

Le théorème fondamental de Polya dans l'analyse combinatoire

Citation for published version (APA):

Bruijn, de, N. G. (1967). *Le théorème fondamental de Polya dans l'analyse combinatoire*. (Publicaties de Bruijn; Vol. V6). s.n.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1967

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Le théorème fondamental de Pólya dans l'analyse combinatoire.

Résumé d'une conférence à lundi 30 octobre ¹⁹⁶⁷ au séminaire de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, par M. N.G. de Bruijn (Technische Hogeschool, Eindhoven, Pays Bas).

1. Type d'une permutation.

Si π est une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, on a un partage de cet ensemble en cycles. Par exemple, la permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 8 & 5 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

(où $\pi(1) = 2, \pi(2) = 4, \dots$) a les cycles (1245) (38) (76). Pour chaque entier $i > 0$, $b_i(\pi)$ désigne le nombre de cycles de longueur i (alors $\sum_i i b_i(\pi) = n$). La série

$$b_1(\pi), b_2(\pi), \dots$$

s'appelle le type de π .

2. Indicateur de cycles d'un groupe de permutations.

Si G est un groupe de permutations d'un ensemble D , si x_1, x_2, \dots sont des variables indépendants, on pose

$$P(G; x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{b_1(g)} x_2^{b_2(g)} \dots,$$

que l'on appelle indicateur de cycles de G . Par $|G|$ on désigne le nombre d'éléments de G .

3. Exemple.

Si D est l'ensemble constitué par les 6 faces d'un cube, et si G est le groupe des 24 permutations de D engendrées par les rotations du cube, on a

$$P(G; x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_3 + 6x_2^3 + 8x_3^2).$$

Par exemple, une rotation de $\pm 120^\circ$ par une des diagonales principales engendre une permutation de type $0, 0, 2, 0, 0, \dots$; il y a 8 rotations de cette espèce, ce que donne la terme $8x_3^2$.

4. Dessins.

Soit D un ensemble fini, et G un groupe de permutations de D . R est un autre ensemble fini; les éléments de R sont appelés "couleurs". On appelle "coloration de D " toute application f de D dans R . Deux applications f_1, f_2 sont appelées équivalentes ($f_1 \sim f_2$) lorsqu'il existe un $g \in G$ tel que $f_1 g = f_2$ (ce que veut dire

$$f_1(g(d)) = f_2(d)$$

pour tout élément $d \in D$). Cette relation d'équivalence partage l'ensemble de toutes les colorations en classes d'équivalence. Ces classes sont appelées des dessins.

5. Exemple.

Si $R = \{\text{rouge, noir}\}$ on trouve 10 dessins dans le cas de l'exemple du numéro 3. Il y a 2 dessins avec 4 fois rouge et 2 fois noir, un avec les faces rouges opposées, et un avec les faces rouges contigües.

6. Théorème. (cas special du théorème de Pólya). Le nombre de dessins est égal à $P(G; |R|, |R|, |R|, \dots)$.

Pour la démonstration on peut utiliser la lemme de Burnside (voir n° 7).

7. Classes de transitivité.

Soit H un groupe fini, et soit θ une représentation de H par permutations d'un ensemble S (ce veut dire: $\theta(h)$ est une permutation de S , pour tout élément $h \in H$, et $\theta(h_1)\theta(h_2^{-1}) = \theta(h_1h_2^{-1})$ pour tous éléments $h_1 \in H, h_2 \in H$. Deux éléments s_1, s_2 de S sont appelés équivalents lorsqu'il y a un élément $h \in H$ tel que $\theta(h)s_1 = s_2$. Les classes d'équivalence s'appellent classes de transitivité.

8. Lemme de Burnside.

Le nombre de classes de transitivité est égal à

$$|H|^{-1} \sum_{h \in H} \psi(h),$$

où, pour tout élément $h \in H$, on écrit $\psi(h)$ pour le nombre d'éléments $s \in S$ tels que $\theta(h)s = s$.

9. Démonstration du théorème du n° 6:

On prend pour S l'ensemble de toutes les colorations. On prend $H = G$,

et pour tout élément $h \in H$ on définit $\theta(h)$ par $\theta(h)f = fh^{-1}$. Il suit que dans ce cas les classes d'équivalence ne sont rien que les dessins du n° 4.

D'autre part, pour tout élément $h \in H$, on peut déterminer $\psi(h)$ (voir n° 8) quand on connaît le type de h (voir n° 1). Par exemple, si

$$h = (1245) (38) (76),$$

une coloration f telle que $\theta(h)f = f$ est caractérisée par la propriété $f(1)=f(2)=f(4)=f(5)$, $f(3)=f(8)$, $f(7)=f(6)$. Alors il y a $|R|^3$ colorations f de cette sorte. En général

$$\psi(h) = |R|^{b_1(h)} |R|^{b_2(h)} |R|^{b_3(h)} \dots$$

Il résulte que $|H|^{-1} \sum_{h \in H} \psi(h) = P(H; |R|, |R|, \dots)$.

10. Généralisation.

Étant données des couleurs r_1, \dots, r_n et des entiers non-négatifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, on demande le nombre de dessins dans lesquels r_k figure λ_k fois ($k = 1, \dots, n$). On peut obtenir ce nombre avec la même méthode. Si $h \in H$, et si C_1, \dots, C_t sont les cycles de h (dans l'exemple ci-dessus on a $C_1 = \{1, 2, 4, 5\}$, $C_2 = \{3, 8\}$, $C_3 = \{7, 6\}$), on cherche les colorations f qui sont constantes sur chaque cycle et qui ont la propriété que la couleur r_k figure λ_k fois ($k=1, \dots, n$). Le nombre de possibilités est égal au coefficient de $y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_n^{\lambda_n}$ dans le produit

$$(y_1^4 + \dots + y_n^4) (y_1^2 + \dots + y_n^2) (y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

(la sélection de la couleur r_k sur la classe C_1 correspond à la sélection du terme y_k^4 dans le premier facteur, etc.). On en déduit

Théorème (Pólya [3]). Le nombre de dessins avec λ_1 fois couleur r_1 , λ_2 fois couleur r_2, \dots, λ_r fois couleur r_n est égal au coefficient de $y_1^{\lambda_1} \dots y_n^{\lambda_n}$ dans le développement de

$$P(H; y_1 + \dots + y_n, y_1^2 + \dots + y_n^2, y_1^3 + \dots + y_n^3, \dots).$$

Une forme equivalente de ce théorème se trouve dans [5].

11. Poids.

Pour obtenir un théorème plus général, on introduit des poids w_1, \dots, w_n . Une coloration où couleur r_k figure λ_k fois ($k = 1, \dots, n$), obtient le poids $w_1^{\lambda_1} \dots w_n^{\lambda_n}$. Alors on peut énoncer que la somme des poids de dessins est égale à

$$P(H; w_1 + \dots + w_n, w_1^2 + \dots + w_n^2, w_1^3 + \dots + w_n^3, \dots).$$

Quand on prend pour les poids w_k des variables y_k , on obtient le résultat du n° 10; quand on prend tous les poids w_k égaux à 1 on obtient la formule pour le nombre de dessins.

12. Dessins invariants par rapport à une permutation des couleurs.

Soit π une seule permutation de R . On demande le nombre de dessins qui ne changent pas quand les couleurs sont permutées selon π . Par exemple, dans le cas du n° 5, quand π interchange les couleurs rouge et noir, il s'agit de dessins contenant des colorations avec la propriété suivante: l'effet de l'interchangement des couleurs rouge et noir peut être compensé par une rotation du cube. Tous deux dessins avec trois fois rouge et trois fois noir ont cette propriété de symétrie.

Théorème (voir [2]). Le nombre de dessins qui sont invariants par rapport à la permutation π est égal à

$$P(H; d_1, d_2, d_3, \dots),$$

où d_k est le nombre de couleurs r pour lesquelles $\pi^k r = r$.

Dans l'exemple ci-dessus on obtient $P(H; 0, 2, 0, 2, \dots) =$
 $= \frac{1}{24} (0 + 0 + 0 + 6 \cdot 2^3 + 0) = 2.$

13. Patrons.

Soit H un groupe de permutations de l'ensemble D , et soit Π un groupe de permutations de l'ensemble R . On dit que deux colorations (applications de D dans R) f_1, f_2 appartiennent au même patron lorsqu'il y a des éléments $\pi \in \Pi, h \in H$ tels que $\pi f_1 h = f_2$ (dans l'exemple des cubes colorés rouge et noir: une coloration avec seulement une face rouge appartient au même patron qu'une coloration quelconque avec 5 faces rouges).

Le nombre de patrons s'exprime avec les indicateurs de cycles (voir [1]):

$$P(H; \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \dots) P(\Pi, e^{z_1+z_2+\dots}, e^{2(z_2+z_4+\dots)}, e^{3(z_3+z_6+\dots)})$$

calculé au point $z_1 = z_2 = \dots = 0.$

Quand on admet seulement les colorations sans répétition (c'est à dire des applications bi-univoues de D dans R) on a pour le nombre (voir [1])

$$P(H; \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \dots) P(\Pi; 1+z, 1+2z_2, 1+3z_3, \dots)$$

calculé au point $z_1 = z_2 = \dots = 0.$

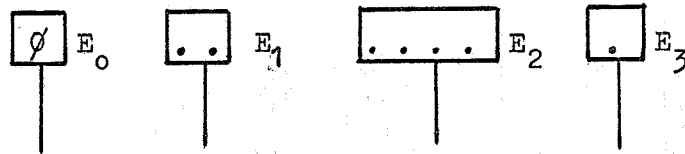
14. Molécules de type d'arbre.

Afin d'introduire la notion de molécules de type d'arbre, nous considérons un assortiment d'atomes, c.à.d. une série

$$(E_0, H_0), \dots, (E_n, H_n).$$

E_i est un ensemble fini, H_i un groupe de permutations de E_i .

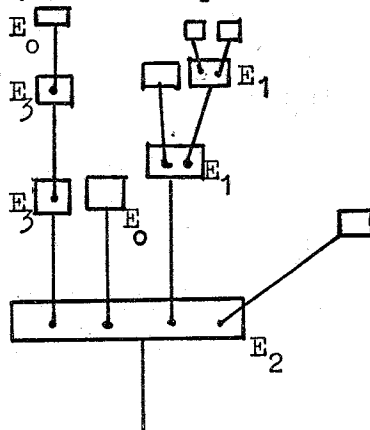
E_0 est l'ensemble vide, H_0 le groupe trivial. Nous les dessinons comme écriteaux sur des bâtons:



On écrit

$$Q(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i=0}^n P(H_i; x_1, x_2, \dots).$$

On obtient les molécules de type d'arbre de la façon suivante. Les molécules de hauteur 1 sont des atomes avec l'ensemble vide. On obtient une molécule de hauteur n quand on prend un atome (E_i, H_i) et y plante une molécule de hauteur $< n$ sur chaque élément de E_i .



Deux molécules sont appelées pareilles lorsqu'on obtient l'une de l'autre par une série d'applications de permutations appartenant aux groupes H_i . C'est à dire quand un atome E_i figure dans l'arbre, c'est permis de permuer les arbres

plantés sur les éléments de E_i selon une permutation quelconque de H_i . (Pour une formulation plus précise voir [3]). Ainsi on peut définir les arbres topologiques, les arbres planaires, mais ainsi des compositions chimiques quand on veut compter avec l'activité optique (polarisation de la lumière) des atomes de carbone. Quand on compte avec activité optique on considère un atome de carbone comme un ensemble de 3 éléments avec un groupe de 3 éléments (l'identité et les deux permutations cycliques); si l'on veut négliger l'activité optique on prend simplement le groupe symétrique de 6 éléments.

Etant donné un assortiment d'atomes, soit a_n le nombre de molécules à n bâtons. On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Théorème (Pólya [4]):

$$f(x) = x U(f(x), f(x^2), f(x^3), \dots).$$

On peut utiliser ce résultat pour le calcul des coefficients a_n .

Références.

- [1] N.G. de Bruijn : Pólya's theory of counting. Applied Combinatorial Mathematics, E.F. Beckenbach ed., Wiley, New York 1964, p. 144-184.
- [2] N.G. de Bruijn : Colour patterns that are invariant under a given permutation of the colours, J. Combinatorial Theory, 2 (1967), 418-421.
- [3] N.G. de Bruijn : Enumeration of tree-shaped molecules produced from a given atomic store. Internal Report, Notitie Nr. 5 - 1967/68, Technische Hogeschool Eindhoven, Dept. of Math., August 1967.
- [4] G. Pólya : Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta Math. 68 (1937) 145 - 254.
- [5] J. Riguet : Notices sur quelques principes fondamentaux d'énumération, Appendice V de: C. Berge, Théorie des graphes et ses applications, Paris 1958.