe vlak geldig zijn.

De eerste integraal van (12) geeft, door $p = 1$ te stellen en te combineeren met (11):

$$\frac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)} = \int_0^\infty \{e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^q}\} \frac{dx}{x} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

Uit de tweede integraal van (12) vinden we voor $p = 1$ door de substitutie $y = e^x$ en combinatie met (10):

$$\frac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)} = \int_0^\infty \{\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-px}}{1 - e^{-x}}\} dx \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

De formules (11), (12), (16), (17) kan men aantreffen in Modern Analysis, Whitt. & Watson Ch. XII.

We zullen nu eerst afleiden de integraal [1]):

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \{\lg(1+x) - \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}\} \frac{dx}{x^s} \quad (0 < \sigma < 1) \quad (18)$$

Door in (5) $y^{s-1} = \dfrac{1}{y^{1-s}} = \dfrac{1}{\Gamma(1-s)} \displaystyle\int_0^\infty e^{-xy} \frac{dx}{x^s}$ te zetten, krijgen we:

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \{\frac{1}{e^y - 1} - \frac{e^{-y}}{y}\} dy \int_0^\infty e^{-xy} \frac{dx}{x^s}.$$

Verwisseling van integraties geeft:

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{x^s} \int_0^\infty \{\frac{e^{-y(1+x)}}{1 - e^{-y}} - \frac{e^{-y(1+x)}}{y}\} dy$$

hetgeen in verband met (17) en $\lg(1+x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-y} - e^{-y(1+x)}}{y} dy$ tot de gestelde integraal herleid kan worden.

Motiveering van de integratieverwisseling:

---

1) H. D. Kloosterman: Een integraal voor de ζ-functie van Riemann, Christiaan Huygens Jg. II, blz. 172—177.

$$\int_\delta^N \frac{dx}{x^s} \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-y(1+x)}}{1-e^{-y}} - \frac{e^{-y(1+x)}}{y}\right\} dy =$$

$$= \int_0^\infty \left\{\frac{1}{e^y-1} - \frac{e^{-y}}{y}\right\} dy \int_\delta^N e^{-xy} \frac{dx}{x^s} \qquad \text{wegens}$$

$\left|e^{-xy}\left(\frac{1}{e^y-1} - \frac{e^{-y}}{y}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{e^y-1} - \frac{e^{-y}}{y}\right|$ terwijl $\int_0^\infty \left|\frac{1}{e^y-1} - \frac{e^{-y}}{y}\right| dy$ convergeert. Verder is $\lim_{\delta=0} \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-y}}{1-e^{-y}} - \frac{e^{-y}}{y}\right\} dy \int_0^\delta e^{-xy} \frac{dx}{x^s} = \mathbf{0}$, daar $\left|\int_0^\delta \frac{e^{-xy}}{x^s} dx\right| \leq \int_0^\delta \frac{dx}{x^\sigma}$. Bovendien is

$$\lim_{N=\infty} \int_0^\infty \left\{\frac{1}{e^y-1} - \frac{e^{-y}}{y}\right\} dy \int_N^\infty e^{-xy} \frac{dx}{x^s} = \mathbf{0};$$

wegens $e^{-xy} < \frac{M}{x^p y^p}$ $(1-\sigma < p < 1)$ is n.l. de herhaalde integraal in absolute waarde $< \int_0^\infty \left|\frac{1}{e^y-1} - \frac{e^{-y}}{y}\right| y^{-p}\, dy \int_N^\infty \frac{dx}{x^{\sigma+p}}$, hetgeen tot nul nadert, als $N \to \infty$.

De vorige integraal kan nog iets vereenvoudigd worden. We hebben n.l. $\int_0^\infty \frac{\lg(1+x) - \lg x}{x^s} dx =$

$$= \frac{1}{1-s}\left|\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)x^{1-s}\right|_0^\infty + \frac{1}{1-s}\int_0^\infty \frac{x^{-s}}{1+x} dx =$$

$$= \frac{1}{1-s} \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad (0 < \sigma < 1)$$

dus $\zeta(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \left\{\lg x - \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}\right\} \frac{dx}{x^s}$ .... (19)

Een andere afleiding van (18) is nog te geven door in (1) voor $\frac{1}{k^s}$ en $\frac{1}{t^s}$ de substitutie

$$\frac{1}{a^s} = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \frac{dy}{y^s(y+a)} \quad (0 < \sigma < 1;\ a > 0) \ .. \ (20)$$

te gebruiken en (14) toe te passen.

Evenzoo kunnen we voor $0 < \sigma < 1$ met behulp van:

$$\frac{1}{k^{s+1}} = \frac{\sin \pi s}{\pi s} \int_0^\infty \frac{dy}{y^s(k+y)^2}$$

$\left(\text{wegens} \int_0^\infty \frac{dy}{y^s(1+y)^2} = B(1-s, 1+s) = \frac{\pi s}{\sin \pi s}\right)$ een integraal voor $\zeta(1+s)$ afleiden.

We hebben nl. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{s+1}} = \frac{\sin \pi s}{\pi s} \int_0^\infty \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+x)^2} \frac{dx}{x^s}$.

Wegens (15) is $\frac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+x)^2} =$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x-1)} < \frac{1}{n+x} \quad (x \geqq 0),$$

dus $\lim_{n=\infty} \left| \int_0^\infty \left\{ \frac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+x)^2} \right\} \frac{dx}{x^s} \right| \leq$

$\leq \lim_{n=\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{x^\sigma(x+n)} = \frac{\pi}{\sin \pi\sigma} \lim_{n=\infty} \frac{1}{n^\sigma} = 0$. Derhalve

$$\zeta(1+s) = \frac{\sin \pi s}{\pi s} \int_0^\infty \frac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} \frac{dx}{x^s} \quad (0 < \sigma < 1) \; .. \; (21)$$

Door partiëele integratie:

$$\zeta(1+s) = \frac{\sin \pi s}{\pi s} \int_0^\infty \frac{d\left\{\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} + C\right\}}{x^s} =$$

$$= \frac{\sin \pi s}{\pi s} \left| \frac{\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} + C}{x^s} \right|_0^\infty + \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} + C \right\} \frac{dx}{x^{s+1}}.$$

Het niet-geïntegreerde stuk is nul, hetgeen gemakkelijk met behulp van (12) of (13) bewezen kan worden. Dus:

$$\zeta(1+s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} + C \right\} \frac{dx}{x^{s+1}} \; \ldots\ldots \; (22)$$

Meer algemeen kunnen dergelijke integralen worden opgesteld voor $\zeta(s+m)$ $(0 < \sigma < 1,\ m$ geheel en $\geq 1)$ met behulp van:

$$\frac{1}{k^{s+m}} = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+s)\Gamma(1-s)} \int_0^\infty \frac{dx}{x^s(x+k)^{m+1}}.$$

We vinden zoodoende:

$$\zeta(s+m) = (-1)^{m-1} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+m)} \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \frac{d^{m+1} \lg \Gamma(1+x)}{dx^{m+1}} \frac{dx}{x^s}$$
$$(0 < \sigma < 1).$$

Het volledige bewijs zij aan den lezer overgelaten. Op dezelfde wijze als bij (21) is door partieele integratie hieruit nog een andere af te leiden.

Vervangen we in (21) $s + 1$ door s, dan vinden we, door te bedenken, dat $\dfrac{1}{s-1} = \dfrac{\sin \pi s}{(1-s)\pi} \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^{s-1}(1+x)}$ $(1 < \sigma < 2)$ de integraal:

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \frac{\sin \pi s}{\pi(1-s)} \int_0^\infty \left\{\frac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} - \frac{1}{1+x}\right\} \frac{dx}{x^{s-1}} \,.. \quad (23)$$

Deze integraal is aan beide grenzen gelijkmatig convergent in elk gebied, dat gelegen is tusschen de rechten $\sigma = \delta$ en $\sigma = 2 - \delta$, zoodat (23) geldig is voor $0 < \sigma < 2$, $s \neq 1$.

Voor de bovengrens volgt dit nl. uit $\dfrac{1}{1+x} < \dfrac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} < \dfrac{1}{x}$ $(x > 0$, vgl. 15) dus $0 < \dfrac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} - \dfrac{1}{1+x} < \dfrac{1}{x(1+x)}$; de integrand is in absolute waarde $< \dfrac{1}{x^\delta(1+x)}$ $(x > 1)$.

Voor de benedengrens uit het begrensd zijn van $\dfrac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} - \dfrac{1}{1+x}$ voor $0 \leq x$ terwijl $\left|\dfrac{1}{x^{s-1}}\right| < \dfrac{1}{x^{1-\delta}}$ $(0 < x < 1)$.

Voor $0 < \sigma < 1$ is uit (23) nog af te leiden, daar

$$\frac{1}{s-1} = -\frac{\sin \pi s}{\pi(1-s)} \int_0^\infty \frac{dx}{x^s(1+x)} = \frac{\sin \pi s}{\pi(1-s)} \int_0^\infty \left\{\frac{1}{(1+x)x^{s-1}} - \frac{1}{x^s}\right\} dx$$

de integraal $\zeta(s) = \dfrac{\sin \pi s}{\pi(1-s)} \displaystyle\int_0^\infty \left\{\frac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} - \frac{1}{x}\right\} \frac{dx}{x^{s-1}}$. (24)

Tenslotte volgt hier nog een bewijs voor de functionaalvergelijking van de ζ-functie.

Voor $0 < \sigma < 1$ is (zie (8))

$$\Gamma(s)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \left\{\frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{y}\right\} y^{s-1}\, dy =$$

$$= (2\pi)^s \int_0^\infty \left\{\frac{1}{e^{2\pi x}-1} - \frac{1}{2\pi x}\right\} x^{s-1}\,dx \;\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Nu is:

$$\frac{1}{e^{2\pi x}-1} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{Coth}.\,\pi x - 1) \text{ en } \pi \,\mathrm{Coth}\, \pi x = \frac{1}{x} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+k^2}. \quad (26)$$

De laatste formule is uit (13) af te leiden. We hebben n.l.:

$$\lg \frac{\pi}{\sin \pi x} = \lg \Gamma(1-x) + \lg \Gamma(x)$$

Differentiatie geeft: $\pi \,\mathrm{cotg}\, \pi x = \dfrac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} - \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{\frac{1}{x+k} - \frac{1}{1-x+k}\right\} = \frac{1}{x} - 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{k^2-x^2}.$$

Wegens de gelijkmatige convergentie van deze reeks in elk begrensd en afgesloten gebied, dat geen der punten $x = 0$, ± 1, ± 2 .... bevat, is deze gelijkheid geldig in het geheele complexe vlak met uitzondering van die punten.

Dus voor de reëele x:

$$\pi \,\mathrm{Coth}\, \pi x = \pi i \,\mathrm{cotg}\, \pi i x = \frac{1}{x} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{x^2+k^2} \;\ldots\ldots \quad (27)$$

Uit (26) volgt nu

$$\pi \int_0^\infty \left\{\frac{1}{e^{2\pi x}-1} - \frac{1}{2\pi x}\right\} x^{s-1}\,dx = \int_0^\infty \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+k^2} - \frac{\pi}{2}\right\} x^{s-1}\,dx.$$

Dus: $\quad \pi^{1-s}\, 2^{-s}\, \Gamma(s)\, \zeta(s) = \displaystyle\int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{x}{x^2+k^2} - \right.$

$$\left. - \int_{k-1}^{k} \frac{x}{x^2+t^2}\,dt\right\} x^{s-1}\,dx \,.\left(\int_0^\infty \frac{x}{x^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\right) \ldots\ldots \quad (28)$$

Integratie term voor term is geoorloofd. We hebben n.l.:

$$\left|\frac{x}{x^2+k^2} - \int_{k-1}^{k} \frac{x\,dt}{x^2+t^2}\right| \leq x\left(\frac{1}{x^2+(k-1)^2} - \frac{1}{x^2+k^2}\right) \quad (x \geqq 0)$$

$$0 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+k^2} - \int_{k-1}^{k} \frac{x\,dt}{x^2+t^2}\right) \leq \frac{x}{x^2+(n-1)^2}$$

$$\left|\int_0^\infty \sum_{k=n}^{\infty} \left\{\frac{x}{x^2+k^2} - \int_{k-1}^{k} \frac{x\,dt}{x^2+t^2}\right\} x^{s-1}\,dx\right| < \int_0^\infty \frac{x^\sigma dx}{x^2+(n-1)^2} \,.. \quad (29)$$

nu is $\quad \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^s}{a^2+x^2}\,dx = a^{s-1}\int_0^\infty \frac{y^s}{1+y^2}\,dy =$

$$= \tfrac{1}{2}a^{s-1}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{s-1}{2}}}{1+x}\,dx = \frac{a^{s-1}\cdot\pi}{2\cos\frac{\pi s}{2}} \quad (a>0;\ -1<\sigma<1)\ ..\ (30)$$

De laatste integraal van (29) nadert dus tot nul, als $n\to\infty$, zoodat bewezen is, dat

$$\pi^{1-s}2^{-s}\Gamma(s)\,\zeta(s) = \lim_{n=\infty}\Big\{\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{x^2+k^2} - \int_0^\infty dx\int_0^n \frac{x^s\,dt}{x^2+t^2}\Big\}.\ (31)$$

Hierin is: $\displaystyle\int_0^\infty dx\int_0^n \frac{x^s\,dt}{x^2+t^2} = \int_0^n dt\int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{x^2+t^2}.$

Wegens de gelijkmatige convergentie van $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^s}{x^2+t^2}\,dx$ voor $\delta\le t\le \mathrm{N}$ is n.l. $\displaystyle\int_0^\infty dx\int_\delta^n \frac{x^s\,dt}{x^2+t^2} = \int_\delta^n dt\int_0^\infty \frac{x^s dx}{x^2+t^2}.$ Verder is, wegens $x^2+t^2 \geqq \frac{1}{2}(x+t)^2$

$$\lim_{\delta=0}\left|\int_0^\infty x^s\,dx\int_0^\delta \frac{dt}{x^2+t^2}\right| \le \lim_{\delta=0}\int_0^\infty x^\sigma\,dx\int_0^\delta \frac{2\,dt}{(x+t)^2} =$$

$$= \lim_{\delta=0}\int_0^\infty x^\sigma\,\frac{2\delta}{x(x+\delta)}\,dx = \lim_{\delta=0} 2\delta^\sigma\mathrm{B}(\sigma,\ 1-\sigma) = 0.$$

(31) is nu te schrijven als:

$$\pi^{1-s}2^{-s}\Gamma(s)\,\zeta(s) = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\lim_{n=\infty}\Big\{\sum_{k=1}^{n} k^{s-1} - \int_0^n t^{s-1}\,dt\Big\}$$

hetgeen de functionaalvergelijking

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\,\pi^{-s}\,\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\,\zeta(s)$$

oplevert. Gemakkelijk kan worden ingezien, dat deze over het geheele complexe vlak kan worden voortgezet.