Le théorème fondamental de Polya dans l' analyse combinatoire

V6

Le théorème fondamental de Pólya dans l'analyse combinatoire.

Résumé d'une conférence à lundi 30 octobre 1967 au seminaire de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, par M. N.G. de Bruijn (Technische Hogeschool, Eindhoven, Pays Bas).

1. Type d'une permutation.

Si π est une permutation de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$, on a un partage de cet ensemble en cycles. Par exemple, la permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 8 & 5 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

(où $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 4$, ...) a les cycles (1245) (38) (76). Pour chaque entier $i > 0$, $b_i(\pi)$ désigne le nombre de cycles de longeur i (alors $\Sigma_i \; ib_i(\pi) = n$). La série

$$b_1(\pi),\; b_2(\pi),\; \ldots$$

s'appelle le type de π.

2. Indicateur de cycles d'un groupe de permutations.

Si G est un groupe de permutations d'un ensemble D, si $x_1, x_2, \ldots$ sont des variables indépendants, on pose

$$P(G;x_1,x_2,\dots) = \frac{1}{|G|}\Sigma_{g\in G}\ x_1^{b_1(g)}\ x_2^{b_2(g)}\ \dots ,$$

que l'on appelle indicateur de cycles de G. Par $|G|$ on désigne le nombre d'éléments de G.

3. Example.

Si D est l'ensemble constitué par les 6 faces d'un cube, et si G est le groupe des 24 permutations de D engendrées par les rotations du cube, on a

$$P(G;x_1,x_2,\dots) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2).$$

Par exemple, une rotation de $\pm 120^\circ$ par une des diagonales principales engendre une permutation de type 0,0,2,0,0,...; il y a 8 rotations de cette exspèce, ce que donne la terme $8x_3^2$.

4. Dessins.

Soit D un sensemble fini, et G un groupe de permutations de D. R est un autre ensemble fini; les éléments de R sont appelés "couleurs". On appelle "coloration de D" toute application f de D dans R. Deux applications f_1,f_2 sont appelées équivalentes ($f_1 \sim f_2$) lorsqu'il existe un $g \in G$ tel que $f_1 g = f_2$ (ce que veut dire

$$f_1(g(d)) = f_2(d)$$

pour tout élément $d \in D$). Cette relation d'équivalence partage l'ensemble de toutes les colorations en classes d'équivalence. Cettes classes sont appelées des dessins.

5. Example.

Si R = {rouge, noir} on trouve 10 dessins dans le cas de l'example du numéro 3. Il y a 2 dessins avec 4 fois rouge et 2 fois noir, un avec les faces rouges opposées, et un avec les faces rouges contigues.

6. Théorème. (cas special du théorème de Pólya). Le nombre de dessins est égal à $P(G; |R|, |R|, |R|, \dots)$.

Pour la démonstration on peut utiliser la lemme de Burnside (voir n° 7).

7. Classes de transitivité.

Soit H un groupe fini, et soit θ une réprésentation de H par permutations d'un ensemble S (ce veut dire: $\theta(h)$ est une permutation de S, pour tout élément $h \in H$, et $\theta(h_1)\theta(h_2^{-1}) = \theta(h_1 h_2^{-1})$ pour tous éléments $h_1 \in H$, $h_2 \in H$. Deux éléments s_1, s_2 de S sont appelés équivalents lorsqu'il y a un élément $h \in H$ tel que $\theta(h)s_1 = s_2$. Les classes d'équivalence s'appellent classes de transitivité.

8. Lemme de Burnside.

Le nombre de classes de transitivité est égal à

$$|H|^{-1} \Sigma_{h \in H} \psi(h),$$

òu, pour tout élément $h \in H$, on écrit $\psi(h)$ pour le nombre d'éléments $s \in S$ tels que $\theta(h)s = s$.

9. Démonstration du théorème du n° 6:

On prend pour S l'ensemble de toutes les colorations. On prend H = G, et pour tout élément $h \in H$ on définit $\theta(h)$ par $\theta(h)f = fh^{-1}$. Il suit que dans ce cas les classes d'équivalence ne sont rien que les dessins du n° 4.

D'autre part, pour tout élément $h \in H$, on peut déterminer $\psi(h)$ (voir n° 8) quand on connait le type de h (voir n° 1). Par example, si

$$h = (1245)\ (38)\ (76),$$

une coloration f telle que $\theta(h)f = f$ est caracterisée par la propriété $f(1)=f(2)=f(4)=f(5)$, $f(3)=f(8)$, $f(7)=f(6)$. Alors il y a $|R|^3$ colorations f de cette sorte. En général

$$\psi(h) = |R|^{b_1(h)}\ |R|^{b_2(h)}\ |R|^{b_3(h)} \cdots .$$

Il résulte que $|H|^{-1} \Sigma_{h \in H} \psi(h) = P(H; |R|, |R|, \ldots)$.

10. Généralisation.

Étant données des couleurs $r_1, \ldots, r_n$ et des entiers non-negatifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, on demande le nombre de dessins dans lesquels r_k figure λ_k fois $(k = 1, \ldots, n)$. On peut obtenir ce nombre avec la même méthode. Si $h \in H$, et si $C_1, \ldots, C_t$ sont les cycles de h (dans l'example ci-dessus on a $C_1 = \{1,2,4,5\}$, $C_2=\{3,8\}$, $C_3 = \{7,8\}$), on cherche les colorations f qui sont constantes sur chaque cycle et qui ont la propriété que la couleur r_k figure λ_k fois $(k=1,\ldots,n)$. Le nombre de possibilités est égal au coefficient de $y_1^{\lambda_1}\ y_2^{\lambda_2} \cdots y_n^{\lambda_n}$ dans le produit

$$(y_1^4 + \cdots + y_n^4)\ (y_1^2 + \cdots + y_n^2)\ (y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$

(la sélection de la couleur r_k sur la classe C_1 correspond à la sélection du terme y_k^4 dans le premier facteur, etc.). On en déduit

<u>Théorème</u> (Pólya [3]). Le nombre de dessins avec λ_1 fois couleur r_1, λ_2 fois couleur $r_2, \ldots, \lambda_r$ fois couleur r_n est égal au coefficient de $y_1^{\lambda_1} \cdots y_n^{\lambda_n}$ dans le développement de

$$P(H; y_1 + \dots + y_n,\ y_1^2 + \dots + y_n^2,\ y_1^3 + \dots + y_n^3, \dots).$$

Une forme equivalente de ce théorème se trouve dans [5].

11. Poids.

Pour obtenir un théorème plus général, on introduit des poids $w_1, \dots, w_r$. Une coloration òu couleur r_k figure λ_k fois $(k = 1, \dots, n)$, obtient le poid $w_1^{\lambda_1} \dots w_n^{\lambda_n}$. Alors on peut énoncer que la somme des poids de dessins est égale à

$$P(H; w_1 + \dots + w_n;\ w_1^2 + \dots + w_n^2,\ w_1^3 + \dots + w_n^3, \dots).$$

Quand on prend pour les poids w_k des variables y_k, on obtient le résultat du n° 10; quand on prend tous les poids w_k égaux à 1 on obtient la formule pour le nombre de dessins.

12. Dessins invariants par rapport à une permutation des couleurs.

Soit π une seule permutation de R. On demand le nombre de dessins qui ne changent pas quand les couleurs sont permutées selon π. Par example, dans le cas du n° 5, quand π interchange les couleurs rouge et noir, il s'agit de dessins contenant des colorations avec la propriété suivante: l'effet de l'interchangement des couleurs rouge et noir peut être compensé par une rotation du cube. Tous deux dessins avec trois fois rouge et trois fois noir ont cette propriété de symétrie.

Théorème (voir [2]). Le nombre de dessins qui sont invariants par rapport à la permutation π est égal a

$$P(H; d_1, d_2, d_3, \dots),$$

òu d_k est le nombre de couleurs r pour lesquelles $\pi^k r = r$.

Dans l'example ci-dessus on obtient $P(H;0,2,0,2,\ldots) =$
$= \frac{1}{24}(0 + 0 + 0 + 6.2^3 + 0) = 2.$

13. Patrons.

Soit H un groupe de permutations de l'ensemble D, et soit Π un groupe de permutations de l'ensemble R. On dit que deux colorations (applications de D dans R) f_1, f_2 appartienent au même patron lorsqu'il y a des éléments $\pi \in \Pi$, $h \in H$ tels que $\pi f_1 h = f_2$ (dans l'example des cubes colorés rouge et noir: une coloration avec seulement une face rouge appartient au même patron qu'une coloration quelconque avec 5 faces rouges).
Le nombre de patrons s'exprîme avec les indicateurs de cycles (voir [1]):

$$P\left(H; \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \ldots\right) P\left(\Pi, e^{z_1+z_2+\ldots}, e^{2(z_2+z_4+\ldots)}, e^{3(z_3+z_6+\ldots)}\right)$$

calculé au point $z_1 = z_2 = \ldots = 0$.

Quand on admet seulement les colorations sans répétition (c'est à dire des applications bi-univogues de D dans R) on a pour le nombre (voir [1])

$$P\left(H; \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \ldots\right) P(\Pi; 1+z, 1+2z_2, 1+3z_3, \ldots)$$

calculé au point $z_1 = z_2 = \ldots = 0$.

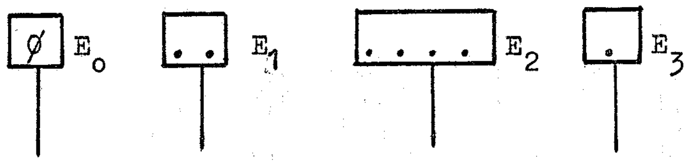
14. Molécules de type d'arbre.

Afin d'introduire la notion de molécules de type d'arbre, nous considérons un assortiment d'atomes, c.à.d. une série

$$(E_o, H_o), \ldots, (E_n, H_n).$$

E_i est un ensemble fini, H_i un groupe de permutations de E_i.

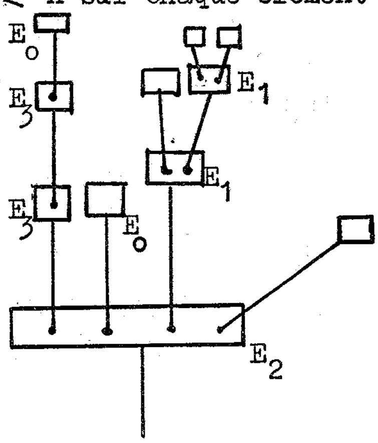
E_o est l'ensemble vide, H_o le groupe trivial. Nous les dessinons comme écriteaux sur des bâtons:



On écrit

$$Q(x_1,x_2,\ldots) = \Sigma_{i=0}^{n} \; P(H_i;x_1,x_2,\ldots).$$

On obtient les molécules de type d'arbre de la facon suivante. Les molécules de hauteur 1 sont des atomes avec l'ensemble vide. On obtient une molécule de hauteur n quand on prend un atome (E_i,H_i) et y plante une molécule de hauteur $<$ n sur chaque élément de E_i.



Deux molécules sont appelées pareilles lorsqu'on obtient l'une de l'autre par une série d'applications de permutations appartenant aux groupes H_i. C'est à dire quand un atome E_i figure dans l'arbre, c'est permis de permuter les arbres plantés sur les éléments de E_i selon une permutation quelconque de H_i. (Pour une formulation plus précise voir [3]). Ainsi on peut définir les arbres topologiques, les arbres planaires, mais ainsi des compositions chimiques quand on veut compter avec l'activité optique (polarisation de la lumière) des atomes de carbone. Quand on compte avec activité optique on considère un atome de carbone comme un ensemble de 3 éléments avec un groupe de 3 éléments (l'identité et les deux permutations cycliques); si l'on veut négliger l'activité optique on prend simplement le groupe symétrique de 6 éléments.

Etant donné un assortiment d'atomes, soit a_n le nombre de molécules à n bâtons. On pose

$$f(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

<u>Théorème</u> (Pólya [4]):

$$f(x) = x \; U(f(x), f(x^2), f(x^3), \ldots).$$

On peut utiliser ce résultat pour le calcul des coefficients a_n.

Références.

[1] N.G. de Bruijn : Pólya's theory of counting. Applied Combinatorial Mathematics, E.F. Beckenbach ed.,Wiley, New York 1964, p. 144-184.

[2] N.G. de Bruijn : Colour patterns that are invariant under a given permutation of the colours, J. Combinatorial Theory, 2 (1967), 418-421.

[3] N.G. de Bruijn : Enumeration of tree-shaped molecules produced from a given atomic store. Internal Report, Notitie Nr. 5 - 1967/68, Technische Hogeschool Eindhoven, Dept. of Math., August 1967.

[4] G. Pólya : Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta Math. 68 (1937) 145 - 254.

[5] J. Riguet : Notices sur quelques principes fondamentaux d'énumération, Appendice V de: C. Berge, Théorie des graphes et ses applications, Paris 1958.