

COMPEI : een rekenprogramma voor complexe eigenwaarden

Citation for published version (APA):

Kraker, de, A. (1983). *COMPEI : een rekenprogramma voor complexe eigenwaarden*. (DCT rapporten; Vol. 1983.013). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1983

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

COMPEI

Een rekenprogramma voor
complexe eigenwaarden.

Eindhoven, juni 1983
Vakgroep fundamentele
 werktuigbouwkunde
Dr. Ir. A. de Kraker
THE rapport WE 83.13

Samenvatting

Dit rapport beschrijft het gebruik van het programma COMPEI voor de bepaling van de complexe eigenwaarden en -vectoren van discrete, viskeus gedempte dynamische systemen met n vrijheidsgraden. De eigenwaarden worden geplott in het complexe vlak en in numerieke vorm verzameld met de eigenvectoren in een uitvoerfile.

Inhoud

	pag.
1. Theoretische achtergrond.	1.
2. De invoer van het programma	6.
3. De uitvoer van het programma	8.
4. Illustratie van in- en uitvoer.	9.
5. Een voorbeeld.	15.

1. Theoretische achtergrond.

Het rekenprogramma is opgezet voor het bepalen van de complexe eigenwaarden van een viskeus gedempt, dynamisch systeem met n vrijheidsgraden. Het hierbij behorende algemene eigenwaarde probleem luidt:

$$[\lambda^2 M + \lambda B + K] \underline{u} = \underline{0} \quad (1)$$

Hierbij is:

- * M de $(n \times n)$ positief definitie massamatrix
- * B de $(n \times n)$ viskeuze dempingsmatrix
- * K de $(n \times n)$ positief definitie stijfheidsmatrix
- * \underline{u} de eigenvector behorende bij de complexe eigenwaarde λ .

M , B en K hoeven niet symmetrisch te zijn.

Voor de numerieke oplossing van dit eigenwaarde probleem wordt de eraan ten grondslag liggende differentiaalvergelijking:

$$M \underline{\ddot{q}}(t) + B \underline{\dot{q}}(t) + K \underline{q}(t) = \underline{0} \quad (2)$$

aangevuld met het stelsel van n (triviale) vergelijkingen:

$$M \underline{\dot{q}}(t) = M \underline{\dot{q}}(t) \quad (3)$$

Dan kan geschreven worden:

$$C \underline{\dot{y}}(t) + D \underline{y}(t) = \underline{0} \quad (4)$$

waarbij :

$$C := \begin{bmatrix} B & M \\ M & 0 \end{bmatrix}; D := \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}; \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} \underline{q}(t) \\ \underline{\dot{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Voor de oplossing van (4) poneren wij :

$$\underline{y}(t) = \underline{v} e^{\lambda t} \quad (6)$$

waarmee wij krijgen :

$$[\lambda C + D] \underline{v} = \underline{0} \quad (7)$$

Stellen wij nu :

$$A := D^{-1} C = \begin{bmatrix} K^{-1} B & K^{-1} M \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

dan krijgen wij het standaard-eigenwaarde probleem behorende bij de niet-symmetrische matrix A :

$$[A - \mu I] \underline{v} = \underline{0} \quad (9)$$

hierbij is μ gedefinieerd als : $\mu = \frac{-1}{\lambda}$.

Omdat de matrix A niet symmetrisch is resulteren hieruit in het algemeen complexe eigenwaarden λ_i en -vectoren

\underline{v}_i .

Eenvoudig kan nagegaan worden dat de $2n$ eigenvectoren \underline{v}_i ($i=1,2,\dots,2n$) van vergelijking (9) kunnen schrijven als:

$$U_2 := [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{2n}] = \begin{bmatrix} U & U' \\ U\Lambda_j & U'\Lambda'_j \end{bmatrix} \quad (10)$$

De achtergrond van deze onderverdeling in twee groepen van n eigenvectoren is gelegen in het feit dat wij in de praktijk veel te maken hebben met niet al te sterk gedempte systemen. In dat geval vinden wij n algemeen complexe eigenwaarden en de n toegevoegd complexe eigenwaarden als oplossing. Hierbij behoren n eigenvectoren (complex) en n toegevoegd complexe vectoren. In dat geval geldt dan:

$$U' = \bar{U} \quad ; \quad \Lambda'_j = \Gamma \bar{\Lambda}_j \quad * \quad (11)$$

De eigenwaarden en dus ook de eigenvectoren kunnen echter ook zuiver reëel zijn bij sterk gedempte systemen. In dat geval heeft de bovengenoemde onderverdeling weinig zin.

De eigenvectoren van het oorspronkelijke eigenwaardeprobleem (1) kunnen uit de matrix U_2 worden afgezonderd door hiervan de eerste n rijen te nemen dus:

$$U_1 := [u_1, u_2, \dots, u_{2n}] = [U \quad U'] \quad (12)$$

* Een matrix voorzien van Γ_j betreft expliciet een diagonaal-matrix.

Het rekenprogramma bepaalt nu de $2n$ complexe eigenwaarden λ_i en de corresponderende eigenvectoren u_i .

Ordening van de eigenwaarden en -vectoren.

De eigenwaarden λ_i worden geordend op de volgende manier:

- Eerst wordt het aantal "echt complexe" eigenwaarden met een positief imaginair deel bepaald. Dit aantal wordt aangegeven met n_{comp} .
- Hieruit volgt direct het aantal zuiver reële eigenwaarden n_{real} , namelijk: $n_{real} = 2n - 2 * n_{comp}$.

Opm: Een eigenwaarde wordt zuiver reëel genoemd indien $abs [Im(\lambda_i) / Re(\lambda_i)] < 0.01$

De nummering der eigenwaarden is nu als volgt:

* $i = 1, 2, \dots, n_{comp}$

De complexe eigenwaarden met pos. imaginair deel zodanig dat:

$$Im(\lambda_j) \leq Im(\lambda_{j+1}) \text{ voor } j = 1, 2, \dots, n_{comp} - 1.$$

* $i = (n_{comp} + 1) \dots (n_{comp} + n_{real})$.

De zuiver reële eigenwaarden zodanig dat

$$|\lambda_j| \leq |\lambda_{j+1}|$$

* $i = (n_{comp} + n_{real} + 1) \dots (2n)$

De toegevoegd complexe eigenwaarden van groep 1, zodanig dat

$$Im(\lambda_j) \leq Im(\lambda_{j+1})$$

Normering der eigenvectoren.

De eigenvectoren worden zodanig genormeerd dat de diagonaal matrix $[C^*]$, gedefinieerd als:

$$[C^*] := U_2^T C U_2 \quad (13)$$

de eenheidsmatrix wordt.

Opmerking

1. Omdat bij de uitvoer een plot van het complexe vlak met daarin de eigenwaarden behoort dient het gebruiken van het programma te geschieden vanaf een grafische terminal.
2. In de huidige versie is de array-dimensionering afgestemd op een probleem met:
 $n \leq 20$
Indien gewenst moeten voor grotere problemen de "dimension-statements" worden aangepast.
3. Het programma is aanwezig op de PRIME-computer. Inf. bij A. de Kraker.

2. De invoer van het rekenprogramma.

De invoer voor het programma kan op twee manieren geschieden n.l.

I: Via het vooraf creëren van een file met de naam INPUT

II: Interactief door het inlezen van enkelvoudige element.

Na het starten van het programma wordt U gevraagd welke methode U kiest, met de vraag:

"Do you want to read a file input (1) or use single element input (1)."

U moet dan typen:

∅ voor methode I

1 voor methode II.

Methode I.

Hierbij moet U vooraf een file met de naam INPUT creëren waarin achtereenvolgens is opgenomen:

* n : de orde van de matrices M, B en K

* isym : Integer om aan te geven of M, B en K al dan niet symmetrisch zijn.

isym = 1 symmetrische matrices

isym ≠ 1 niet symmetrische matrices.

* Vervolgens moet U achtereenvolgens de matrices M, B en K aanbieden.

Indien isym = 1 dient U enkel de linksonder driehoek van deze matrices aan te bieden, en wel rijgewijs.

Indien $i_{sym} \neq 1$ dient u de hele matrices (rijgewijs) aan te bieden.

Methode II.

Bij deze methode kan interactief de massa-dempings- en stijfheidsmatrix worden opgebouwd. Hierbij worden n vrijheidsgraden onderscheiden die direct gekoppeld zijn aan diskrete massapunten. De vaste wereld krijgt daarbij vrijheidsgraad \emptyset . Vervolgens kunnen eerst "demperelementen" worden ingelezen welke steeds gekoppeld zijn aan twee vrijheidsgraden. Hetzelfde geschiedt daarna voor de "veerelementen". Bij deze methode worden de matrices M, B en K automatisch symmetrisch.

Achtereenvolgens worden u de volgende vragen gesteld:

* "aantal vrijheidsgraden $n =$ " : type het aantal discrete massa's

* "Vullen van de massamatrix"

"Geef voor elke vrijheidsgr. de massa [kg]"

* "Vullen van de dempingsmatrix"

"Geef komb. van g.v.v. met bijbehorende demping"

Hiermee voert u een willekeurig aantal dempers in tussen twee massa's of tussen een massa en de vaste wereld.

Type : i, j, b met i en $j \neq 0$ voor een demper b tussen massa i en j

Type : i, j, b met $(i=0, j \neq 0)$ of $(i \neq 0, j=0)$ voor een demper b tussen massa en fundatie.

Type : $0, 0, \alpha$ voor beëindiging van deze invoer fase. (α willekeurig)

- * "vullen van de stijfheidsmatrix"
- "Geef komb. van g.v.v. met bijbehorende stijfheid"

Dit geschiedt analoog aan de dempingsmatrix.
(Ook nu weer eindigen met $0, 0, \alpha$)

Tenslotte wordt bij deze vorm van input een file met de naam `OUTIN` gecreëerd zoals bij methode `I` is geschetst. Deze file kan gebruikt worden om het probleem opnieuw te draaien eventueel met een aangepaste probleemstelling door de file op de gewenste wijze te veranderen.

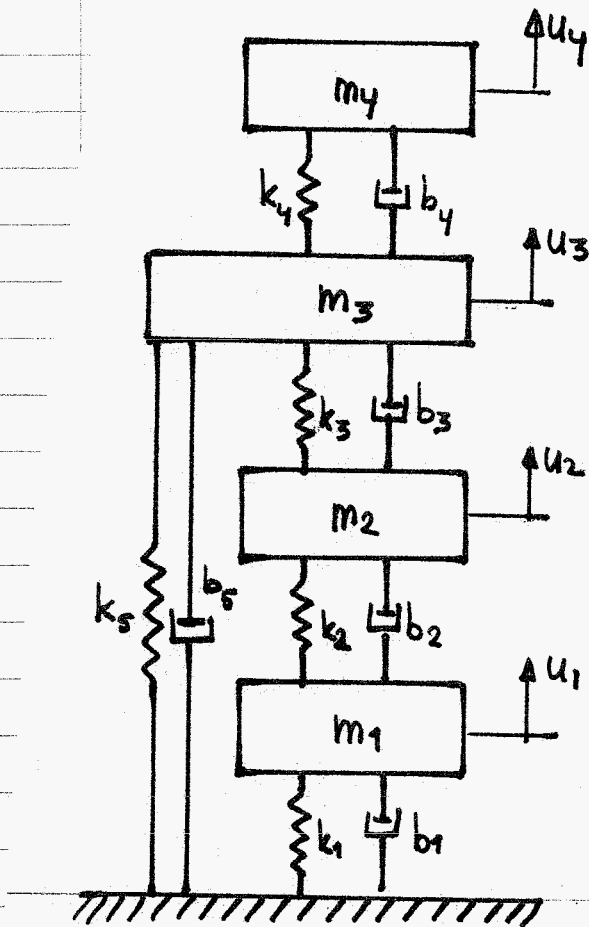
3. De uitvoer van het programma.

De uitvoer van het programma bestaat uit:

- Een file met de naam `OUTPUT` met daarin:
 - * de dimensie van het probleem (n)
 - * de ingelezen matrices M , B en K
 - * de $(2n)$ eigenwaarden en -vectoren.

- Een plot van het complexe vlak met daarin
 - * de complexe eigenwaarden met positief imaginair deel
 - * de reële eigenwaarden.

4. Illustratie van in- en uitvoer van het programma.



- $m_1 = 2$ [kg]
- $m_2 = 4$ [kg]
- $m_3 = 3$ [kg]
- $m_4 = 4$ [kg]
- $b_1 = 100$ [Ns/m]
- $b_2 = 300$ [Ns/m]
- $b_3 = 50$ [Ns/m]
- $b_4 = 80$ [Ns/m]
- $b_5 = 100$ [Ns/m]
- $k_1 = 4 \cdot 10^3$ [N/m]
- $k_2 = 6 \cdot 10^3$ [N/m]
- $k_3 = 10 \cdot 10^3$ [N/m]
- $k_4 = 1 \cdot 10^3$ [N/m]
- $k_5 = 7 \cdot 10^3$ [N/m]

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 400 & -300 & 0 & 0 \\ -300 & 350 & -50 & 0 \\ 0 & -50 & 230 & -80 \\ 0 & 0 & -80 & 80 \end{bmatrix}$$

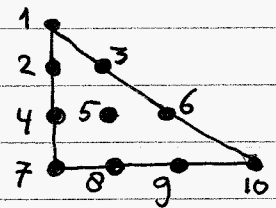
$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 10 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 16 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & 18 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wij beschouwen het bovenstaande probleem. De twee invoermogelijkheden zijn hierna aangegeven.

Methode I File INPUT

4 _____ n
1 _____ isym

0.200000E 01	}	M
0.000000E 00		
0.400000E 01		
0.000000E 00		
0.000000E 00		
0.300000E 01		
0.000000E 00		
0.000000E 00		
0.000000E 00		
0.400000E 01		
0.400000E 03	}	B
-0.300000E 03		
0.350000E 03		
0.000000E 00		
-0.500000E 02		
0.230000E 03		
0.000000E 00		
0.000000E 00		
-0.800000E 02		
0.800000E 02		
0.100000E 05	}	K
-0.600000E 04		
0.160000E 05		
0.000000E 00		
-0.100000E 05		
0.180000E 05		
0.000000E 00		
0.000000E 00		
-0.100000E 04		
0.100000E 04		



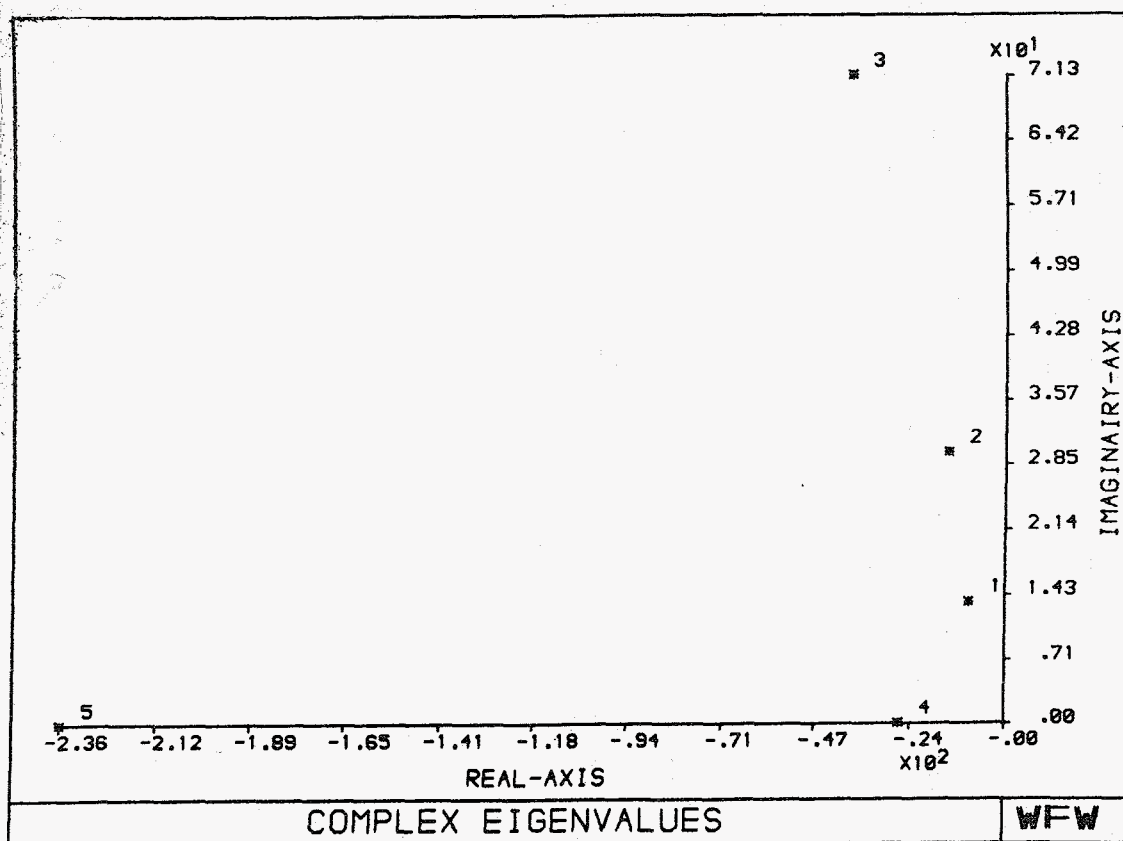
Methode II "single element input"

De hierbij gehanteerde input is weergegeven op de volgende pagina.

```
SEG COMPEI
DO YOU WANT TO READ A FILE : INPUT : (0)
OR USE SINGLE ELEMENT INPUT(1)
1
AANTAL URIJHEIDSGRADEN N=
4
VULLEN VAN DE MASSAMATRIX
GEEF VOOR ELKE URIJHEIDSGR. DE MASSA [KG]
2
4
3
4
VULLEN VAN DE DEMPINGSMATRIX
GEEF KOMB. VAN G.V.U. MET BIJBEH. DEMPING
0,1,100
1,2,300
2,3,50
3,4,80
0,3,100
0,0,0
VULLEN VAN DE STIJFHEIDSMATRIX
GEEF KOMB. VAN G.V.U. MET BIJBEH. STIJFHEID
0,1,4E3
1,2,6E3
2,3,10E3
3,4,1E3
0,3,7E3
0,0,0
```

De output

De output bestaat uit een plot van het complexe vlak en een file: OUTPUT.



File OUTPUT

DIMENSION OF THE PROBLEM N= 4

MASSMATRIX

	COLUMN-NUMBER			
ROW	1	2	3	4
1	0. 20E 01	0. 00E 00	0. 00E 00	0. 00E 00
2	0. 00E 00	0. 40E 01	0. 00E 00	0. 00E 00
3	0. 00E 00	0. 00E 00	0. 30E 01	0. 00E 00
4	0. 00E 00	0. 00E 00	0. 00E 00	0. 40E 01

DAMPINGMATRIX

	COLUMN-NUMBER			
ROW	1	2	3	4
1	0. 40E 03	-0. 30E 03	0. 00E 00	0. 00E 00
2	-0. 30E 03	0. 35E 03	-0. 50E 02	0. 00E 00
3	0. 00E 00	-0. 50E 02	0. 23E 03	-0. 80E 02
4	0. 00E 00	0. 00E 00	-0. 80E 02	0. 80E 02

STIFFNESSMATRIX

	COLUMN-NUMBER			
ROW	1	2	3	4
1	0. 10E 05	-0. 60E 04	0. 00E 00	0. 00E 00
2	-0. 60E 04	0. 16E 05	-0. 10E 05	0. 00E 00
3	0. 00E 00	-0. 10E 05	0. 18E 05	-0. 10E 04
4	0. 00E 00	0. 00E 00	-0. 10E 04	0. 10E 04

COMPLEX EIGENVALUES WITH POS. IMAG. PART

EIGENVALUE NR. 1
REAL-PART= -0. 89501E 01
IMAG-PART= 0. 13479E 02

EIGENVECTOR

REAL-PART	IMAG-PART
0. 82385E-02	0. 42723E-02
0. 13577E-01	0. 36508E-02
0. 15511E-01	0. 40315E-02
0. 72605E-01	-0. 78930E-01

EIGENVALUE NR. 2
REAL-PART= -0.14160E 02
IMAG-PART= 0.29870E 02

EIGENVECTOR

REAL-PART	IMAG-PART
0.32757E-01	-0.27660E-01
0.35327E-01	-0.35544E-01
0.20138E-01	-0.34391E-01
-0.30109E-01	-0.78502E-01

EIGENVALUE NR. 3
REAL-PART= -0.37961E 02
IMAG-PART= 0.71326E 02

EIGENVECTOR

REAL-PART	IMAG-PART
-0.60348E-03	0.16793E-01
-0.64715E-02	0.15169E-01
0.35107E-01	-0.27558E-01
-0.10394E-01	-0.54499E-01

REAL EIGENVALUES

EIGENVALUE NR. 4
REAL-PART= -0.26210E 02
IMAG-PART= -0.48792E-04

EIGENVECTOR

REAL-PART	IMAG-PART
-0.40461E-01	0.16476E-07
0.19332E-01	0.27295E-07
0.12627E-01	0.86160E-08
-0.83886E-02	-0.41137E-06

EIGENVALUE NR. 5
REAL-PART= -0.23582E 03
IMAG-PART= -0.79487E-03

EIGENVECTOR

REAL-PART	IMAG-PART
0.57749E-06	-0.42299E-01
-0.24053E-06	0.17568E-01
-0.88294E-07	-0.24440E-03
0.10323E-05	0.20793E-04

COMPLEX EIGENVALUES WITH NEG. IMAG. PART

EIGENVALUE NR. 6
REAL-PART= -0.37961E 02
IMAG-PART= -0.71326E 02

$(\bar{\lambda}_3)$

EIGENVECTOR

(\bar{u}_3)

REAL-PART	IMAG-PART
-0.60093E-03	-0.16793E-02
-0.64690E-02	-0.15168E-02
0.35110E-01	0.27558E-02
-0.10390E-01	0.54529E-02

EIGENVALUE NR. 7
REAL-PART= -0.14160E 02
IMAG-PART= -0.29870E 02

$(\bar{\lambda}_2)$

EIGENVECTOR

(\bar{u}_2)

REAL-PART	IMAG-PART
0.32756E-01	0.27660E-02
0.35326E-01	0.35544E-02
0.20137E-01	0.34391E-02
-0.30113E-01	0.78474E-02

EIGENVALUE NR. 8
REAL-PART= -0.89501E 01
IMAG-PART= -0.13479E 02

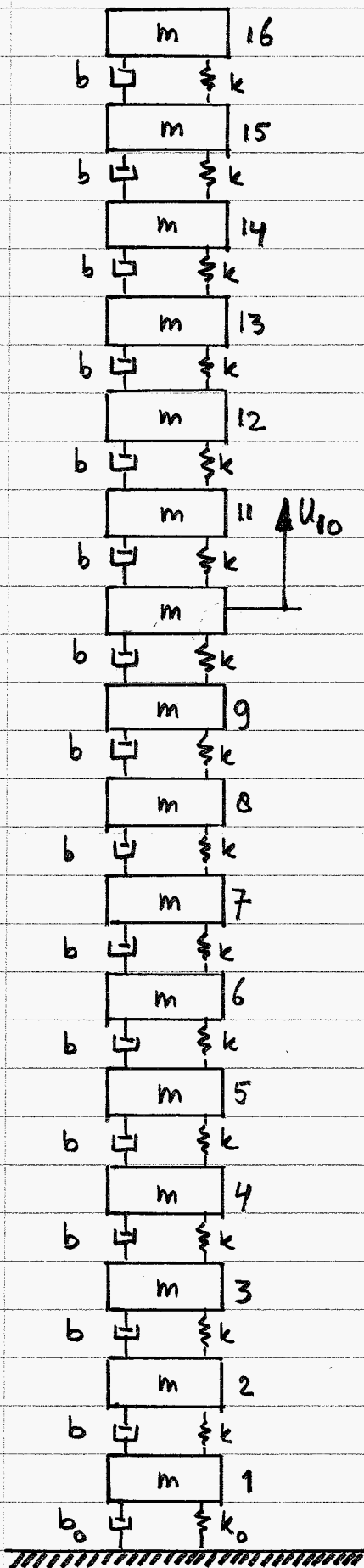
$(\bar{\lambda}_1)$

EIGENVECTOR

(\bar{u}_1)

REAL-PART	IMAG-PART
0.82385E-02	-0.42723E-02
0.13577E-01	-0.36508E-02
0.15511E-01	-0.40315E-02
0.72605E-01	0.78930E-02

5. Een voorbeeld



Ter illustratie van het programma beschouwen wij het hiernaast geschetste probleem met 16 vrijheidsgraden u_i ($i=1,2,\dots,16$). Wij zouden dit voorbeeld kunnen zien als een discreet model van een longitudinaal trillende balk. Wij nemen: $m=1$; $k=1$; $b=0.01$. Allereerst willen wij het vrije trillingsgedrag bekijken. Daartoe nemen wij $b_0=0$, $k_0=0.001$.

Voor een longitudinaal vrij trillende balk met $E=1$, $\rho=1$, $A=1$, $l=16$ volgt voor de eigenhoeckfrequenties ω_i :
(aanname: geen demping)

$$\omega_i = \frac{\pi \cdot i}{l} \quad [\text{rad/s}]$$

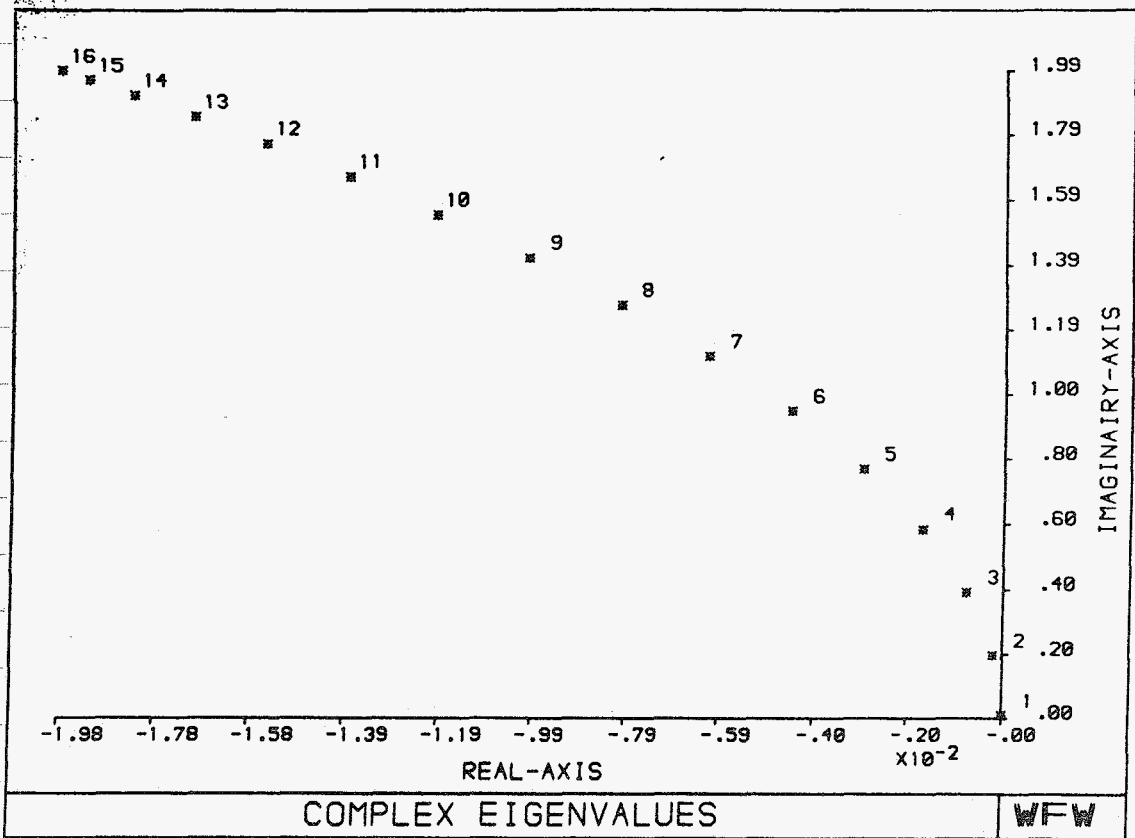
dus:

$\omega_1 = .19635$	$\omega_6 = 1.1781$
$\omega_2 = .39270$	$\omega_7 = 1.3744$
$\omega_3 = .58905$	$\omega_8 = 1.5708$
$\omega_4 = .78540$	$\omega_9 = 1.7615$
$\omega_5 = .98175$	$\omega_{10} = 1.9635$

Bovendien vinden wij een grondfreq. van:

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{k_0}{16}} = 7.906 \cdot 10^{-3} \quad [\text{rad/s}]$$

Op de volgende pagina's is een plot van de relevante eigenwaarden gegeven met de numerieke uitvoer voor de eigenwaarden en de eerste vijf eigenvectoren.



Eigenwaarden vrij trillende balk (longitudinaal).

COMPLEX EIGENVALUES WITH POS. IMAG. PART

EIGENVALUE NR. 1
 REAL-PART= 0.14546E-05
 IMAG-PART= 0.78947E-02

EIGENVECTOR

"starre -
 lichaamsbeweging"

REAL-PART	IMAG-PART
0.14007E 01	-0.14015E 01
0.14020E 01	-0.14028E 01
0.14032E 01	-0.14040E 01
0.14044E 01	-0.14052E 01
0.14054E 01	-0.14062E 01
0.14064E 01	-0.14072E 01
0.14073E 01	-0.14081E 01
0.14081E 01	-0.14089E 01
0.14088E 01	-0.14096E 01
0.14094E 01	-0.14102E 01
0.14099E 01	-0.14107E 01
0.14104E 01	-0.14111E 01
0.14107E 01	-0.14115E 01
0.14110E 01	-0.14117E 01
0.14111E 01	-0.14119E 01
0.14112E 01	-0.14120E 01

EIGENVALUE NR. 2
REAL-PART= -0.19730E-03
IMAG-PART= 0.19635E 00

EIGENVECTOR

REAL-PART	IMAG-PART
0.39750E 00	-0.39943E 00
0.38268E 00	-0.38460E 00
0.35305E 00	-0.35497E 00
0.30984E 00	-0.31175E 00
0.25471E 00	-0.25662E 00
0.18979E 00	-0.19169E 00
0.11757E 00	-0.11947E 00
0.40852E-01	-0.42753E-01
-0.37421E-01	0.35517E-01
-0.11422E 00	0.11231E 00
-0.18659E 00	0.18468E 00
-0.25174E 00	0.24983E 00
-0.30716E 00	0.30524E 00
-0.35071E 00	0.34879E 00
-0.38071E 00	0.37879E 00
-0.39601E 00	0.39408E 00

EIGENVALUE NR. 3
REAL-PART= -0.76726E-03
IMAG-PART= 0.39035E 00

EIGENVECTOR

REAL-PART	IMAG-PART
0.27958E 00	-0.28071E 00
0.23768E 00	-0.23880E 00
0.15978E 00	-0.16089E 00
0.57860E-01	-0.58961E-01
-0.52566E-01	0.51463E-01
-0.15466E 00	0.15355E 00
-0.23288E 00	0.23176E 00
-0.27529E 00	0.27416E 00
-0.27545E 00	0.27431E 00
-0.23331E 00	0.23216E 00
-0.15531E 00	0.15415E 00
-0.53319E-01	0.52166E-01
0.57108E-01	-0.58260E-01
0.15915E 00	-0.16030E 00
0.23726E 00	-0.23841E 00
0.27954E 00	-0.28068E 00

EIGENVALUE NR. 4
REAL-PART= -0.16911E-02
IMAG-PART= 0.58071E 00

EIGENVECTOR

REAL-PART	IMAG-PART
0.22401E 00	-0.22459E 00
0.14970E 00	-0.15026E 00
0.25341E-01	-0.25895E-01
-0.10683E 00	0.10628E 00
-0.20226E 00	0.20169E 00
-0.22876E 00	0.22818E 00
-0.17739E 00	0.17680E 00
-0.65484E-01	0.64881E-01
0.69220E-01	-0.69822E-01
0.18131E 00	-0.18191E 00
0.23298E 00	-0.23356E 00
0.20680E 00	-0.20738E 00
0.11160E 00	-0.11217E 00
-0.20514E-01	0.19938E-01
-0.14499E 00	0.14441E 00
-0.21985E 00	0.21927E 00

EIGENVALUE NR. 5
REAL-PART= -0.29346E-02
IMAG-PART= 0.76547E 00

EIGENVECTOR

REAL-PART	IMAG-PART
0.18981E 00	-0.18685E 00
0.80819E-01	-0.77845E-01
-0.73868E-01	0.76845E-01
-0.18341E 00	0.18637E 00
-0.18363E 00	0.18658E 00
-0.74407E-01	0.77345E-01
0.80265E-01	-0.77324E-01
0.18975E 00	-0.18680E 00
0.18988E 00	-0.18692E 00
0.80614E-01	-0.77636E-01
-0.74047E-01	0.77025E-01
-0.18347E 00	0.18645E 00
-0.18355E 00	0.18651E 00
-0.74221E-01	0.77186E-01
0.80440E-01	-0.77474E-01
0.18982E 00	-0.18685E 00

EIGENVALUE NR. 6
REAL-PART= -0.44500E-02
IMAG-PART= 0.94295E 00

EIGENVALUE NR. 12
REAL-PART= -0.15544E-01
IMAG-PART= 0.17631E 01

EIGENVALUE NR. 7
REAL-PART= -0.61740E-02
IMAG-PART= 0.11109E 01

EIGENVALUE NR. 13
REAL-PART= -0.17061E-01
IMAG-PART= 0.18471E 01

EIGENVALUE NR. 8
REAL-PART= -0.80495E-02
IMAG-PART= 0.12686E 01

EIGENVALUE NR. 14
REAL-PART= -0.18310E-01
IMAG-PART= 0.19135E 01

EIGENVALUE NR. 9
REAL-PART= -0.10003E-01
IMAG-PART= 0.14141E 01

EIGENVALUE NR. 15
REAL-PART= -0.19234E-01
IMAG-PART= 0.19612E 01

EIGENVALUE NR. 10
REAL-PART= -0.11955E-01
IMAG-PART= 0.15461E 01

EIGENVALUE NR. 16
REAL-PART= -0.19807E-01
IMAG-PART= 0.19902E 01

EIGENVALUE NR. 11
REAL-PART= -0.13813E-01
IMAG-PART= 0.16620E 01

Wij hebben hierbij enkel te maken met echt complexe eigenwaarden. De eigenwaarden 17 t/m 32 zijn dus gelijk aan de toegevoegd complexen van 1 t/m 16.

Er blijkt dat de grondfreq. en de eerste 4 eigenfreq. goed overeenstemmen met de theoretische waarden. Daarna worden de verschillen groter, enerzijds omdat wij een discreet model bekijken, anderzijds doordat in het discreet model (weliswaar geringe) demping aanwezig is.

De rekentijd (CPU) voor het oplossen van dit eigenwaarde probleem bedroeg op de PRIME ca. 50 sec.

Ten slotte beschouwen wij de ingeklemde balk
 waartoe wij nemen : $k_0 = k = 1$; $b_0 = b = 0.01$
 Theoretisch geldt hiervoor :

$$\omega_i = \frac{\pi (2n-1)}{2l} \quad (\text{rad/s})$$

dus :

$\omega_1 = 0.098174$	$\omega_6 = 1.0799$
$\omega_2 = 0.29452$	$\omega_7 = 1.2763$
$\omega_3 = 0.49087$	$\omega_8 = 1.4726$
$\omega_4 = 0.6872$	$\omega_9 = 1.6689$
$\omega_5 = 0.8836$	$\omega_{10} = 1.8653$

Mit het programma volgt :

$\lambda_1 = 0.09516 - 0.4 \cdot 10^4 j$	$\lambda_6 = 1.00 - 0.45 \cdot 10^2 j$
$\lambda_2 = 0.28463 - 0.35 \cdot 10^3 j$	$\lambda_7 = 1.1601 - 0.62 \cdot 10^2 j$
$\lambda_3 = 0.47152 - 0.98 \cdot 10^3 j$	$\lambda_8 = 1.3097 - 0.79 \cdot 10^2 j$
$\lambda_4 = 0.65413 - 0.19 \cdot 10^2 j$	$\lambda_9 = 1.4475 - 0.98 \cdot 10^2 j$
$\lambda_5 = 0.83087 - 0.31 \cdot 10^2 j$	$\lambda_{10} = 1.5721 - 1.18 \cdot 10^2 j$

