

Integralen voor de ζ -functie van Riemann

Citation for published version (APA):

Bruijn, de, N. G. (1937). Integralen voor de ζ -functie van Riemann. *Mathematica : tijdschrift voor studeerenden voor de acten wiskunde M.O. en voor studeerenden aan Universiteiten. Afdeling B*, 5, 170-180.

Document status and date:

Published: 01/01/1937

Document Version:

Publisher's PDF, also known as Version of Record (includes final page, issue and volume numbers)

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

INTEGRALen VOOR DE ζ -FUNCTIE VAN RIEMANN.

DOOR

N. G. DE BRUIJN.

De reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, waarin met $\frac{1}{k^s}$ bedoeld is $e^{-s \lg k}$ ($\lg k$ reëel), convergeert gelijkmatig voor $R(s) = \sigma \geq 1 + \delta > 1$, wegens

$$\left| \frac{1}{k^s} \right| = \frac{1}{k^\sigma} \leq \frac{1}{k^{1+\delta}}.$$

Voor $\sigma > 1$ is dus $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ een analytische functie.

De variant $C_n(s) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^s} - \int_1^n \frac{dt}{t^s}$, ($\frac{1}{t^s} = e^{-s \lg t}$, $\lg t$ reëel) (1)

convergeert voor $\sigma > 0$. We hebben nl.:

$$\frac{1}{a^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-ay} y^{s-1} dy \quad (\sigma > 0, a > 0), \dots\dots (2)$$

en:

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{dt}{t^s} &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^n dt \int_0^{\infty} e^{-ty} y^{s-1} dy = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} y^{s-1} dy \int_1^n e^{-ty} dt = \\ &= \int_0^{\infty} y^{s-1} \frac{e^{-y} - e^{-ny}}{y} dy. \end{aligned}$$

(Verwisseling van integraties is

geoorloofd wegens de gelijkmatige convergentie van $\int_0^{\infty} e^{-ty} y^{s-1} dy$ aan beide grenzen voor $0 < \delta \leq t \leq n$, terwijl de integrand een continue functie van t is.) Nu is dus:

$$\begin{aligned} C_n(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-y} - e^{-yn}}{1 - e^{-y}} - \frac{e^{-y} - e^{-ny}}{y} \right\} y^{s-1} dy = \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{e^{-y}}{y} \right\} y^{s-1} dy - \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{1 - e^{-y}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{y} \right\} e^{-ny} y^{s-1} dy \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$\left| \frac{e^y}{e^y - 1} - \frac{1}{y} \right|$ heeft voor $y \geq 0$ een bovenste grëns A; de laatste integraal is dus in absolute waarde kleiner dan

$$A \int_0^{\infty} e^{-ny} y^{\sigma-1} dy = \frac{A}{n^{\sigma}} \Gamma(\sigma) \dots\dots\dots (4)$$

$\frac{\Gamma(\sigma)}{|\Gamma(s)|}$ is naar boven begrensd in elk begrensd gebied, dat geheel rechts van de rechte $\sigma = \delta > 0$ ligt. In een dergelijk gebied is nu wegens (3) en (4) $C_n(s)$ gelijkmatig convergent. Daar bovendien voor alle n $C_n(s)$ analytisch is ($\sigma > 0$), stelt ook $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n(s)$ voor $\sigma > 0$ een analytische functie voor.

Daar voor $\sigma > 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n(s) = C(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ is, blijkt hieruit, dat de functie $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ analytisch kan worden voortgezet tot de rechte $\sigma = 0$, en dat dus $C(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ ($\sigma > 0$).

Uit (3) blijkt, nu dat

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{e^y-1} - \frac{e^{-y}}{y} \right\} y^{s-1} dy \quad (\sigma > 0) \dots (5)$$

Voor $\sigma > 1$ is $\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{s-2} dy = \frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{s-1}$, dus

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{y^{s-1}}{e^y-1} dy \quad (\sigma > 1) \dots\dots\dots (6)$$

Voor $0 < \sigma < 1$ is

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-s} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 dt \int_0^{\infty} e^{-ty} y^{s-1} dy = \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-y}}{y} y^{s-1} dy - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\delta y}}{y} y^{s-1} dy = \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-y}}{y} y^{s-1} dy \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

Om dit laatste te bewijzen, nemen we eerst N zoo groot, dat $\int_N^{\infty} y^{\sigma-2} dy < \frac{\epsilon}{2}$ is, vervolgens $\delta (> 0)$ zoo klein, dat $\frac{\delta N^{\sigma}}{1-\delta N} < \frac{\epsilon \sigma}{2}$ (hieraan is bv. voldaan als we $\delta < \frac{1}{2N}$ en

tevens $< \frac{\epsilon^\sigma}{4N^\sigma}$ nemen.) Dan is:

$$0 \leq \left| \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\delta y}}{y} y^{s-1} dy \right| \leq \left| \int_0^N \frac{1 - e^{-\delta y}}{y} y^{s-1} dy \right| + \\ + \left| \int_N^\infty \frac{1 - e^{-\delta y}}{y} y^{s-1} dy \right| < \int_0^N \frac{\delta}{1 - \delta y} y^{\sigma-1} dy + \\ + \int_N^\infty y^{\sigma-2} dy < \frac{\delta}{1 - \delta N} \frac{N^\sigma}{\sigma} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Uit (5) en (7) volgt nu:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{y} \right\} y^{s-1} dy \quad (0 < \sigma < 1) \dots (8)$$

Met behulp van de integraal (5) kan worden aangetoond, dat $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ over het geheele complexe vlak analytisch kan worden voortgezet.

De functie $\frac{1}{1 - e^{-y}} - \frac{1}{y}$ is regulier in $y = 0$ en dus in de omgeving van dat punt in een machtreeks te ontwikkelen:

$$\frac{1}{1 - e^{-y}} - \frac{1}{y} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots \quad |y| < 2\pi.$$

Voor $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ schrijven we nu:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{k=0}^n \int_0^\infty e^{-y} a_k y^{s+k-1} dy + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1 - e^{-y}} - \frac{1}{y} - \sum_{k=0}^n a_k y^k \right\} e^{-y} y^{s-1} dy = a_0 + a_1 s + a_2 s(s+1) + \dots + a_n s(s+1) \dots \\ \dots (s+n-1) + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1 - e^{-y}} - \frac{1}{y} - \sum_{k=0}^n a_k y^k \right\} e^{-y} y^{s-1} dy \dots (9)$$

De laatste integraal is gelijkmatig convergent aan beide grenzen voor $N \geq \sigma \geq -n - 1 + \delta$; aangezien $\frac{1}{\Gamma(s)}$ in het geheele complexe vlak regulier is, is de laatste uitdrukking voor $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ een analytische functie in het gebied $\sigma > -n - 1 + \delta$. Voor n kan ieder natuurlijk getal gekozen

worden, zoodat hiermee de voortzetting over het geheele vlak is bewezen.

De ζ -functie heeft derhalve als eenige singulariteit een pool van de eerste orde met residu + 1 in $s = 1$. Verder is

$$\lim_{s=1} \left\{ \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right\} = \lim_{n=\infty} C_n(1) = \lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dt}{t} \right\} = C.$$

(Constante van Euler).

Uit (5) volgt nu:

$$C = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{e^{-y}}{y} \right\} dy \dots \dots \dots (10)$$

De formule van Dirichlet:

$$C = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{1+y} - e^{-y} \right\} dy \dots \dots \dots (11)$$

volgt hieruit door te bedenken, dat:

$$\lim_{\delta=0} \int_{\delta}^{\infty} \left\{ \frac{1}{y(1+y)} - \frac{1}{e^y - 1} \right\} dy = \lim_{\delta=0} \lg \left[\frac{1+\delta}{\delta} (1 - e^{-\delta}) \right] = 0.$$

Uit (11) vinden we door partieele integratie:

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{1+y} - e^{-y} \right\} d \lg y = \left| \left(\frac{1}{1+y} - e^{-y} \right) \lg y \right|_0^{\infty} - \\ &- \int_0^{\infty} e^{-y} \lg y dy + \int_0^{\infty} \frac{\lg y dy}{(1+y)^2} = -\Gamma'(1) \quad \text{wegens} \\ &\int_0^1 \frac{\lg y}{(1+y)^2} dy = -\int_1^{\infty} \frac{\lg y}{(1+y)^2} dy, \end{aligned}$$

terwijl het niet-geïntegreerde stuk nul is.

Vervolgens zullen hier eenige integralen worden ontwikkeld, waarbij de afgeleiden van $\lg \Gamma(x)$ in de integrand voorkomen. Daartoe is het wenschelijk, eerst eenige minder algemeen bekende formules daarover af te leiden.

$$\text{De integraal } I(a) = \int_0^{\infty} \frac{(1+x)^{-p} - (1+x)^{-q}}{x^{1-a}} dx \quad (p > 0, q > 0)$$

convergeert aan beide grenzen gelijkmatig voor $0 \leq a \leq \delta$ (waarin $\delta < p$ en $\delta < q$). Voor $\delta \geq a > 0$ is $I(a) = B(a, p-a) - B(a, q-a)$. Wegens de continuïteit van $I(a)$ voor $a = 0$ geldt:

$$\begin{aligned}
 I(0) &= \lim_{a=0} I(a) = \lim_{a=0} \left\{ \frac{\Gamma(a)\Gamma(p-a)}{\Gamma(p)} - \frac{\Gamma(a)\Gamma(q-a)}{\Gamma(q)} \right\} = \\
 &= \lim_{a=0} \Gamma(1+a) \left\{ \frac{\Gamma(p-a)}{a\Gamma(p)} - \frac{\Gamma(q-a)}{a\Gamma(q)} \right\} = \\
 &= \lim_{a=0} \left\{ \frac{\Gamma(q) - \Gamma(q-a)}{a\Gamma(q)} - \frac{\Gamma(p) - \Gamma(p-a)}{a\Gamma(p)} \right\} = \frac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)} - \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}.
 \end{aligned}$$

We vinden dus:

$$\begin{aligned}
 I(0) &= \int_0^\infty \frac{(1+x)^{-p} - (1+x)^{-q}}{x} dx = \int_1^\infty \frac{y^{-p} - y^{-q}}{y-1} dy = \\
 &= \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x} dx = \frac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)} - \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} \dots\dots\dots (12)
 \end{aligned}$$

Door reeksontwikkeling van $\frac{1}{1-x}$ in de integrand van

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x} dx \text{ vinden we: } & \frac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)} - \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{p+k} - \frac{1}{q+k} \right) + \int_0^{1-\delta} \frac{x^{p+n} - x^{q+n}}{1-x} dx + \int_{1-\delta}^1 \frac{x^{p+n} - x^{q+n}}{1-x} dx.
 \end{aligned}$$

Aangezien we nu eerst δ zoo klein kunnen nemen, dat $\left| \int_{1-\delta}^1 \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x} dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$ is, (dus ook $\left| \int_{1-\delta}^1 \frac{x^{p+n} - x^{q+n}}{1-x} dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$), en vervolgens n zoo groot, dat $(1-\delta)^n \int_0^{1-\delta} \frac{|x^p - x^q|}{1-x} dx < \frac{\epsilon}{2}$

(dus ook $\left| \int_0^{1-\delta} \frac{x^{p+n} - x^{q+n}}{1-x} dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$), volgt hieruit, dat:

$$\frac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)} - \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{p+k} - \frac{1}{q+k} \right) \dots\dots\dots (13)$$

Door $p = 1$ te nemen, vinden we in verband met

$$\begin{aligned}
 \Gamma'(1) &= -C = \lim_{n=\infty} \left[\lg n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \right] \\
 \frac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)} &= \lim_{n=\infty} \left\{ \lg n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{q+k} \right\} \dots\dots\dots (14)
 \end{aligned}$$

Uit (13) volgt ook nog:

$$\frac{d^2 \lg \Gamma(q)}{dq^2} = \lim_{\delta=0} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(q+k)(q+k+\delta)} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(q+k)^2} \dots\dots (15)$$

Limietovergang is geoorloofd wegens de gelijkmatige convergentie van $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q+k)(q+k+\delta)}$ voor $0 \leq |\delta| \leq q - \delta'$.

De uitdrukkingen in (14) en (15) zijn gelijkm. conv. in elk begrensd en afgesloten gebied, dat geen der punten $q = 0, -1, -2, \dots$ bevat, zoodat de gelijkheden met uitzondering van die punten in het geheele complexe vlak geldig zijn.

De eerste integraal van (12) geeft, door $p = 1$ te stellen en te combineren met (11):

$$\frac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)} = \int_0^{\infty} \left\{ e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^q} \right\} \frac{dx}{x} \dots \dots \dots (16)$$

Uit de tweede integraal van (12) vinden we voor $p = 1$ door de substitutie $y = e^x$ en combinatie met (10):

$$\frac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)} = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-px}}{1-e^{-x}} \right\} dx \dots \dots \dots (17)$$

De formules (11), (12), (16), (17) kan men aantreffen in Modern Analysis, Whitt. & Watson Ch. XII.

We zullen nu eerst afleiden de integraal ¹⁾:

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \lg(1+x) - \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} \right\} \frac{dx}{x^s} \quad (0 < \sigma < 1) \quad (18)$$

Door in (5) $y^{s-1} = \frac{1}{y^{1-s}} = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{dx}{x^s}$ te zetten, krijgen we:

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{e^{-y}}{y} \right\} dy \int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{dx}{x^s}$$

Verwisseling van integraties geeft:

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^s} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-y(1+x)}}{1-e^{-y}} - \frac{e^{-y(1+x)}}{y} \right\} dy$$

hetgeen in verband met (17) en $\lg(1+x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-y} - e^{-y(1+x)}}{y} dy$

tot de gestelde integraal herleid kan worden.

Motiveering van de integratieverwisseling:

1) H. D. Kloosterman: Een integraal voor de ζ -functie van Riemann, Christiaan Huygens Jg. II, blz. 172—177.

$$\int_{\delta}^N \frac{dx}{x^s} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-y(1+x)}}{1-e^{-y}} - \frac{e^{-y(1+x)}}{y} \right\} dy =$$

$$= \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{e^y-1} - \frac{e^{-y}}{y} \right\} dy \int_{\delta}^N e^{-xy} \frac{dx}{x^s} \quad \text{wegens}$$

$$\left| e^{-xy} \left(\frac{1}{e^y-1} - \frac{e^{-y}}{y} \right) \right| \leq \left| \frac{1}{e^y-1} - \frac{e^{-y}}{y} \right| \quad \text{terwijl } \int_0^{\infty} \left| \frac{1}{e^y-1} - \frac{e^{-y}}{y} \right| dy$$

convergeert. Verder is $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}} - \frac{e^{-y}}{y} \right\} dy \int_0^{\delta} e^{-xy} \frac{dx}{x^s} = 0$,

daar $\left| \int_0^{\delta} \frac{e^{-xy}}{x^s} dx \right| \leq \int_0^{\delta} \frac{dx}{x^{\sigma}}$. Bovendien is

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{e^y-1} - \frac{e^{-y}}{y} \right\} dy \int_N^{\infty} e^{-xy} \frac{dx}{x^s} = 0;$$

wegens $e^{-xy} < \frac{M}{x^p y^p}$ ($1 - \sigma < p < 1$) is n.l. de herhaalde inte-

graal in absolute waarde $< \int_0^{\infty} \left| \frac{1}{e^y-1} - \frac{e^{-y}}{y} \right| y^{-p} dy \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma+p}}$,

hetgeen tot nul nadert, als $N \rightarrow \infty$.

De vorige integraal kan nog iets vereenvoudigd worden.

We hebben n.l. $\int_0^{\infty} \frac{\lg(1+x) - \lg x}{x^s} dx =$

$$= \frac{1}{1-s} \left| \lg \left(1 + \frac{1}{x} \right) x^{1-s} \right|_0^{\infty} + \frac{1}{1-s} \int_0^{\infty} \frac{x^{-s}}{1+x} dx =$$

$$= \frac{1}{1-s} \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad (0 < \sigma < 1)$$

dus $\zeta(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \lg x - \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} \right\} \frac{dx}{x^s} \dots \dots \dots (19)$

Een andere afleiding van (18) is nog te geven door in (1) voor $\frac{1}{k^s}$ en $\frac{1}{l^s}$ de substitutie

$$\frac{1}{a^s} = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^s (y+a)} \quad (0 < \sigma < 1; a > 0) \dots (20)$$

te gebruiken en (14) toe te passen.

Evenzoo kunnen we voor $0 < \sigma < 1$ met behulp van:

$\frac{1}{k^{s+1}} = \frac{\sin \pi s}{\pi s} \int_0^\infty \frac{dy}{y^s (k+y)^2}$
 (wegens $\int_0^\infty \frac{dy}{y^s (1+y)^2} = B(1-s, 1+s) = \frac{\pi s}{\sin \pi s}$) een integraal voor $\zeta(1+s)$ afleiden.

We hebben nl. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{s+1}} = \frac{\sin \pi s}{\pi s} \int_0^\infty \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+x)^2} \frac{dx}{x^s}$.

Wegens (15) is $\frac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+x)^2} =$
 $= \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{(k+x)^2} < \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{(k+x)(k+x-1)} < \frac{1}{n+x} \quad (x \geq 0)$,

dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^\infty \left\{ \frac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+x)^2} \right\} \frac{dx}{x^s} \right| \leq$
 $\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dx}{x^\sigma (x+n)} = \frac{\pi}{\sin \pi \sigma} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\sigma} = 0$. Derhalve
 $\zeta(1+s) = \frac{\sin \pi s}{\pi s} \int_0^\infty \frac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} \frac{dx}{x^s} \quad (0 < \sigma < 1) \dots (21)$

Door partiële integratie:

$$\zeta(1+s) = \frac{\sin \pi s}{\pi s} \int_0^\infty \frac{d \left\{ \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} + C \right\}}{x^s} =$$

$$= \frac{\sin \pi s}{\pi s} \left[\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} + C \right]_0^\infty + \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} + C \right\} \frac{dx}{x^{s+1}}.$$

Het niet-geïntegreerde stuk is nul, hetgeen gemakkelijk met behulp van (12) of (13) bewezen kan worden. Dus:

$$\zeta(1+s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} + C \right\} \frac{dx}{x^{s+1}} \dots (22)$$

Meer algemeen kunnen dergelijke integralen worden opgesteld voor $\zeta(s+m)$ ($0 < \sigma < 1$, m geheel en ≥ 1) met behulp van:

$$\frac{1}{k^{s+m}} = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+s)\Gamma(1-s)} \int_0^\infty \frac{dx}{x^s (x+k)^{m+1}}.$$

We vinden zoodoende:

$$\zeta(s+m) = (-1)^{m-1} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+m)} \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d^{m+1} \lg \Gamma(1+x)}{dx^{m+1}} \frac{dx}{x^s} \quad (0 < \sigma < 1).$$

Het volledige bewijs zij aan den lezer overgelaten. Op dezelfde wijze als bij (21) is door partieele integratie hieruit nog een andere af te leiden.

Vervangen we in (21) $s+1$ door s , dan vinden we, door te bedenken, dat $\frac{1}{s-1} = \frac{\sin \pi s}{(1-s)\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{s-1}(1+x)}$ ($1 < \sigma < 2$) de integraal:

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \frac{\sin \pi s}{\pi(1-s)} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} - \frac{1}{1+x} \right\} \frac{dx}{x^{s-1}} \quad (23)$$

Deze integraal is aan beide grenzen gelijkmatig convergent in elk gebied, dat gelegen is tusschen de rechten $\sigma = \delta$ en $\sigma = 2 - \delta$, zoodat (23) geldig is voor $0 < \sigma < 2$, $s \neq 1$.

Voor de bovengrens volgt dit nl. uit $\frac{1}{1+x} < \frac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} < \frac{1}{x}$ ($x > 0$, vgl. 15) dus $0 < \frac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} - \frac{1}{1+x} < \frac{1}{x(1+x)}$; de integrand is in absolute waarde $< \frac{1}{x^\delta(1+x)}$ ($x > 1$).

Voor de benedengrens uit het begrensd zijn van $\frac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} - \frac{1}{1+x}$ voor $0 \leq x$ terwijl $\left| \frac{1}{x^{s-1}} \right| < \frac{1}{x^{1-\delta}}$ ($0 < x < 1$).

Voor $0 < \sigma < 1$ is uit (23) nog af te leiden, daar $\frac{1}{s-1} = \frac{\sin \pi s}{\pi(1-s)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^s(1+x)} = \frac{\sin \pi s}{\pi(1-s)} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{(1+x)x^{s-1}} - \frac{1}{x^s} \right\} dx$ de integraal $\zeta(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi(1-s)} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{d^2 \lg \Gamma(1+x)}{dx^2} - \frac{1}{x} \right\} \frac{dx}{x^{s-1}}$. (24)

Tenslotte volgt hier nog een bewijs voor de functionaalvergelijking van de ζ -functie.

Voor $0 < \sigma < 1$ is (zie (8))

$$\Gamma(s) \zeta(s) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{y} \right\} y^{s-1} dy =$$

$$= (2\pi)^s \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^{2\pi x} - 1} - \frac{1}{2\pi x} \right\} x^{s-1} dx \dots\dots\dots (25)$$

Nu is:

$$\frac{1}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{1}{2} (\text{Coth. } \pi x - 1) \text{ en } \pi \text{ Coth } \pi x = \frac{1}{x} + 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{x}{x^2 + k^2}. \quad (26)$$

De laatste formule is uit (13) af te leiden. We hebben n.l.:

$$\lg \frac{\pi}{\sin \pi x} = \lg \Gamma(1 - x) + \lg \Gamma(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Differentiatie geeft: } \pi \cotg \pi x &= \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \left\{ \frac{1}{x+k} - \frac{1}{1-x+k} \right\} = \frac{1}{x} - 2 \sum_{k=0}^\infty \frac{x}{k^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Wegens de gelijkmatige convergentie van deze reeks in elk begrens en afgesloten gebied, dat geen der punten $x = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ bevat, is deze gelijkheid geldig in het geheele complexe vlak met uitzondering van die punten.

Dus voor de reële x :

$$\pi \text{ Coth } \pi x = \pi i \cotg \pi i x = \frac{1}{x} + 2 \sum_{k=0}^\infty \frac{x}{x^2 + k^2} \dots\dots (27)$$

Uit (26) volgt nu

$$\pi \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^{2\pi x} - 1} - \frac{1}{2\pi x} \right\} x^{s-1} dx = \int_0^\infty \left\{ \sum_{k=1}^\infty \frac{x}{x^2 + k^2} - \frac{\pi}{2} \right\} x^{s-1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Dus: } \pi^{1-s} 2^{-s} \Gamma(s) \zeta(s) &= \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty \left\{ \frac{x}{x^2 + k^2} - \right. \\ &\left. - \int_{k-1}^k \frac{x}{x^2 + t^2} dt \right\} x^{s-1} dx \cdot \left(\int_0^\infty \frac{x}{x^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2} \right) \dots\dots (28) \end{aligned}$$

Integratie term voor term is geoorloofd. We hebben n.l.:

$$\left| \frac{x}{x^2 + k^2} - \int_{k-1}^k \frac{x dt}{x^2 + t^2} \right| \leq x \left(\frac{1}{x^2 + (k-1)^2} - \frac{1}{x^2 + k^2} \right) \quad (x \geq 0)$$

$$0 \leq \sum_{k=n}^\infty \left(\frac{x}{x^2 + k^2} - \int_{k-1}^k \frac{x dt}{x^2 + t^2} \right) \leq \frac{x}{x^2 + (n-1)^2}$$

$$\left| \int_0^\infty \sum_{k=n}^\infty \left\{ \frac{x}{x^2 + k^2} - \int_{k-1}^k \frac{x dt}{x^2 + t^2} \right\} x^{s-1} dx \right| < \int_0^\infty \frac{x^\sigma dx}{x^2 + (n-1)^2} \dots (29)$$

nu is
$$\int_0^\infty \frac{x^s}{a^2 + x^2} dx = a^{s-1} \int_0^\infty \frac{y^s}{1 + y^2} dy =$$

$$= \frac{1}{2} a^{s-1} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x} dx = \frac{a^{s-1} \cdot \pi}{2 \cos \frac{\pi s}{2}} \quad (a > 0; -1 < \sigma < 1) \dots (30)$$

De laatste integraal van (29) nadert dus tot nul, als $n \rightarrow \infty$, zoodat bewezen is, dat

$$\pi^{1-s} 2^{-s} \Gamma(s) \zeta(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} \frac{x^s dx}{x^2 + k^2} - \int_0^{\infty} dx \int_0^n \frac{x^s dt}{x^2 + t^2} \right\}. \quad (31)$$

$$\text{Hierin is: } \int_0^{\infty} dx \int_0^n \frac{x^s dt}{x^2 + t^2} = \int_0^n dt \int_0^{\infty} \frac{x^s dx}{x^2 + t^2}.$$

Wegens de gelijkmatige convergentie van $\int_0^{\infty} \frac{x^s}{x^2 + t^2} dx$ voor

$$\delta \leq t \leq N \text{ is n.l. } \int_0^{\infty} dx \int_{\delta}^n \frac{x^s dt}{x^2 + t^2} = \int_{\delta}^n dt \int_0^{\infty} \frac{x^s dx}{x^2 + t^2}. \quad \text{Verder}$$

is, wegens $x^2 + t^2 \geq \frac{1}{2}(x+t)^2$

$$\begin{aligned} \lim_{\delta=0} \left| \int_0^{\infty} x^s dx \int_0^{\delta} \frac{dt}{x^2 + t^2} \right| &\leq \lim_{\delta=0} \int_0^{\infty} x^{\sigma} dx \int_0^{\delta} \frac{2 dt}{(x+t)^2} = \\ &= \lim_{\delta=0} \int_0^{\infty} x^{\sigma} \frac{2\delta}{x(x+\delta)} dx = \lim_{\delta=0} 2\delta^{\sigma} B(\sigma, 1-\sigma) = 0. \end{aligned}$$

(31) is nu te schrijven als:

$$\pi^{1-s} 2^{-s} \Gamma(s) \zeta(s) = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi s}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n k^{s-1} - \int_0^n t^{s-1} dt \right\}$$

hetgeen de functionaalvergelijking

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s)$$

oplevert. Gemakkelijk kan worden ingezien, dat deze over het geheele complexe vlak kan worden voortgezet.