

# Aanpassing van het optimale Kalman-Bucy filter aan versnellingsmetingen

**Citation for published version (APA):**

van de Nobelen, M. Q. M. (1988). *Aanpassing van het optimale Kalman-Bucy filter aan versnellingsmetingen*. (DCT rapporten; Vol. 1988.007). Technische Universiteit Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1988

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

Stageverslag:

AANPASSING VAN HET OPTIMALE

KALMAN-BUCY FILTER AAN

VERSNELLINGSMETINGEN

Maurice van de Nobelen

WFW 88.007

Technische Universiteit Eindhoven

Afdeling der Werktuigbouwkunde

Vakgroep Fundamentele Werktuigbouwkunde

Stagebegeleider: M.J.G. van de Molengraft

januari 1988

## SAMENVATTING

Dit verslag behandelt de resultaten van een theoretisch onderzoek dat als doel heeft het aanpassen van het optimale Kalman-Bucy filter zodanig dat gebruik gemaakt kan worden van versnellingsmetingen. Het model van het te observeren systeem wordt opgesteld en de bijbehorende reconstrueerbaarheidsvoorwaarde wordt afgeleid. Wanneer het model van het systeem bekend is kan er een model voor een volledige orde waarnemer opgesteld worden. Het probleem is nu het vinden van de optimale waarnemer, hetgeen neer blijkt te komen op het vinden van de optimale waarde van de versterkingsmatrix. Tenslotte wordt door middel van simulatie van een eenvoudig voorbeeld-systeem het gedrag van het gevonden optimale filter onderzocht.

Samenvatting	2
1. Inleiding	4
2. Model systeem	5
3. Reconstrueerbaarheid	7
3.1 Inleiding	7
3.2 Voorwaarden voor reconstrueerbaarheid	7
4. Model waarnemer	11
4.1 Inleiding	11
4.2 Volledige orde waarnemer	12
4.3 De optimale waarnemer	15
4.3.1 Minimalisatie van $\mu_e^T(t)\mu_e(t)$	18
4.3.2 Minimalisatie van $\text{tr}[Q(t)]$	18
5. Toestandsreconstructie van een eenvoudig voorbeeld-systeem	26
5.1 Inleiding	26
5.2 REGNONLIN	27
5.3 Uitwerking voorbeeld	27
5.4 Simulatie	29
5.4.1 Algemeen	29
5.4.2 Simulatieresultaten	30
5.4.3 Evaluatie resultaten	39
6. Conclusies en aanbevelingen	40
Appendix A Opmerkingen met betrekking tot het gebruik van de aangepaste REGNONLIN versie	

## 1. INLEIDING

De toestandsschatting van de optimale waarnemer (Kalman-Bucy filter) is gebaseerd op meting van uitgangsgrootheden, die een lineaire combinatie vormen van de toestandsvariabelen van het betreffende systeem. Bij mechanische systemen bevat de toestandsvector in het algemeen verplaatsingen en snelheden van de diverse onderdelen van het systeem, die in veel gevallen moeilijk meetbaar zijn, bijvoorbeeld door elastische deformaties. Daarentegen is het vaak relatief eenvoudig om informatie over de optredende versnellingen te verkrijgen door toepassing van krachtopnemers. Het probleem is nu hoe het optimale filter moet worden aangepast om ook gebruik te kunnen maken van versnellingsmetingen. Daarnaast moet door middel van simulatie van een eenvoudig voorbeeld-systeem worden nagegaan in hoeverre het gebruik van versnellingsmetingen het optimale filter beïnvloedt.

## 2. MODEL SYSTEEM

Beschouw het model van een lineair constant systeem:

$$\text{toestandsvergelijking: } \dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \quad (2.1)$$

$$\text{uitgangsvergelijking: } \underline{y}(t) = \underline{g}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) = C_1\underline{x}(t) + C_2\dot{\underline{x}}(t) \quad (2.2)$$

met:  $\underline{x}(t)$  toestandsvector (dimensie  $n$ ),  
 $\underline{y}(t)$  uitgangsvector (dimensie  $l$ ),  
 $\underline{u}(t)$  ingangsvector (dimensie  $m$ ),  
 $A$  matrix (dimensie  $n \times n$ ),  
 $B$  matrix (dimensie  $n \times m$ ),  
 $C_1, C_2$  matrices (dimensie  $l \times n$ )

De uitgangsvergelijking is nu niet alleen een functie van  $\underline{x}(t)$  maar ook een functie van  $\dot{\underline{x}}(t)$ . Bij een (2<sup>e</sup> orde) mechanisch systeem wordt hierdoor de mogelijkheid geopend gebruik te maken van versnellingsmetingen.

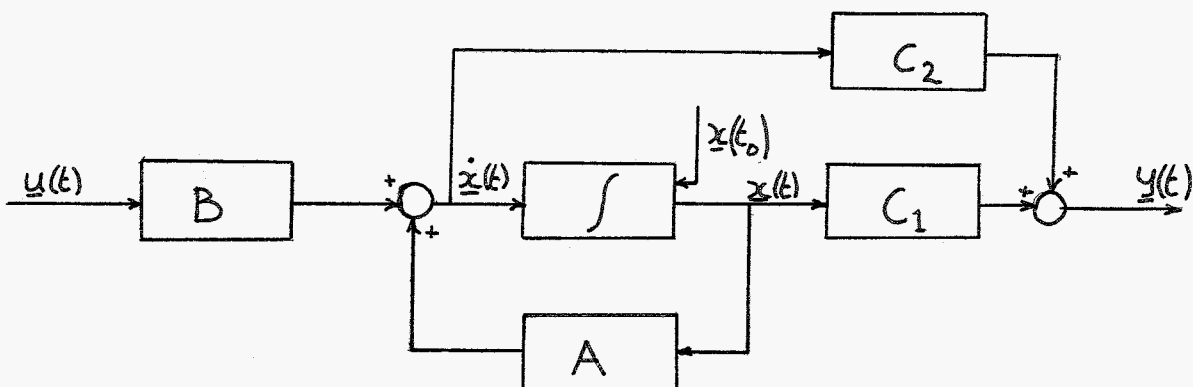


fig 2.1 model systeem

De toestands- en uitgangsvergelijking in expliciete vorm worden nu afgeleid:

(2.1) in (2.2) levert:

$$\underline{y}(t) = C_1 \underline{x}(t) + C_2 A \underline{x}(t) + C_2 B \underline{u}(t) \quad (2.3)$$

ofwel:

$$\underline{y}(t) = \tilde{C} \underline{x}(t) + C_2 B \underline{u}(t) \quad (2.4)$$

met:

$$\tilde{C} = C_1 + C_2 A \quad (2.5)$$

De overgangsmatrix voor een lineair constant systeem is gelijk aan:

$$\varphi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \quad (2.6)$$

Gebruik makend van (2.6) luiden de toestandsvergelijking en de uitgangsvergelijking in expliciete vorm:

$$\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

$$\underline{y}(t) = \tilde{C} e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0) + \tilde{C} \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau + C_2 B \underline{u}(t) \quad (2.8)$$

### 3. RECONSTRUEERBAARHEID

#### 3.1 Inleiding

Het begrip reconstrueerbaarheid komt hier ter sprake. Een systeem wordt reconstrueerbaar genoemd als het mogelijk is om uit het verloop in de tijd van het uitgangssignaal het verloop in de tijd van de toestand te reconstrueren. In dit hoofdstuk zullen noodzakelijke en voldoende voorwaarden ten aanzien van de matrices  $A$ ,  $C_1$  en  $C_2$  worden afgeleid waaronder een lineair systeem reconstrueerbaar is.

#### 3.2 Voorwaarden voor reconstrueerbaarheid

Definitie: het systeem beschreven door (2.1) en (2.2) is volledig reconstrueerbaar onder de noodzakelijke en voldoende voorwaarde dat voor elke  $t_e$  er een  $t_0$  bestaat met  $0 < t_0 < t_e$ , zodanig dat de gelijkheid:

$$y(u(t:t_0, t); \underline{x}(t_0) = \underline{x}_1) = y(u(t:t_0, t); \underline{x}(t_0) = \underline{x}_2) ; t_0 \leq t \leq t_e \quad (3.1)$$

voor willekeurige  $u(t:t_0, t)$  impliceert dat  $\underline{x}_1 = \underline{x}_2$ .

Voor een lineair constant systeem kan ook een eenvoudigere voorwaarde gesteld worden, nl:

Voor elke  $t_e$  moet er een  $t_0$  bestaan met  $0 < t_0 < t_e$  zodanig dat de gelijkheid:

$$y(0; \underline{x}(t_0)) = \underline{0} \quad ; t_0 \leq t \leq t_e \quad (3.2)$$

impliceert dat  $\underline{x}(t_0) = \underline{0}$ . Door substitutie van (2.8) in beide



voorwaarden (3.1) en (3.2) is eenvoudig in te zien dat beide voorwaarden in dit geval identiek aan elkaar zijn.

Er zullen nu noodzakelijke en voldoende voorwaarden ten aanzien van de matrices  $A$ ,  $C_1$  en  $C_2$  worden afgeleid waaronder een lineair constant systeem volledig reconstrueerbaar is.

Substitutie van (2.8) in (3.2) levert:

$$y(0; \underline{x}(t_0)) = \tilde{e} e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0) = \underline{0} ; t_0 \leq t \leq t_e \quad (3.3)$$

Met de Taylorreeksontwikkeling voor  $e^{A(t-t_0)}$ :

$$e^{A(t-t_0)} = I + A(t-t_0) + A^2(t-t_0)^2/2! + A^3(t-t_0)^3/3! + \dots \quad (3.4)$$

kan betrekking (3.3) als volgt worden herschreven:

$$\{\tilde{C} + \tilde{C}A(t-t_0) + \tilde{C}A^2(t-t_0)^2/2! + \dots\} \underline{x}(t_0) = \underline{0} \quad (3.5)$$

Er kan nu gebruik gemaakt worden van het Caley-Hamilton theorema om de hogere machten  $A^n$ ,  $A^{n+1}$ , ... uit te drukken in lineaire combinaties van de lagere machten  $A^0$ ,  $A^1$ , ...,  $A^{n-1}$ , zodat de betrekking (3.5) geschreven kan worden als:

$$\{\rho_0 \tilde{C} + \rho_1 \tilde{C}A + \rho_2 \tilde{C}A^2 + \dots + \rho_{n-1} \tilde{C}A^{n-1}\} \underline{x}(t_0) = \underline{0} \quad (3.6)$$

waarin  $\rho_0, \dots, \rho_{n-1}$  bepaalde constanten zijn.

De reconstrueerbaarheidsmatrix  $Q$  wordt nu als volgt gedefinieerd:

$$Q = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}A \\ \tilde{C}A^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

De dimensie van de matrix  $Q$  is  $(n1*n)$ . Merk op dat wanneer  $C_2$  gelijk is aan de nulmatrix de reconstrueerbaarheidsmatrix  $Q$  overgaat in de oude vorm (zie [1.]). Stel nu dat de rang van de matrix  $Q$  lager is dan  $n$ , dan bestaat er dus een vector  $\underline{x}(t_0) \neq \underline{0}$  zodanig dat:

$$\tilde{C}\underline{x}(t_0) = \underline{0}, \tilde{C}A\underline{x}(t_0) = \underline{0}, \dots, \tilde{C}A^{n-1}\underline{x}(t_0) = \underline{0} \quad (3.8)$$

waardoor het mogelijk is aan betrekking (3.6) te voldoen zonder dat  $\underline{x}(t_0) = \underline{0}$ . Hiermee is bewezen dat de rang van de reconstrueerbaarheidsmatrix  $Q$  noodzakelijkerwijs gelijk aan  $n$  moet zijn voor het reconstrueerbaar zijn van het systeem (2.1) en (2.2). Neem nu aan dat de rang van  $Q$  gelijk is aan  $n$  en veronderstel dat:

$$\underline{y}(t) = \tilde{C}e^{A(t-t_0)}\underline{x}(t_0) ; t_0 \leq t \leq t_e \quad (3.9)$$

Na substitutie van  $t=t_0$  en herhaaldelijke differentiatie van  $\underline{y}(t)$

$$\begin{aligned} \text{volgt: } \underline{y}(t_0) &= \tilde{C}\underline{x}(t_0) = \underline{0}; \\ \dot{\underline{y}}(t_0) &= \tilde{C}A\underline{x}(t_0) = \underline{0}; \\ &\vdots \\ \underline{y}^{(n-1)}(t_0) &= \tilde{C}A^{n-1}\underline{x}(t_0) = \underline{0} . \end{aligned}$$

Met behulp van (3.7) kan dit stelsel als volgt geschreven worden:

$$Q\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

Met matrix  $Q$  van rang  $n$  volgt uit (3.10) dat  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ . Hiermee is bewezen dat de voorwaarde dat de reconstrueerbaarheidsmatrix  $Q$  van rang  $n$  moet zijn tevens een voldoende voorwaarde is voor het reconstrueerbaar zijn van systeem (2.1) en (2.2).

#### 4. MODEL WAARNEMER

##### 4.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt allereerst het model voor een volledige orde waarnemer opgesteld (paragraaf 4.2). Deze waarnemer wordt verbonden met het systeem zoals dat beschreven wordt in hoofdstuk 2. Met behulp van deze waarnemer kan uit de uitgang  $y(t)$  van het systeem de toestand  $\underline{x}(t)$  van het systeem gereconstrueerd worden. Voorwaarde hiervoor is dat het systeem voldoet aan de reconstrueerbaarheidsvoorwaarden zoals deze in hoofdstuk 3 beschreven zijn. De waarnemer levert een schatting  $\hat{\underline{x}}(t)$  van de toestand  $\underline{x}(t)$ . De schatting wordt beïnvloed door de waarde van de in het model van de waarnemer aanwezige versterkingsmatrix  $K(t)$ . De waarde van  $K(t)$  is niet vastgelegd. De schatting  $\hat{\underline{x}}(t)$  van de toestand  $\underline{x}(t)$  kan geoptimaliseerd worden door  $K(t)$  zo te kiezen dat rekening gehouden wordt met de in het systeem aanwezige onzekerheden, voorgesteld door de vectoren  $\underline{w}(t)$  en  $\underline{v}(t)$ . De vectoren  $\underline{w}(t)$  en  $\underline{v}(t)$  stellen een witte ruis voor met intensiteitsmatrices  $V_w(t)$  en  $V_v(t)$ . Onder een optimale schatting wordt hier een minimum variantie schatting verstaan. Het probleem is nu het vinden van de optimale waarde  $K^o(t)$  van de versterkingsmatrix  $K(t)$  zodanig dat de daarmee verkregen schatting  $\hat{\underline{x}}(t)$  een minimum variantie schatting is. Dit probleem vormt het onderwerp in paragraaf 4.3.

#### 4.2 Model van een volledige orde waarnemer

Beschouw het systeem beschreven door de vergelijkingen:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t) \quad ; \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (4.1)$$

$$\underline{y}(t) = C_1(t)\underline{x}(t) + C_2(t)\dot{\underline{x}}(t) \quad (4.2)$$

De vector  $\underline{y}(t)$  is een lineaire combinatie van de toestand  $\underline{x}(t)$  en de afgeleide van de toestand  $\dot{\underline{x}}(t)$  en representeert de meetresultaten op tijdstip  $t$ . Uit dit signaal wordt de toestand van het systeem gereconstrueerd met behulp van een waarnemer. Er zal nu het model van een volledige orde waarnemer bepaald worden. De waarnemer gegeven door:

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = F(t)\hat{\underline{x}}(t) + K(t)\underline{y}(t) + H(t)\underline{u}(t) \quad (4.3)$$

is een volledige orde waarnemer als  $\underline{x}(t_0) = \hat{\underline{x}}(t_0)$  impliceert dat  $\underline{x}(t) = \hat{\underline{x}}(t)$  voor alle  $\underline{u}(t)$ ,  $t > t_0$ .

(4.3)-(4.1) levert:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\hat{\underline{x}}}(t) &= A(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t) - F(t)\hat{\underline{x}}(t) + \\ &\quad - K(t)\underline{y}(t) - H(t)\underline{u}(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Substitutie van (4.1) in (4.2) levert:

$$\underline{y}(t) = \tilde{C}(t)\underline{x}(t) + C_2(t)B(t)\underline{u}(t) \quad (4.5)$$

$$\text{met:} \quad \tilde{C}(t) = C_1(t) + C_2(t)A(t) \quad (4.6)$$

Substitutie van (4.5) in (4.4) levert:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\hat{\underline{x}}}(t) &= A(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t) - F(t)\hat{\underline{x}}(t) + \\ &- K(t) \cdot [\tilde{C}(t)\underline{x}(t) + C_2(t)B(t)\underline{u}(t)] - H(t)\underline{u}(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

ofwel:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\hat{\underline{x}}}(t) &= [A(t) - K(t)\tilde{C}(t)] \cdot \underline{x}(t) - F(t)\hat{\underline{x}}(t) + \\ &+ [B(t) - K(t)C_2(t)B(t) - H(t)] \cdot \underline{u}(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

*volledige orde*

Om aan de voorwaarden voor een ~~optimale~~ waarnemer te voldoen moet gelden:

$$F(t) = A(t) - K(t)\tilde{C}(t) \quad (4.9)$$

$$H(t) = B(t) - K(t)C_2(t)B(t) \quad (4.10)$$

waarin  $K(t)$  een willekeurige matrix is. De waarnemer komt er nu als volgt uit te zien:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\underline{x}}}(t) &= [A(t) - K(t)\tilde{C}(t)] \cdot \hat{\underline{x}}(t) + K(t)\underline{y}(t) + \\ &+ [B(t) - K(t)C_2(t)B(t)] \cdot \underline{u}(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

ofwel:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\underline{x}}}(t) &= A(t)\hat{\underline{x}}(t) + B(t)\underline{u}(t) + \\ &+ K(t) \cdot [\underline{y}(t) - \tilde{C}(t)\hat{\underline{x}}(t) - C_2(t)B(t)\underline{u}(t)] \end{aligned} \quad (4.12)$$

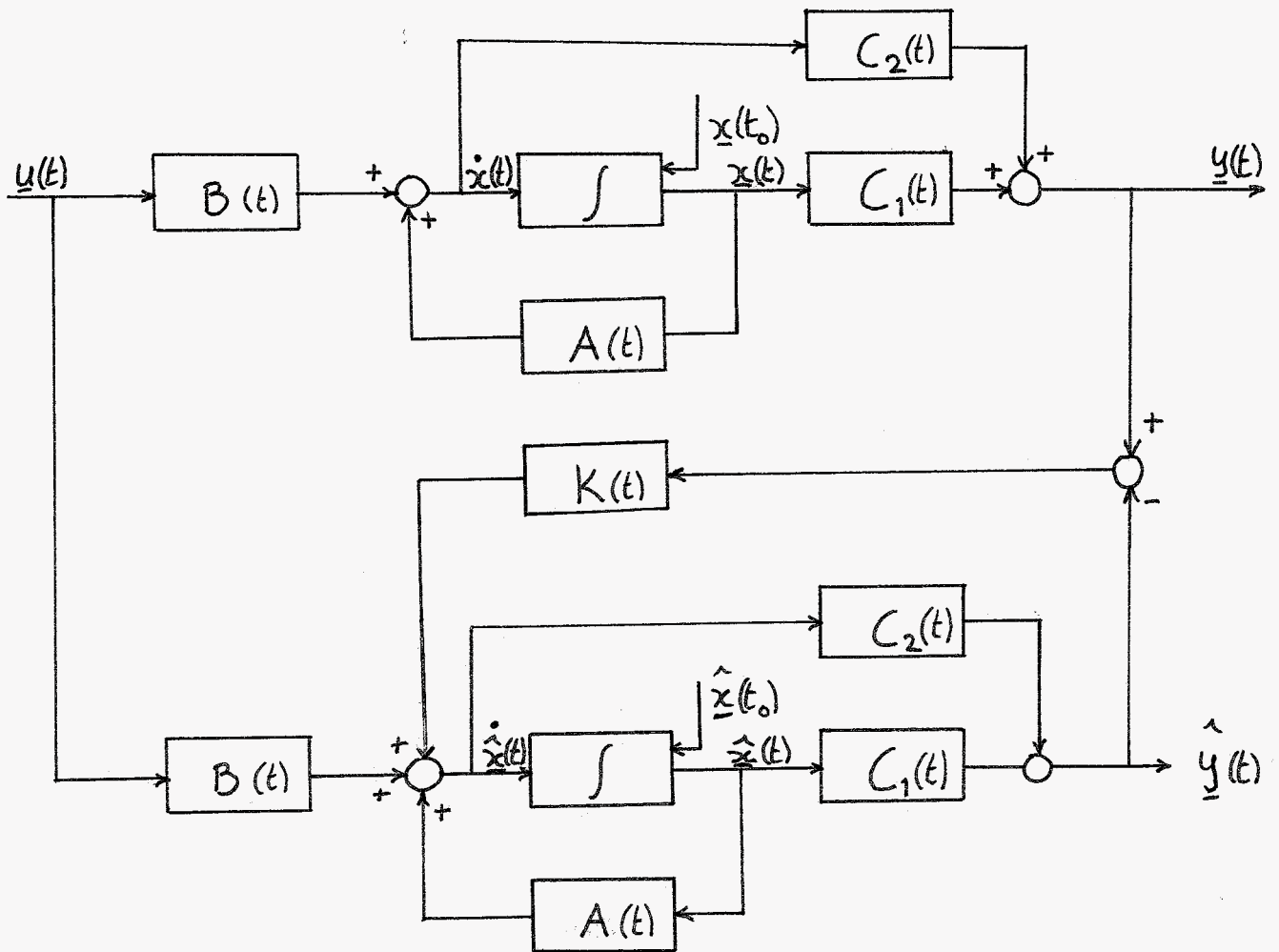


fig 4.1 model systeem met volledige orde waarnemer

### 4.3 De optimale waarnemer

De structuur van de optimale waarnemer wordt gelijk gekozen aan die van de volledige orde waarnemer beschreven door (4.12). De stabiliteit van de waarnemer wordt bepaald door de systeemmatrix  $[A(t) - K(t)\tilde{C}(t)]$ . De matrix  $K(t)$ , de versterkingsmatrix van de waarnemer, is mede bepalend voor de stabiliteit van de waarnemer. Het ontwerpen van een waarnemer komt dus neer op het doen van een geschikte keuze voor de versterkingsmatrix  $K(t)$ . Als optimale waarde van de versterkingsmatrix  $K(t)$  wordt die waarde  $K^O(t)$  gekozen, zodanig dat de daarmee verkregen schatting  $\hat{\underline{x}}(t)$  een minimum variantie schatting is. De waarnemer wordt verbonden met het systeem dat door de volgende vergelijkingen wordt beschreven:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t) + \underline{w}(t) \quad (4.13)$$

$$\underline{y}(t) = C_1(t)\underline{x}(t) + C_2(t)\dot{\underline{x}}(t) + \underline{v}(t) \quad (4.14)$$

waarin  $\underline{w}(t)$  voor de systeemruis staat en  $\underline{v}(t)$  voor de observatie-ruis. Beide worden verondersteld wit te zijn met gemiddelde nul. De minimum variantie schatting wordt gedefinieerd als die schatting  $\hat{\underline{x}}(t)$  van de toestand  $\underline{x}(t)$  waarvoor geldt:

$$J = \text{tr}\{E\{\underline{e}(t)\underline{e}^T(t)\}\} : \text{minimaal} \quad (4.15)$$

waarin  $\underline{e}(t)$  de schattingsfout is:

$$\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t) \quad (4.16)$$



Beschouwd wordt een zuivere schatting, zodat geldt:

$$E\{\underline{e}(t)\} = \underline{\mu}_e(t) = \underline{0} \quad (4.17)$$

Differentiëren van (4.16) levert:

$$\dot{\underline{e}}(t) = \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\hat{\underline{x}}}(t) \quad (4.18)$$

(4.13) - (4.12) in (4.18) levert

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\hat{\underline{x}}}(t) &= A(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t) + \underline{w}(t) - A(t)\hat{\underline{x}}(t) + \\ &\quad - K(t) \cdot [\underline{y}(t) - \tilde{C}(t)\underline{x}(t) - C_2(t)B(t)\underline{u}(t)] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Substitutie van (4.14) in (4.19) levert met gebruikmaking van

(4.18):

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}}(t) &= A(t)\underline{e}(t) + B(t)\underline{u}(t) + \underline{w}(t) - B(t)\underline{u}(t) + \\ &\quad - K(t) \cdot [\tilde{C}(t)\underline{e}(t) + C_2(t)B(t)\underline{u}(t) \\ &\quad - C_2(t)B(t)\underline{u}(t) + \underline{v}(t) + C_2(t)\underline{w}(t)] \end{aligned} \quad (4.20)$$

ofwel:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}}(t) &= [A(t) - K(t)\tilde{C}(t)] \cdot \underline{e}(t) + \underline{w}(t) + \\ &\quad - K(t) \cdot [\underline{v}(t) + C_2(t)\underline{w}(t)] \end{aligned} \quad (4.21)$$

De bij differentiaalvergelijking (4.21) horende randvoorwaarde luidt:

$$\underline{e}(t_0) = \underline{e}_0 = \underline{x}(t_0) - \hat{\underline{x}}(t_0) \quad (4.22)$$

De variantiematrix van  $\underline{e}(t)$ ,  $Q(t)$ , wordt nu geïntroduceerd:

$$Q(t) = E\{(\underline{e}(t) - \underline{\mu}_e(t))(\underline{e}(t) - \underline{\mu}_e(t))^T\} \quad (4.23)$$

met:

$$\underline{\mu}_e(t) = E\{\underline{e}(t)\} \quad (4.24)$$

Vergelijking (4.23) wordt herschreven:

$$\begin{aligned} Q(t) &= E\{\underline{e}(t)\underline{e}^T(t)\} - E\{\underline{\mu}_e(t)\underline{e}^T(t)\} + \\ &\quad - E\{\underline{e}(t)\underline{\mu}_e^T(t)\} + E\{\underline{\mu}_e(t)\underline{\mu}_e^T(t)\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$Q(t) = E\{\underline{e}(t)\underline{e}(t)\} - \underline{\mu}_e(t)\underline{\mu}_e^T(t) \quad (4.26)$$

Met behulp van (4.26) kan het criterium (4.14) nu als volgt geschreven worden:

$$\text{tr}[E\{\underline{e}(t)\underline{e}^T(t)\}] = \text{tr}[\underline{\mu}_e(t)\underline{\mu}_e^T(t) + Q(t)] = \underline{\mu}_e^T(t)\underline{\mu}_e(t) + \text{tr}[Q(t)] \quad (4.27)$$

Minimalisatie van (4.27) kan nu gebeuren door  $\underline{\mu}_e^T(t)\underline{\mu}_e(t)$  en  $\text{tr}[Q(t)]$  afzonderlijk van elkaar te minimaliseren. Dit is mogelijk omdat  $Q(t)$  geen functie van  $\underline{\mu}_e(t)$  is.

#### 4.3.1 Minimalisatie van $\mu_e^T(t)\mu_e(t)$

Neem de verwachtingswaarde van (4.21) en maak gebruik van het feit dat  $\underline{w}(t)$  en  $\underline{v}(t)$  gemiddeld nul zijn:

$$\dot{\underline{\mu}}_e(t) = [A(t) - K(t)\tilde{C}(t)] \cdot \underline{\mu}_e(t) \quad (4.28)$$

Minimalisatie van  $\underline{\mu}_e^T(t)\underline{\mu}_e(t)$  wordt bereikt door  $\underline{\mu}_e(t_0) = \underline{0}$  te kiezen want dan is  $\underline{\mu}_e(t) = \underline{0}$  en dus ook  $\underline{\mu}_e^T(t)\underline{\mu}_e(t) = 0$  voor  $t \geq t_0$ .

#### 4.3.2 Minimalisatie van $\text{tr}[Q(t)]$

Eerst wordt de differentiaalvergelijking voor  $Q(t)$  afgeleid. Er wordt uitgegaan van vergelijking (4.21) die als volgt wordt herschreven:

$$\dot{\underline{e}}(t) = \tilde{A}(t)\underline{e}(t) + \tilde{I}(t)\tilde{W}(t) \quad (4.29)$$

met:

$$\tilde{A}(t) = A(t) - K(t)\tilde{C}(t) \quad (4.30)$$

$$\tilde{I}(t) = [I - K(t)C_2(t) \ ; \ -K(t)] \quad (4.31)$$

$$\tilde{W}(t) = \begin{bmatrix} \underline{w}(t) \\ \underline{v}(t) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

De vector  $\tilde{\underline{w}}(t)$  is een witte ruis met intensiteitsmatrix:

$$\tilde{\underline{V}}_w(t) = \begin{bmatrix} V_w(t) & 0 \\ 0 & V_v(t) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Voor de oplossing  $\underline{e}(t)$  van (4.29) geldt:

$$\underline{e}(t) = \varphi(t, t_0) \underline{e}(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(t, \tau) \tilde{\underline{I}}(\tau) \tilde{\underline{w}}(\tau) d\tau \quad (4.34)$$

waarin  $\varphi(t, t_0)$  de overgangsmatrix van het systeem (4.29) is.

De correlatiematrix  $R_e(t, t)$  is gelijk aan:

$$R_e(t, t) = E\{\underline{e}(t) \underline{e}^T(t)\} \quad (4.35)$$

$\tilde{\underline{w}}(t)$  is een witte ruis zodat geldt:

$$E\{\underline{w}(t_1) \underline{w}^T(t_2)\} = \tilde{\underline{V}}_w(t_2) \delta(t_1 - t_2) \quad (4.36)$$

Substitutie van (4.34) in (4.35) levert met gebruikmaking van (4.36):

$$R_e(t, t) = \varphi(t, t_0) R_e(t_0, t_0) \varphi^T(t, t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(t, \tau) \tilde{\underline{I}}(\tau) \tilde{\underline{V}}_w(\tau) \tilde{\underline{I}}^T(\tau) \varphi^T(t, \tau) d\tau \quad (4.37)$$

De differentiaalvergelijking voor  $R_e(t, t)$  wordt verkregen na differentiatie naar  $t$  van (4.37):

$$\begin{aligned}
\dot{R}_e(t,t) &= \dot{\psi}(t,t_0)R_e(t_0,t_0)\psi^T(t,t_0) + \varphi(t,t_0)R_e(t_0,t_0)\dot{\psi}^T(t,t_0) \\
&+ \int_{t_0}^t \dot{\varphi}(t,\tau)\tilde{I}(\tau)\tilde{V}_w(\tau)\tilde{I}^T(\tau)\varphi^T(t,\tau)d\tau + \\
&+ \int_{t_0}^t \varphi(t,\tau)\tilde{I}(\tau)\tilde{V}_w(\tau)\tilde{I}^T(\tau)\dot{\varphi}^T(t,\tau)d\tau + \\
&+ \varphi(t,t)\tilde{I}(t)\tilde{V}_w(t)\tilde{I}^T(t)\varphi^T(t,t) \quad (4.38)
\end{aligned}$$

$$\dot{R}_e(t,t) = \tilde{A}(t)R_e(t,t) + R_e(t,t)\tilde{A}^T(t) + \tilde{I}(t)\tilde{V}_w(t)\tilde{I}^T(t) \quad (4.39)$$

De bij differentiaalvergelijking (4.39) horende randvoorwaarde volgt door in (4.37)  $t=t_0$  te substitueren:

$$R_e(t_0,t_0) = E\{\underline{e}_0\underline{e}_0^T\} \quad (4.40)$$

Voor  $Q(t)$ , de variantiematrix van  $\underline{e}(t)$ , geldt:

$$Q(t) = R_e(t,t) - \underline{\mu}_e(t)\underline{\mu}_e^T(t) \quad (4.41)$$

Differentiëren van (4.41) naar  $t$  levert:

$$\dot{Q}(t) = \dot{R}_e(t,t) - \dot{\underline{\mu}}_e(t)\underline{\mu}_e^T(t) - \underline{\mu}_e(t)\dot{\underline{\mu}}_e^T(t) \quad (4.42)$$

met:

$$\dot{\underline{\mu}}_e(t) = \dot{\varphi}(t,t_0)\underline{\mu}_{e_0} = \tilde{A}(t)\underline{\mu}_e(t) \quad (4.43)$$

Door substitutie van (4.41), (4.42) en (4.43) in (4.39) volgt de differentiaalvergelijking voor de variantiematrix  $Q(t)$ :

$$\dot{Q}(t) = \tilde{A}(t)Q(t) + Q(t)\tilde{A}^T(t) + \tilde{I}(t)\tilde{V}_w(t)\tilde{I}^T(t) \quad (4.44)$$

met randvoorwaarde:

$$Q(t_0) = Q_0 \quad (4.45)$$

De differentiaalvergelijking (4.44) wordt wat verder uitgeschreven door substitutie van (4.30), (4.31) en (4.32). Dit levert:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & [A(t) - K(t)\tilde{C}(t)]Q(t) + Q(t)[A(t) - K(t)\tilde{C}(t)]^T + \\ & + [I - K(t)C_2(t) \quad -K(t)] \begin{bmatrix} V_w(t) & 0 \\ 0 & V_v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - C_2^T(t)K^T(t) \\ -K(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & [A(t) - K(t)\tilde{C}(t)]Q(t) + Q(t)[A(t) - K(t)\tilde{C}(t)]^T + \\ & + V_w(t) + K(t)V_v(t)K^T(t) - K(t)C_2(t)V_w(t) + \\ & - V_w(t)C_2^T(t)K^T(t) + K(t)C_2(t)V_w(t)C_2^T(t)K^T(t) \end{aligned} \quad (4.47)$$

De beginvoorwaarde blijft onveranderd:

$$Q(t_0) = Q_0 \quad (4.45)$$

De vergelijkingen (4.47) en (4.45) beschrijven het gedrag van de variantiematrix  $Q(t)$  voor een willekeurige waarde van  $K(t)$ .

Het probleem is nu het vinden van het optimale verloop van de versterkingsmatrix  $K(t)$  zodanig dat voor elk tijdstip  $t$  het criterium  $J = \text{tr}[Q(t)]$  een minimale waarde aanneemt. Het optimale verloop van de variantiematrix,  $Q^O(t)$ , wordt gevonden door in de differentiaalvergelijking (4.47) de optimale waarde van de versterkingsmatrix  $K^O(t)$  te substitueren en vervolgens vanaf de gegeven beginvoorwaarde (4.45) te integreren naar het eindtijdstip  $t_e$ , resulterend in de waarde  $Q^O(t_e)$ . Het vaststellen van de optimale waarde van  $K(t)$  vormt een meerstapsbeslissingsprobleem. Bij elk opeenvolgend tijdstip  $t$  moet een keuze voor  $K(t)$  gedaan worden. Bij voortdurend de juiste keuze  $K(t) = K^O(t)$  wordt de optimale trajectorie  $Q^O(t)$  doorlopen. Bij het vaststellen van de juiste keuze wordt gebruik gemaakt van het optimaliteitsbeginsel:

Een optimale trajectorie is optimaal over elk deelinterval van de trajectorie.

Het verband tussen  $Q^O(t)$  en  $Q^O(t+\Delta t)$  met  $\Delta t$  voldoende klein luidt:

$$Q^O(t+\Delta t) = Q^O(t) + \dot{Q}^O(t)\Delta t \quad (4.48)$$

Voor  $Q^O(t+\Delta t)$  geldt:

$$\text{tr}[Q^O(t+\Delta t)] = \text{tr}[Q^O(t)] + \text{tr}[\dot{Q}^O(t)]\Delta t \quad (4.49)$$

Volgens het optimaliteitsbeginsel moet de resulterende waarde  $\text{tr}[Q^O(t+\Delta t)]$  weer optimaal zijn ten opzichte van elke andere waarde  $\text{tr}[Q(t+\Delta t)]$ . Er wordt nu een geschikte uitdrukking voor

$\dot{Q}(t)$  gezocht die in (4.49) gesubstitueerd kan worden. Uitgegaan wordt van differentiaalvergelijking (4.47) die herschreven wordt:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & A(t)Q(t) + Q(t)A^T(t) + V_w(t) + K(t)\tilde{V}(t)K^T(t) + \\ & - K(t)[\tilde{C}(t)Q(t) + C_2(t)V_w(t)] - [\tilde{C}(t)Q(t) + C_2(t)V_w(t)]^T K^T(t) \end{aligned} \quad (4.50)$$

met:

$$\tilde{V}(t) = C_2(t)V_w(t)C_2^T(t) + V_v(t) \quad (4.51)$$

Er wordt geprobeerd om (4.50) in de volgende vorm te gieten:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & A(t)Q(t) + Q(t)A^T(t) + V_w(t) + F(t) + \\ & + [K(t) - Z(t)]\tilde{V}(t)[K(t) - Z(t)]^T \end{aligned} \quad (4.52)$$

Uitschrijven van (4.52) levert:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & A(t)Q(t) + Q(t)A^T(t) + V_w(t) + F(t) + \\ & + K(t)\tilde{V}(t)K^T(t) + Z(t)\tilde{V}(t)Z^T(t) + \\ & - K(t)\tilde{V}(t)Z^T(t) - Z(t)\tilde{V}(t)K^T(t) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Vergelijking (4.53) is equivalent met (4.50) als geldt:

$$Z(t) = Q(t)\tilde{C}^T(t)\tilde{V}^{-1}(t) + V_w(t)C_2^T(t)\tilde{V}^{-1}(t) \quad (4.54)$$

$$F(t) = -Z(t)\tilde{V}(t)Z^T(t) \quad (4.55)$$



De uitdrukking voor  $\dot{Q}(t)$  (4.52) is nu geschikt voor substitutie in (4.49). Dit levert met gebruikmaking van (4.55):

$$\begin{aligned} \text{tr}[Q(t+\Delta t)] &= \text{tr}[Q^0(t) + \\ &+ \Delta t \cdot \text{tr}[A(t)Q(t) + Q(t)A^T(t) + V_w(t) - Z(t)V(t)Z^T(t)] + \\ &+ \Delta t \cdot \text{tr}[[K(t) - Z(t)]V(t)[K(t) - Z(t)]^T] \end{aligned} \quad (4.56)$$

Uit (4.56) blijkt dat de keuze van versterkingsmatrix  $K(t)$  alleen invloed heeft op de bijdrage van de laatste term. Deze term is een kwadratische uitdrukking van de vorm  $X^T R X$  waarvoor voor willekeurige  $X$  geldt:

$$X^T R X \geq 0 \quad \text{als } R > 0 \quad (4.57)$$

zodat de som van de eigenwaarden altijd groter of gelijk aan nul is:

$$\text{tr}[X^T R X] \geq 0 \quad (4.58)$$

De optimale waarde van  $K(t)$  is de waarde  $K^0(t)$  waarvoor geldt dat de bijdrage van de laatste term minimaal, dus nul, is.

Hieruit volgt voor  $K^0(t)$ :

$$K^0(t) = Z(t) = Q^0(t) \tilde{C}^T(t) \tilde{V}^{-1}(t) + V_w(t) C_2^T(t) \tilde{V}^{-1}(t) \quad (4.59)$$

De waarde van de optimale versterkingsmatrix  $K^0(t)$  is nu gevonden. Substitutie van de optimale versterkingsmatrix (4.59) in de differentiaalvergelijking (4.52) levert met gebruikmaking

van (4.54) en (4.55) de matrix riccativergelijking voor  $Q^O(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{Q}^O(t) &= A(t)Q^O(t) + Q^O(t)A^T(t) + V_w(t) + \\ &- [Q^O(t)\tilde{C}^T(t)\tilde{V}^{-1}(t) + V_w(t)C_2^T(t)\tilde{V}^{-1}] \cdot \tilde{V}(t) \cdot \\ &[Q^O(t)\tilde{C}^T(t)\tilde{V}^{-1}(t) + V_w(t)C_2^T(t)\tilde{V}^{-1}(t)]^T \end{aligned} \quad (4.60)$$

met:

$$Q(t_0) = Q_0 \quad (4.45)$$

## 5. Toestandsreconstructie van een voorbeeld-systeem

### 5.1 Inleiding

Het optimale filter zoals dat is beschreven in hoofdstuk 4 zal nu gebruikt worden voor de toestandsreconstructie van een eenvoudig voorbeeldsysteem. Voor het simuleren van het gedrag van het filter wordt het programma REGNONLIN gebruikt dat op een APOLLO DM 3300 draait. Meer informatie met betrekking tot REGNONLIN wordt in paragraaf 5.2 gegeven. Het voorbeeld-systeem waarvan de toestand gereconstrueerd moet worden is met opzet heel eenvoudig gehouden om een goed overzicht te kunnen behouden. Het systeem wordt beschreven in paragraaf 5.3. De simulatie van het systeem met filter komt aan de orde in paragraaf 5.4. Er worden verschillende instellingen van het filter bekeken en het optimale filter met versnellingsmeting wordt vergeleken met het optimale filter met verplaatsingsmeting. Uit de resultaten kunnen conclusies worden verbonden met betrekking tot de toepasbaarheid van het optimale filter met versnellingsmeting. Evaluatie van de resultaten van de simulatie gebeurt in paragraaf 5.4.3.

## 5.2 REGNONLIN

Het simuleren van het optimale filter gebeurt met het programma REGNONLIN. Met de bestaande versie van het programma was het niet mogelijk om het nieuwe optimale filter uit hoofdstuk 4 te simuleren. Het was daarom noodzakelijk het programma wat uit te breiden zodanig dat ook het nieuwe optimale filter gesimuleerd kan worden. Een van de mogelijkheden die REGNONLIN biedt is het grafisch weergeven van de responsie van diverse grootheden van het systeem op een bepaald ingangssignaal. Doordat het in REGNONLIN mogelijk is meerdere responsies tegelijkertijd weer te geven is het dus heel gemakkelijk om verschillende filters met elkaar te vergelijken. Verdere informatie met betrekking tot het gebruik van de aangepaste versie van REGNONLIN wordt gegeven in appendix A.

## 5.3 Uitwerking voorbeeld

Als voorbeeld wordt een eenvoudig massaveersysteem genomen met 1 graad van vrijheid:

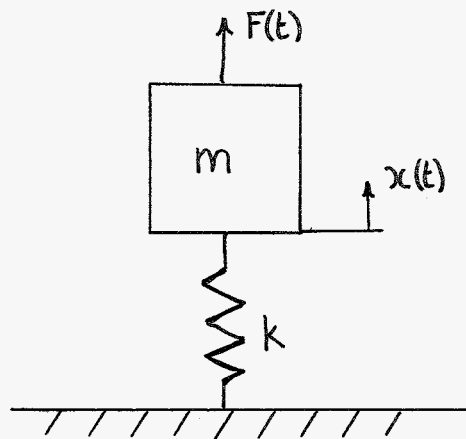


fig 5.1 massaveersysteem

De bewegingsvergelijking luidt:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (5.1)$$

Neem als toestandsvector  $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$  (5.2)

De toestandsvergelijking wordt:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + u(t)/m \quad (5.3)$$

Stel dat alleen de versnelling  $\underline{x}(t)$  wordt gemeten. In dat geval wordt de uitgangsvergelijking:

$$y(t) = [0 \ 0]\underline{x}(t) + [0 \ 1]\dot{\underline{x}}(t) \quad (5.4)$$

Voor dit systeem geldt dat  $n=2$ ,  $m=1$ ,  $l=1$ .

Het systeem moet wel aan de eis van reconstrueerbaarheid voldoen. Dit betekent dat de reconstrueerbaarheidsmatrix  $Q$  de rang  $n(=2)$  moet hebben:

$$Q = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}A \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

met  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix}$ ,  $C_1 = [0 \ 0]$ ,  $C_2 = [0 \ 1]$ ,  $\tilde{C} = C_1 + C_2A$

gaat (5.5) over in:

$$Q = \begin{bmatrix} -k/m & 0 \\ 0 & -k/m \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Uit (5.6) blijkt dat de reconstrueerbaarheidsmatrix  $Q$  inderdaad rang 2 heeft. Het meten van alleen de versnelling  $\underline{x}(t)$  is dus hier voldoende voor het reconstrueerbaar zijn van het systeem (5.3) en (5.4). Bij de simulatie is het interessant om een vergelijking te maken met het geval waarin alleen de verplaatsing gemeten wordt. De uitgangsvergelijking wordt dan:

$$y(t) = [1 \ 0]\underline{x}(t) + [0 \ 0]\dot{\underline{x}}(t) \quad (5.7)$$

De matrix  $Q$  is nu gelijk aan:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

De matrix  $Q$  is van de rang  $n$  zodat het systeem ook in dit geval reconstrueerbaar is.

## 5.4 Simulatie

### 5.4.1 Algemeen

Het optimale filter wordt verbonden met het massaveersysteem uit paragraaf 5.3. Het filter moet de vrije responsie van het systeem reconstrueren. Als nominale trajectorie wordt gekozen:

$$\underline{x}_n(t) = a_2 * t^2 + a_1 * t + a_0 \quad (5.9)$$

waarin  $a_2=a_1=a_0=1$  gesteld wordt. De beginwaarde wordt gelijk aan de nominale beginwaarde gekozen:

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_n(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

De beginvoorwaarde van de waarnemer echter wordt sterk afwijkend gekozen van de beginvoorwaarde van het systeem:

$$\underline{x}_w(t_0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Als beginwaarde voor de variantiematrix wordt gekozen:

$$Q(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Op tijdstip  $t=t_0$  blijkt dat de schattingsfout  $\underline{e}(t)$  een relatief grote waarde heeft. Het optimale filter zal trachten om de schattingsfout naar nul te laten naderen. Hoe goed dit gebeurt hangt af van de instelling van het filter. Er zullen verschillende stellingen van het filter bekeken worden die zodanig gekozen zijn dat het effect van de verschillende elementen van de matrices  $V_w$  en  $V_v$  zo goed mogelijk naar voren komt. Ook zal het filter met versnellingsmeting vergeleken worden met het filter met verplaatsingsmeting.

#### 5.4.2 Simulatieresultaten

De resultaten van de simulaties zijn te zien in fig 5.2 tot en met fig 5.8. Er is gekozen voor een massa van 1 kg en een veerstijfheid van 1 N/m. Het tijdsinterval dat bekeken wordt loopt van  $t=0$  tot  $t=10$  s. De meest optimale instelling in het geval van versnellingsmeting is vastgelegd in filter 3. In fig 5.2 tot en met fig 5.7 is de optimale instelling van filter 3 vergeleken met

een iets andere instelling die vastgelegd is in filter 4. Telkens is één element van een weegmatrix afwijkend gekozen zodat de invloed van het betreffende element goed zichtbaar is. De bovenste grafiek geeft telkens het verloop in de tijd weer van de geschatte toestand  $\hat{x}(t)$  terwijl de onderste grafiek het verloop in de tijd van de geschatte snelheid  $\hat{\dot{x}}(t)$  weergeeft. Tenslotte is in fig 5.8 de meest optimale instelling in het geval van versnelingsmeting vergeleken met de meest optimale instelling in het geval van verplaatsingsmeting.



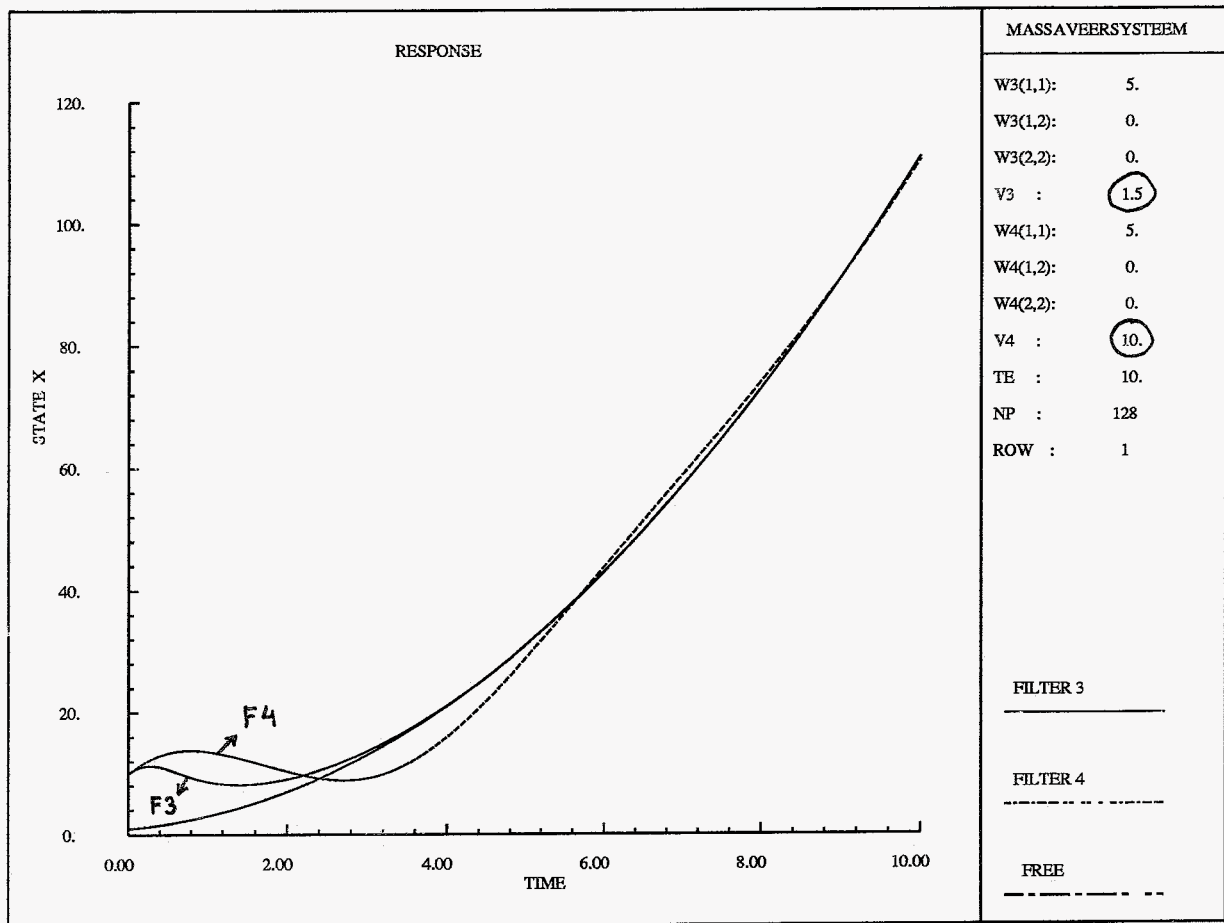


fig 5.2. a

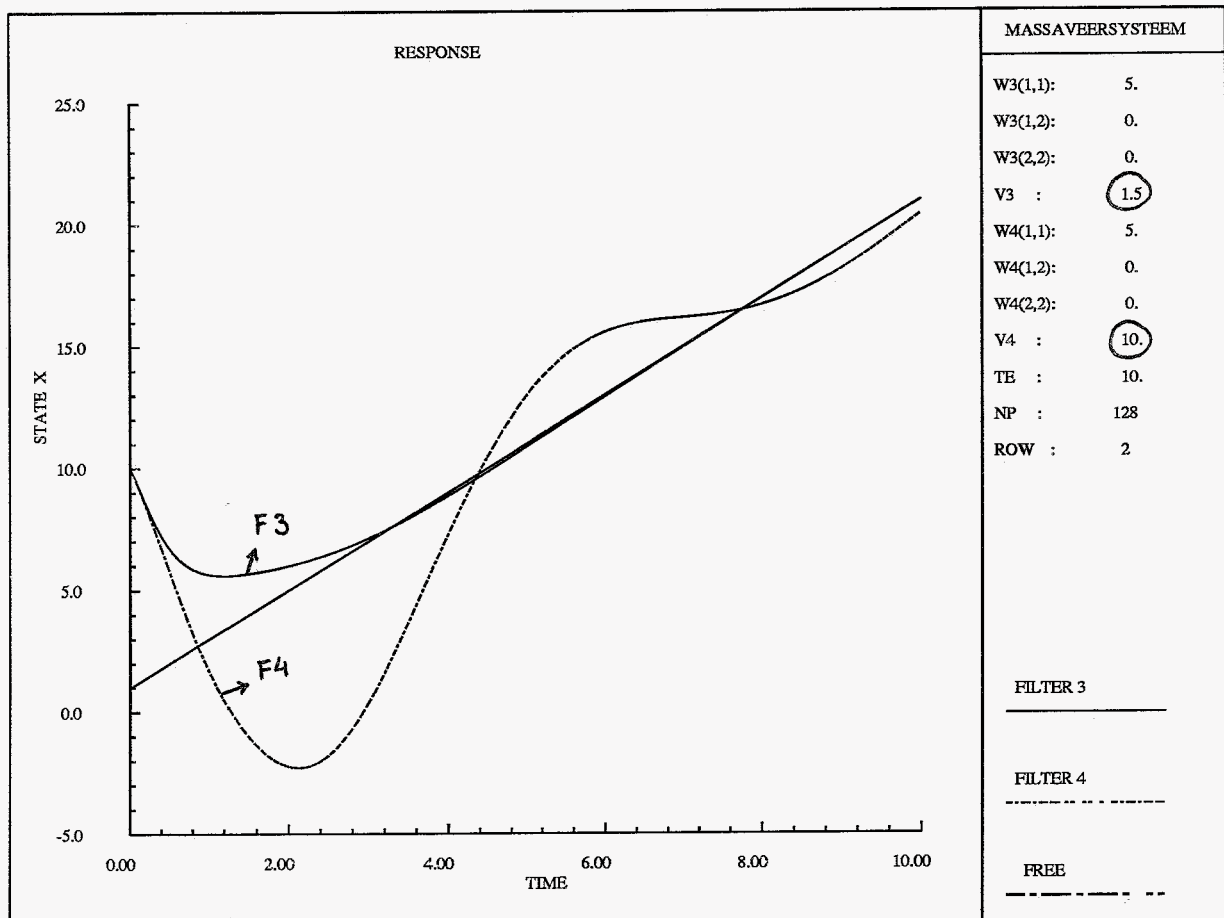


fig 5.2. b

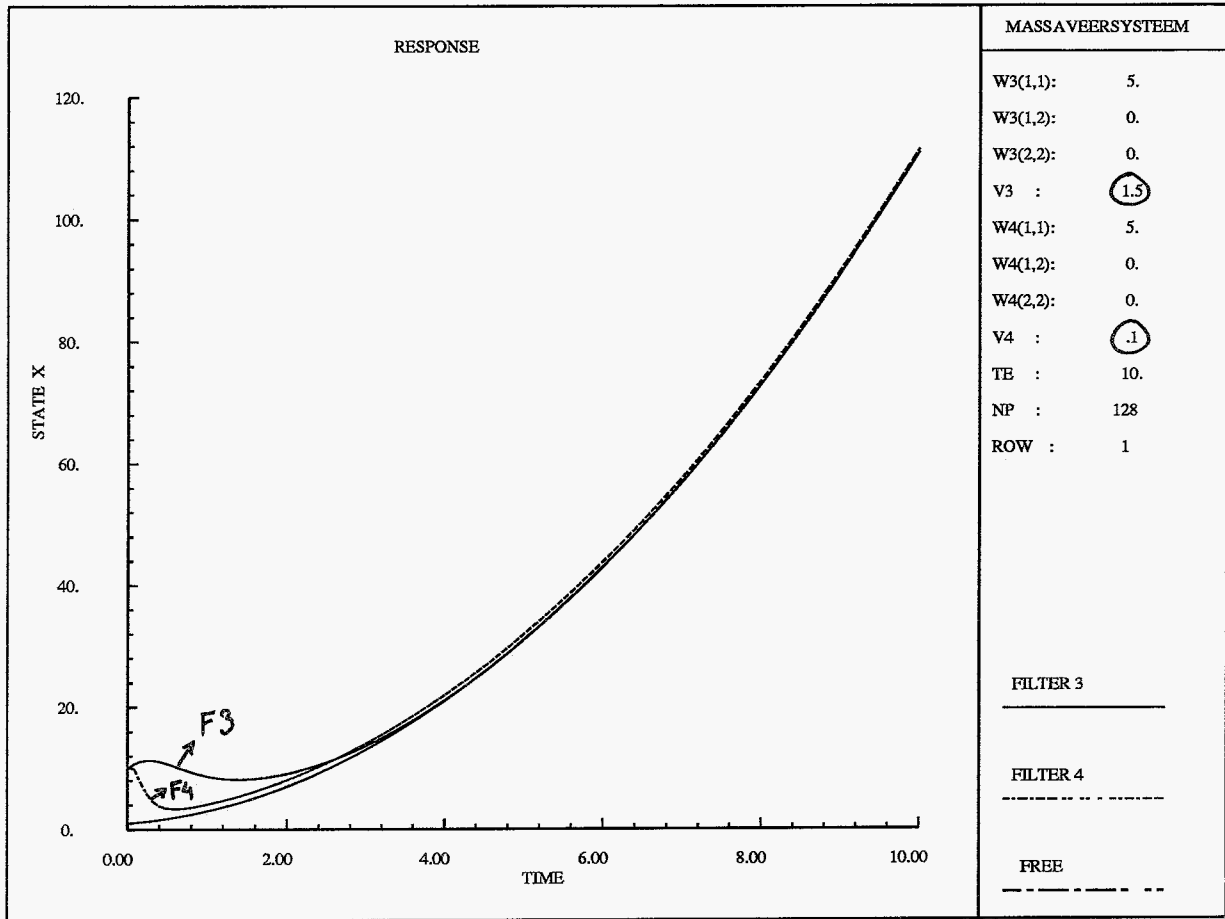


fig 5.3.a

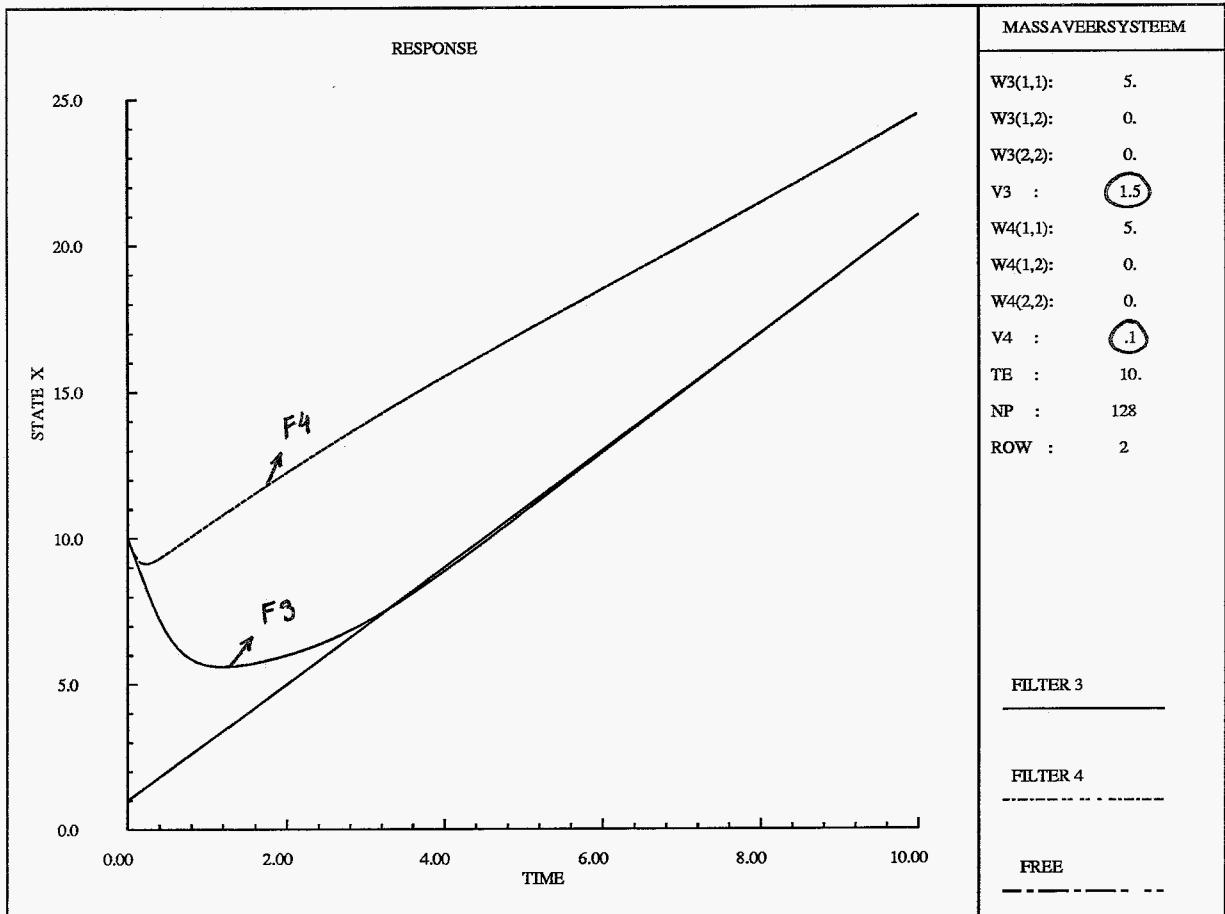


fig 5.3.b

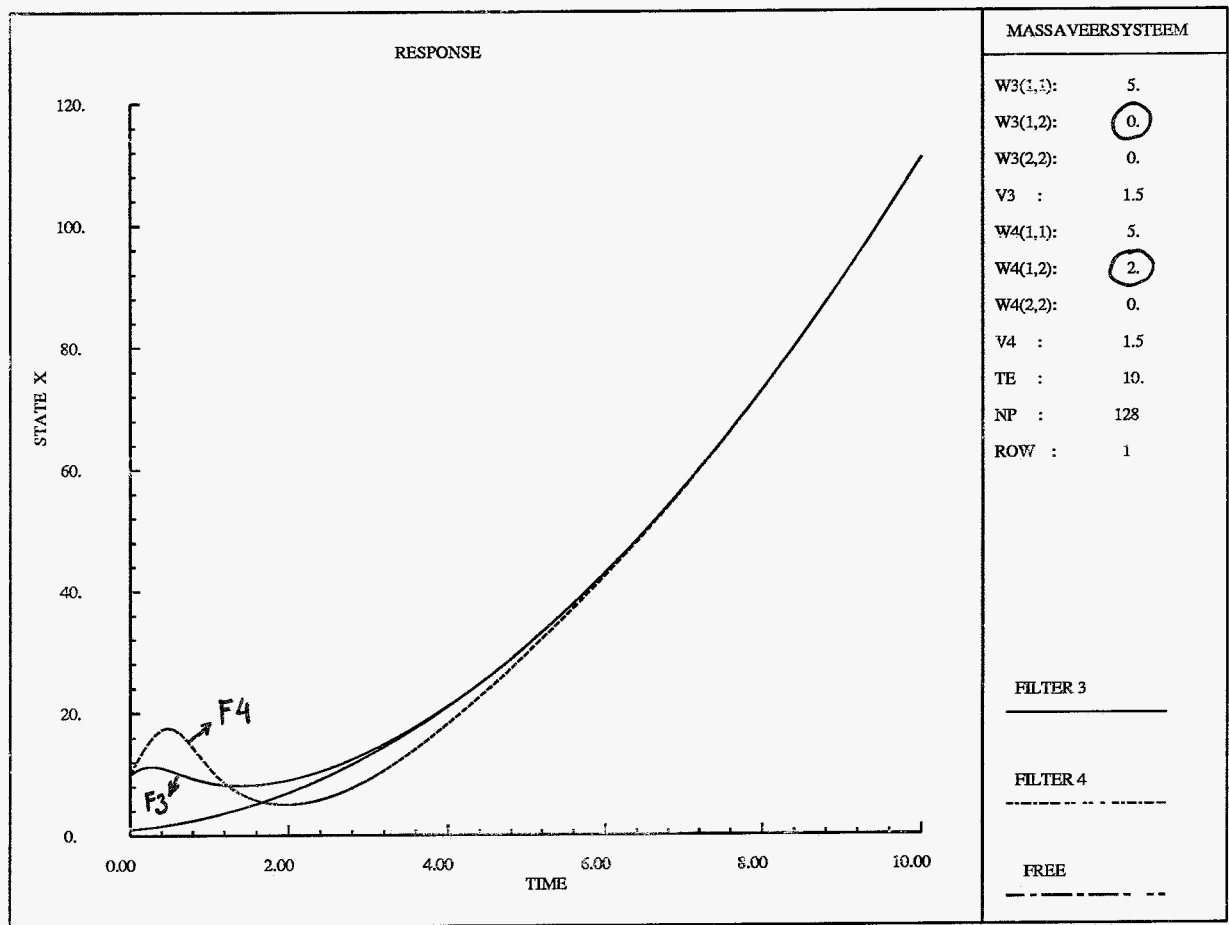


fig 5.4.a

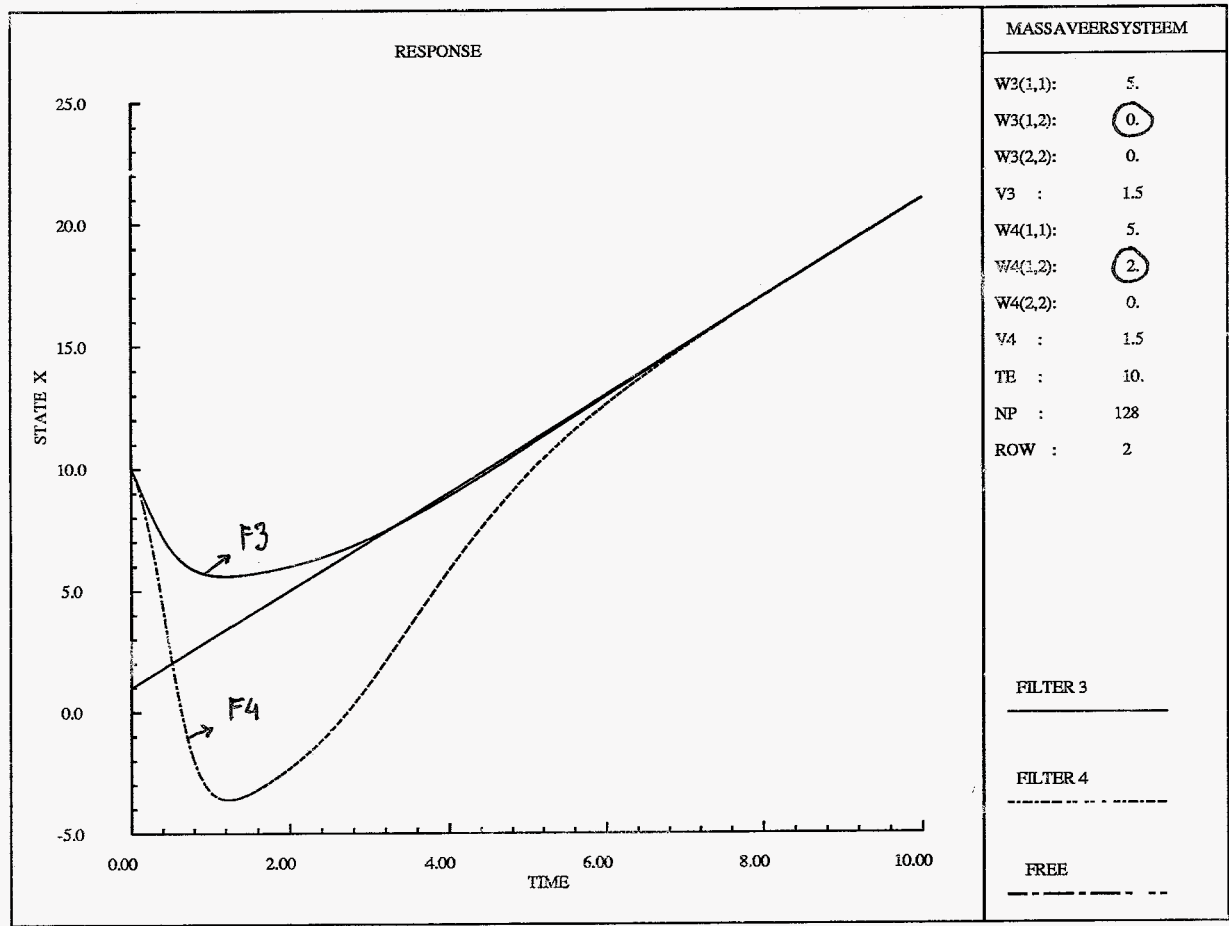


fig 5.4.b

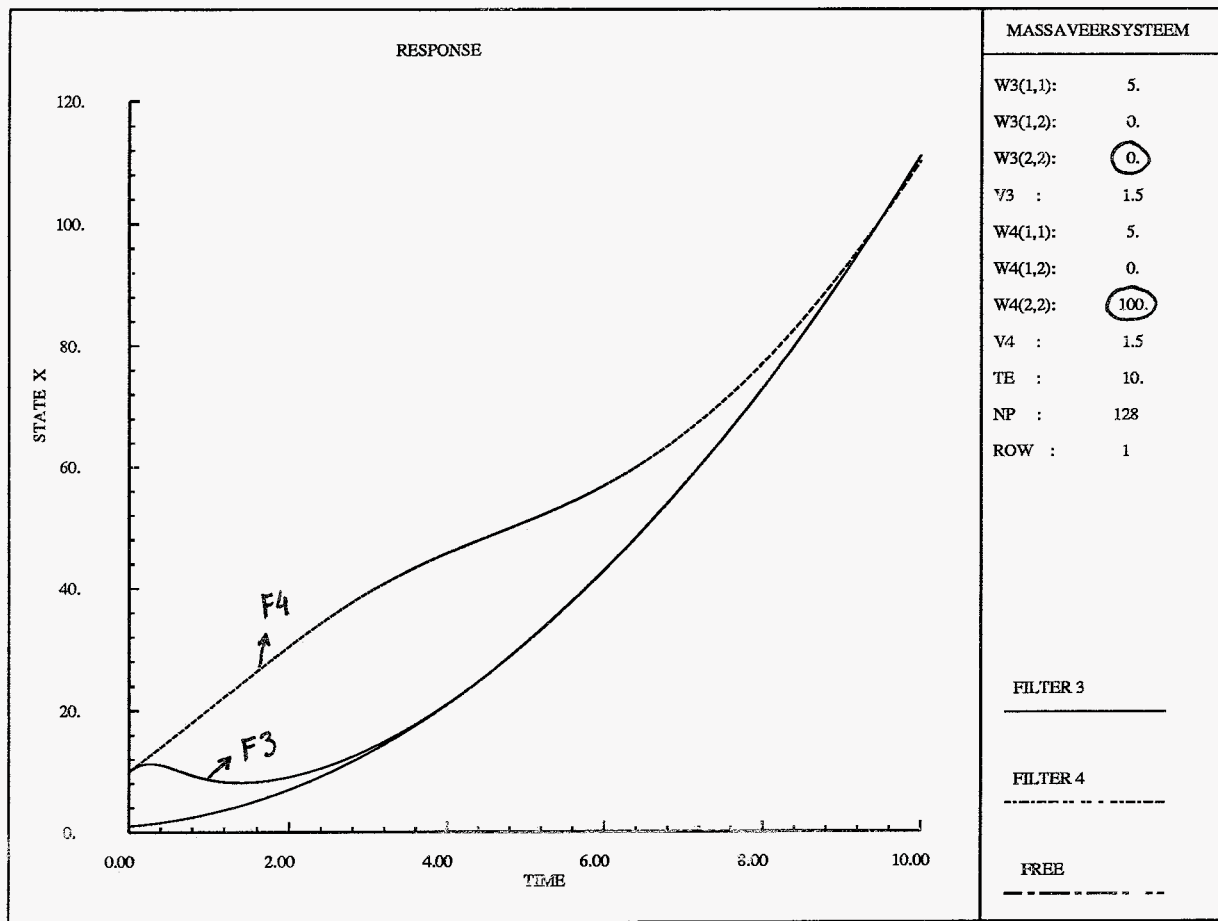


fig 5.5.a

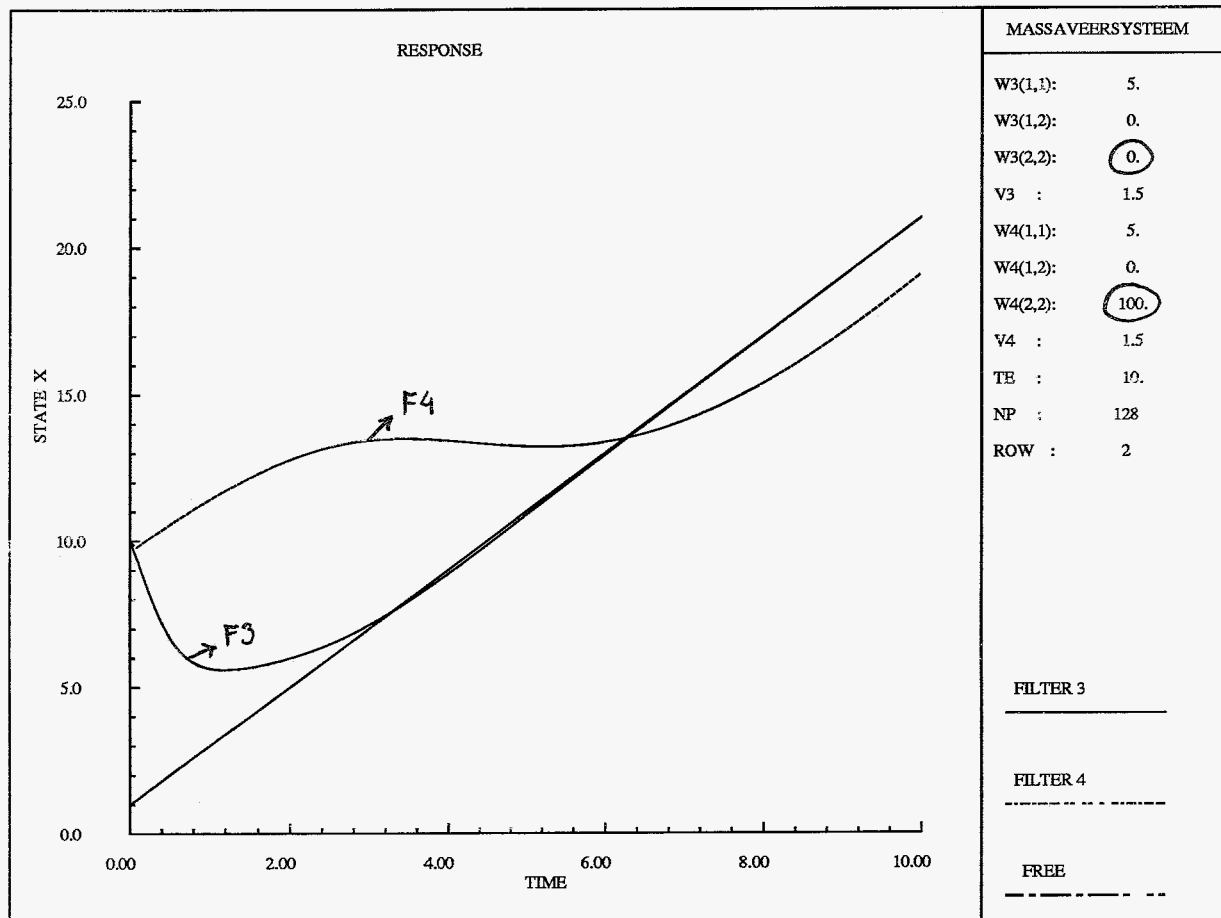


fig 5.5.b

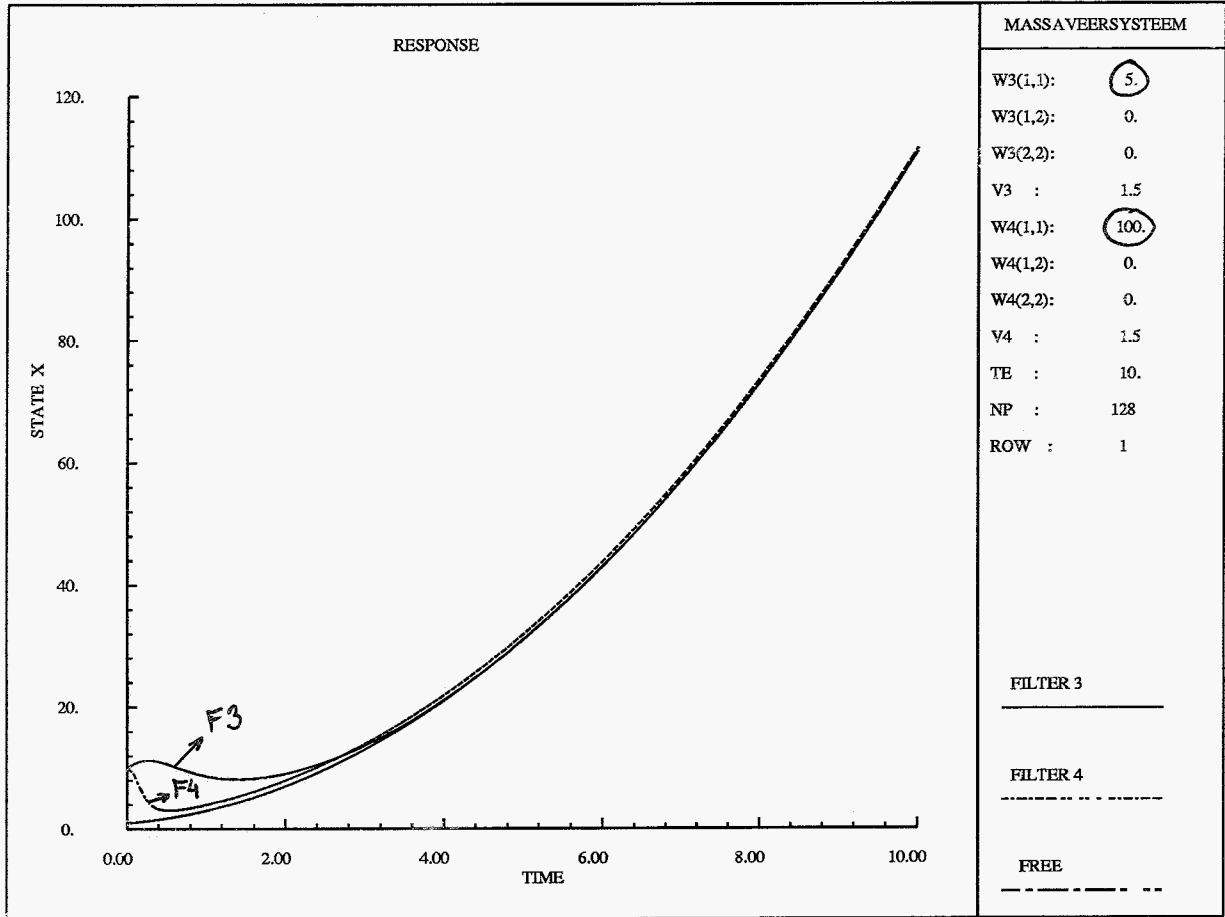


fig 5.6.a

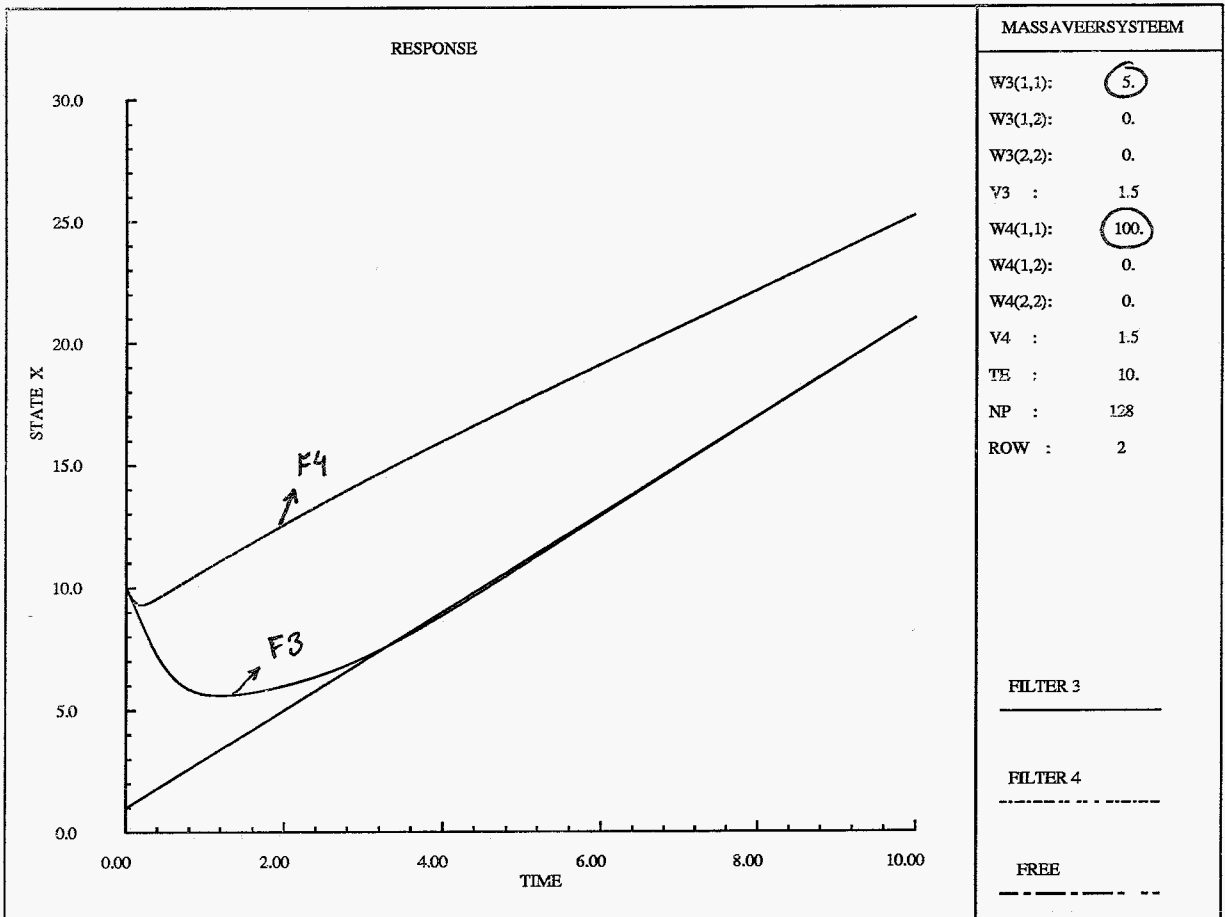


fig 5.6.b

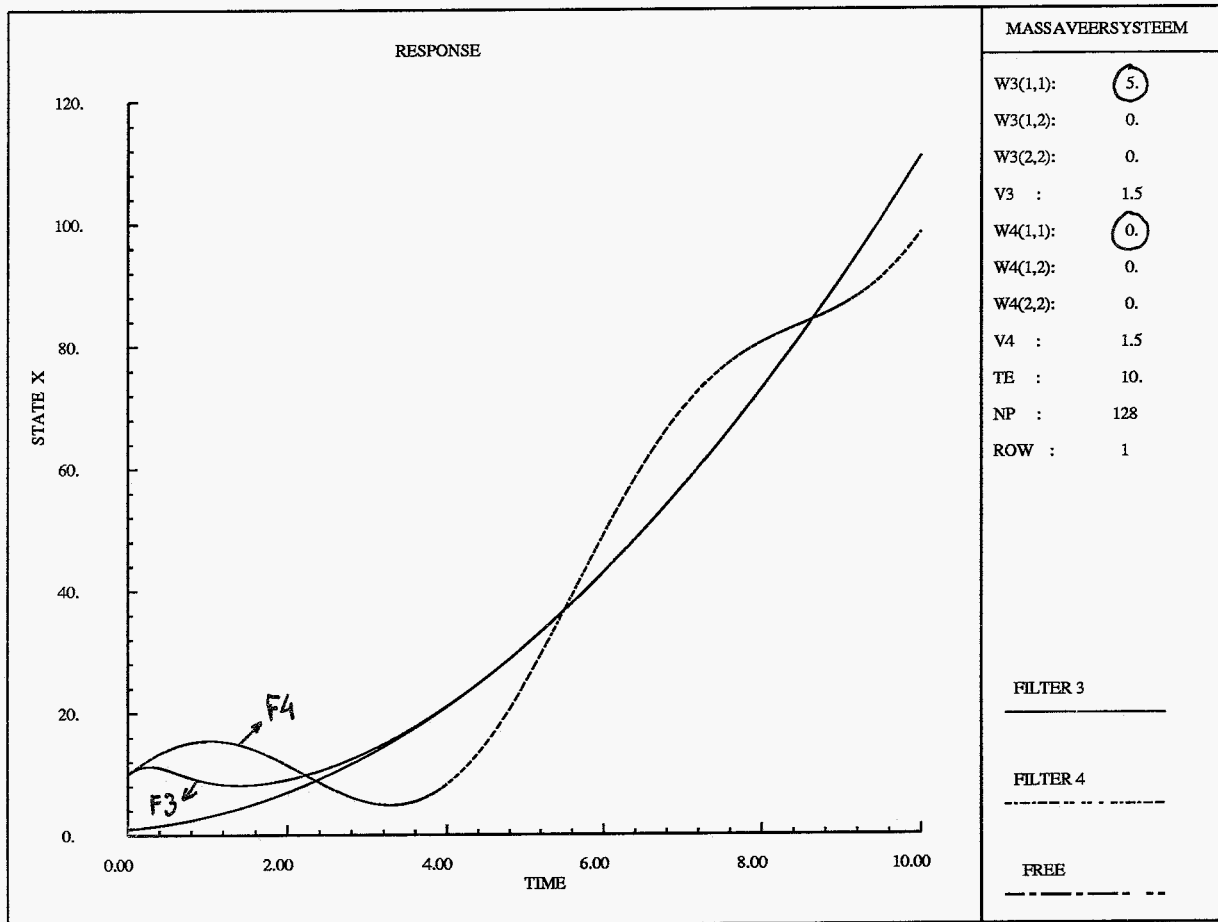


fig 5.7.a

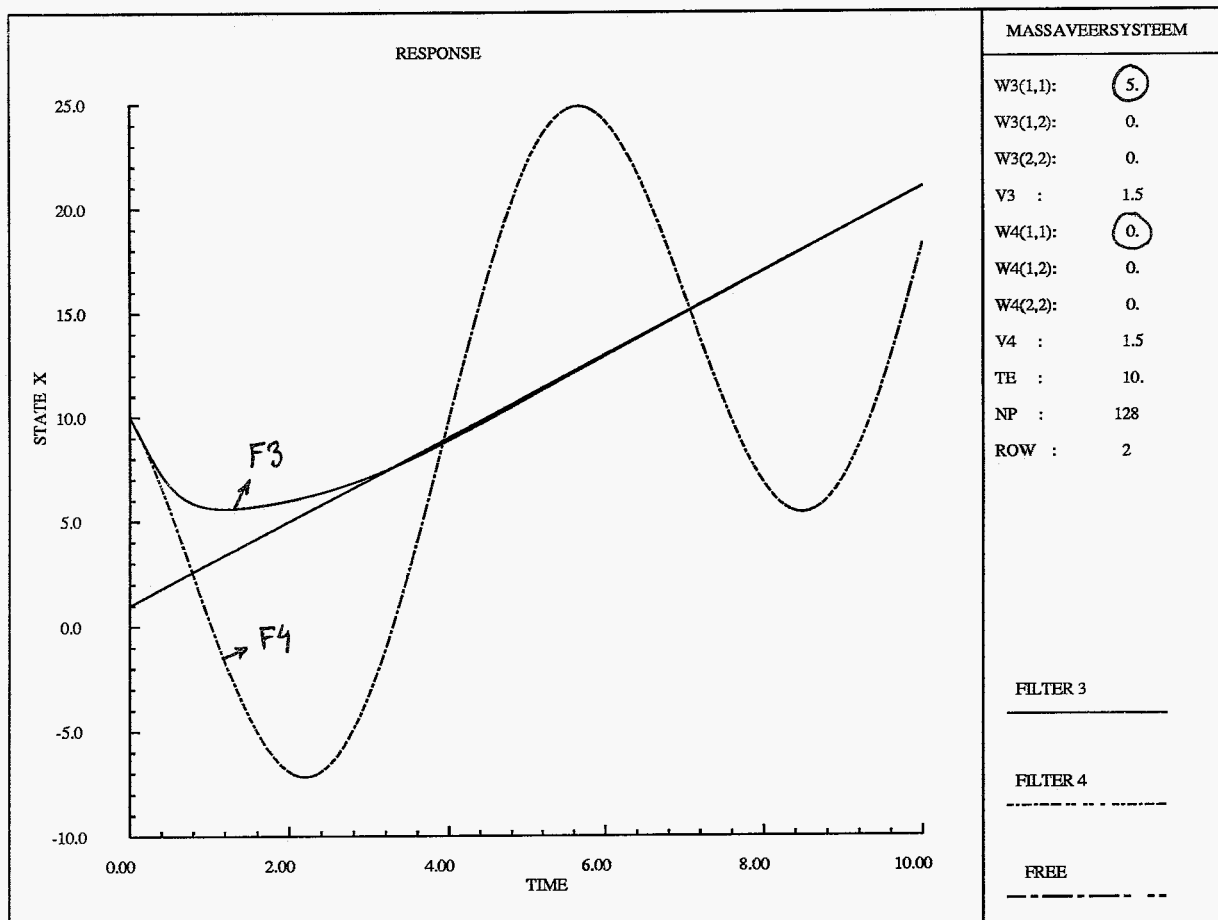


fig 5.7.b

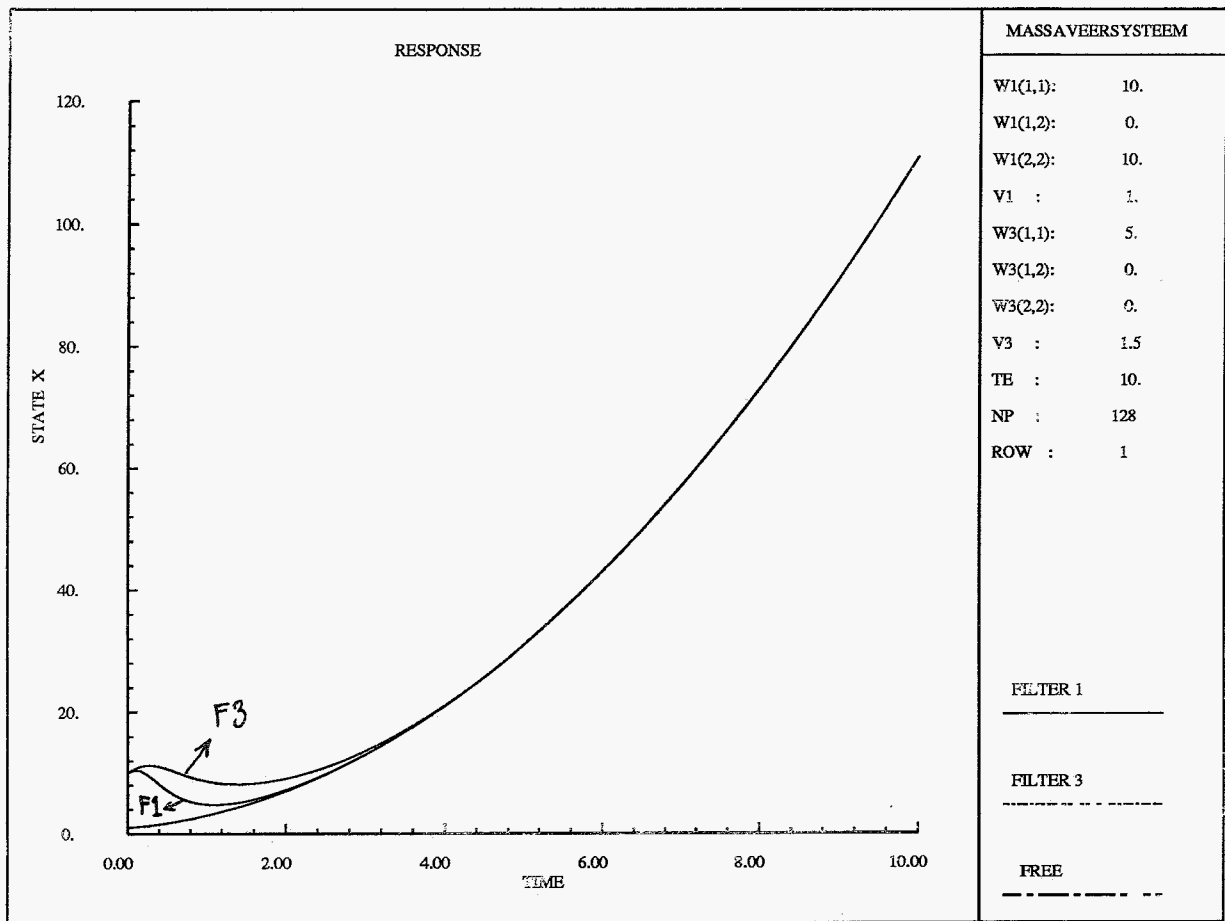


fig 5.8.a

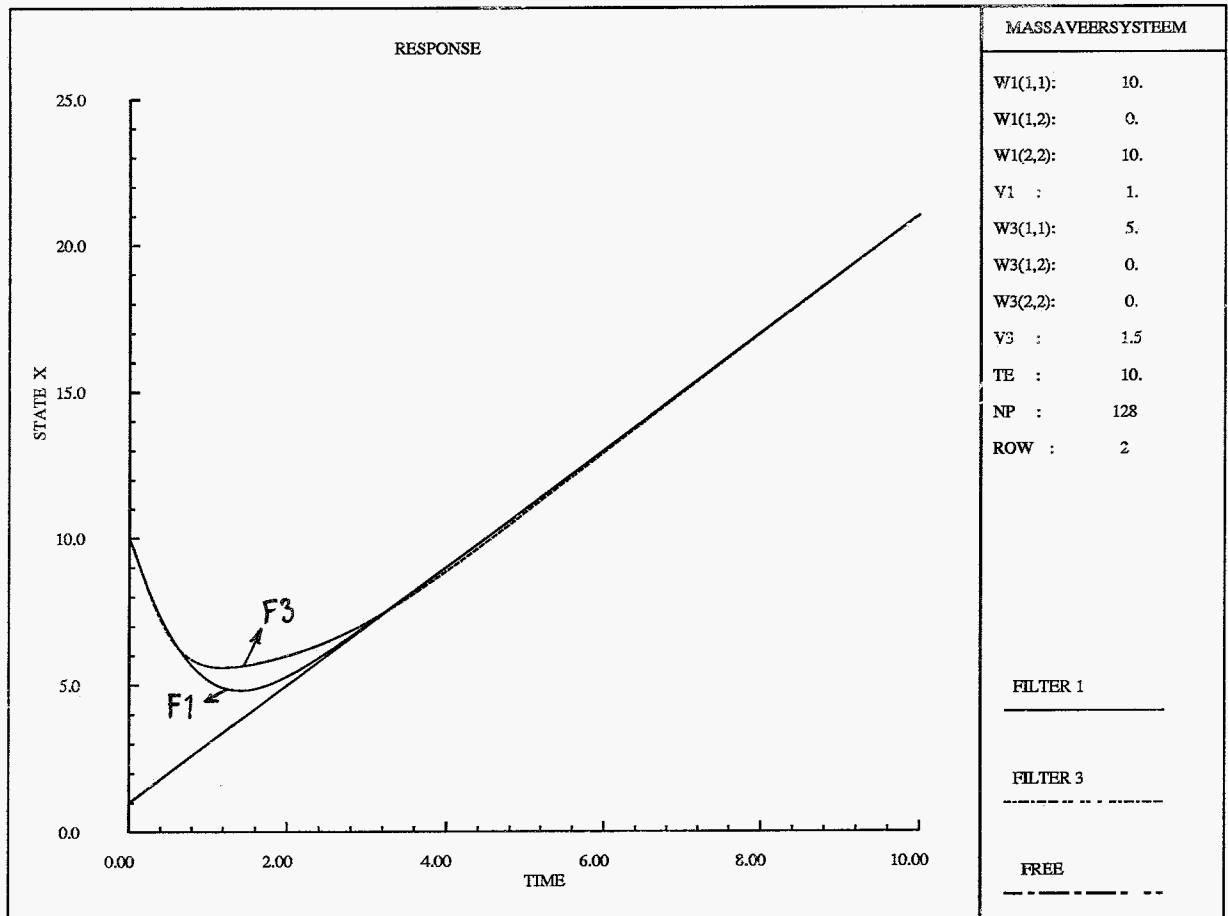


fig 5.8.b

### 5.4.3 Evaluatie resultaten

Uit de grafieken blijkt dat bij een goede instelling met het aangepaste filter met versnellingsmeting (zie grafieken voor filter 3) goede resultaten geboekt kunnen worden. Het filter reageert redelijk snel en de schattingsfout nadert naar nul. Hiermee is de bruikbaarheid van het aangepaste filter in feite al aangetoond. Een nadeel van dit filter echter is de langere benodigde rekentijd. De oorzaak hiervan ligt in het feit dat bij het aangepaste filter wat meer matrixvermenigvuldigingen uitgevoerd moeten worden. Uit fig 5.8 blijkt dat wanneer alleen gebruik wordt gemaakt van verplaatsingsmeting (F1) het filter iets sneller reageert dan wanneer alleen gebruik wordt gemaakt van versnellingsmeting (F3). Hierbij staan zowel F1 als F3 zo optimaal mogelijk ingesteld.



## 6. Conclusies en aanbevelingen

Het blijkt mogelijk te zijn het optimale filter zodanig aan te passen dat ook van versnellingsmetingen gebruik gemaakt kan worden. Daartoe is er een nieuwe reconstrueerbaarheidsvoorwaarde afgeleid en is er een nieuwe uitdrukking voor de optimale versterkingsmatrix bepaald.

Uit de resultaten van de simulatie van het aangepaste filter blijkt dat het doen van versnellingsmetingen waardevolle informatie aan het filter kan geven. Omdat er door tijdgebrek slechts een gering aantal simulaties kon worden uitgevoerd is het moeilijk verdere conclusies te trekken omtrent het gedrag van het aangepaste optimale filter. Een volgend onderzoek zou hierin wellicht verandering kunnen brengen.

LITERATUUR

[1.] J.J. Kok

Werktuigkundige regeltechniek II

Collegedictaat 4594, T.U. Eindhoven 1985

[2.] T. Heeren

REGNONLIN gebruikershandleiding

T.U. Eindhoven 1986

Opmerkingen m.b.t. het gebruik van de aangepaste REGNONLIN-versie

In de aangepaste REGNONLIN versie is het nu mogelijk om met 5 verschillende filters te werken. De filters 1 en 2 zijn Kalman-Bucy filters en zijn niet veranderd ten opzichte van de oorspronkelijke versie. Filter 1 en 2 zijn niet geschikt om gebruik te maken van versnellingsmetingen. Filter 3 en 4 zijn aangepaste Kalman-Bucy filters zoals beschreven in hoofdstuk 4 en zijn wel geschikt om gebruik te maken van versnellingsmetingen. Filter 5 is een zogenaamd gebruikersfilter en kan door de gebruiker zelf gedefinieerd worden. Het gebruikersfilter is niet veranderd ten opzichte van de oorspronkelijke versie van het programma. Filter 1 en 2 werken met de volgende uitgangsvergelijking:

$$y(t) = g(\underline{x}(t), t) = C(t)\underline{x}(t)$$

De dimensies van de uitgangsvector  $y(t)$  en de toestandsvector  $\underline{x}(t)$  zijn respectievelijk 1 en  $n$ . De dimensie van  $C(t)$  is gelijk aan  $1*n$ . Filter 3 en 4 werken met een uitgebreidere uitgangsvergelijking:

$$y(t) = g(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t), t) = C_1(t)\underline{x}(t) + C_2(t)\dot{\underline{x}}(t)$$

De dimensies van  $C_1(t)$  en  $C_2(t)$  zijn beide  $1*n$ . Er geldt:

$$C_1(t) = dg(t)/d\underline{x}(t)$$

$$C_2(t) = dg(t)/d\dot{\underline{x}}(t)$$

Het systeem wordt binnen REGNONLIN vastgelegd in een aantal door de gebruiker toe te voegen routines. De systeemmatrices worden vastgelegd in de routine SYSMAT. De matrices  $C_1(t)$  en  $C_2(t)$  moeten worden samengevoegd tot een matrix op de volgende manier:

$$C(t) = [ C_1(t) \ ; \ C_2(t) ]$$

De dimensie van  $C(t)$  is gelijk aan  $l*2n$ . Let hierop bij de declaratie! De uitgangsvergelijking wordt vastgelegd in de routine SYSUIT. De routine SYSUIT zou er bijvoorbeeld als volgt uit kunnen zien:

```
      SUBROUTINE SYSUIT(G,X,T)
C
C
C De toestandsvector X en het tijdstip T zijn invoerparameters.
C De uitvoerparameter G is het array waar G(X,T) afgeleverd moet
C worden.
C
      REAL*8 G(3),X(2),T,XN(2),UN(1),XP(2)
C
C
C Omdat er alleen T en X bekend zijn zal ook X berekend moeten worden
C
C
      CALL SYSTRA(XN,UN,T)      {bepaal nominaal ingangssignaal UN
      CALL SYSDIF(XP,X,UN,T)   {bereken Xpunt
C
      G(1) = X(1)              {verplaatsingsmeting
      G(2) = X(2)              {snelheidsmeting
      G(3) = XP(2)             {versnellingsmeting
C
      RETURN
      END
```

$$\left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} ; XP = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} \right\}$$