Definitie en berekening van determinanten met behulp van grafen

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Memorandum 1976-01

januari 1976

Definitie en berekening van determinanten met behulp van grafen

door

D.M. Cvetkovic

Technische Hogeschool
Onderafdeling der Wiskunde
PO Box 513, Eindhoven
Nederland

Definitie en berekening van determinanten met behulp van grafen*)

door

D.M. Cvetkovic (Beograd)

1. Inleiding

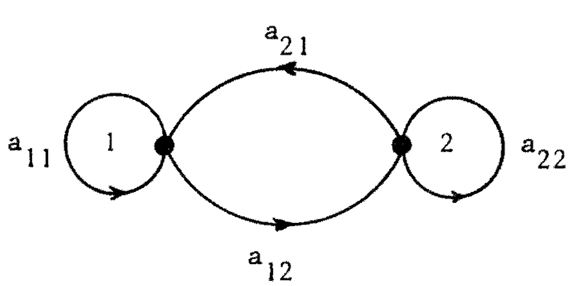
De determinant van een matrix van afmeting n kan worden uitgedrukt in termen van een gerichte graaf op n punten. Naarmate de matrix meer nullen bevat wordt de structuur van de graaf doorzichtiger en daarmee de determinantberekening eenvoudiger. Het wekt dan ook geen verbazing, dat de eerste aanzet van de hier geschetste opbouw van het determinantbegrip uit electrotechnische hoek (Coates [1], 1959) afkomstig is: Daar immers vinden we vaak matrices met veel nullen en zijn zgn. "flow graphs" een bekend onderwerp van studie.

2. Definities

Aan de matrix $A := (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ wordt toegevoegd de volledige gerichte graaf op n punten (d.w.z. voor alle $i,j = 1,2,\ldots,n$ gaat er in deze graaf precies één pijl van punt i naar punt j; er zijn dus in totaal n^2 pijlen). De pijl van punt i naar punt j wordt tenslotte voorzien van het matrixelement a_{ij} uit rij i, kolom j als gewicht. Deze graaf met bijgeschreven gewichten zullen we voortaan de Coates-graaf van de matrix A noemen. Notatie: C_A.

Voorbeeld 1.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

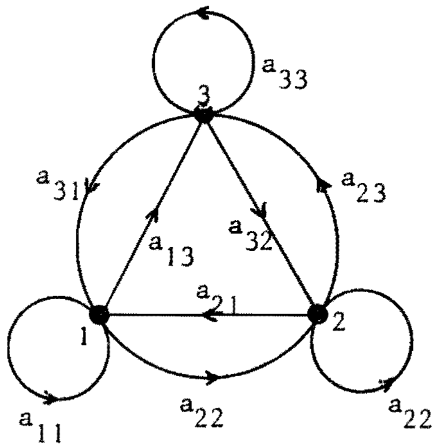


matrix A $\longleftrightarrow$ Coates-graaf C_A

*) Deze bijdrage is een Nederlandstalige versie van [4], samengesteld in overleg met D.M. Cvetkovic door K.A. Post (Eindhoven).

Voorbeeld 2.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



matrix A $\longleftrightarrow$ Coates-graaf C_A

Van belang zijn in C_A die deelgrafen D, waarin bij elk der n punten precies één uitgaande en één binnenkomende pijl voorkomt. Een dergelijke maximale, onvertakte deelgraaf D bestaat uit disjuncte cykels (circuits), die samen alle punten bevatten.

Notaties:

$c(D)$:= aantal cykels in D

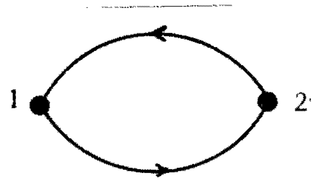
$w(D)$:= het "gewicht" van D := het product van de bijgeschreven gewichten

$\mathcal{D}$:= de verzameling van alle deelgrafen met bovenstaande eigenschap.

Voor de reeds geschetste voorbeelden 1 en 2 zijn deze grootheden als volgt.

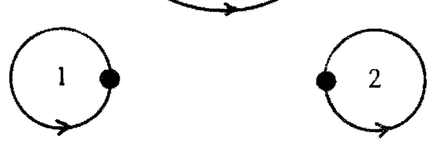
Voorbeeld 1a. $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$, waarbij

D_1 =



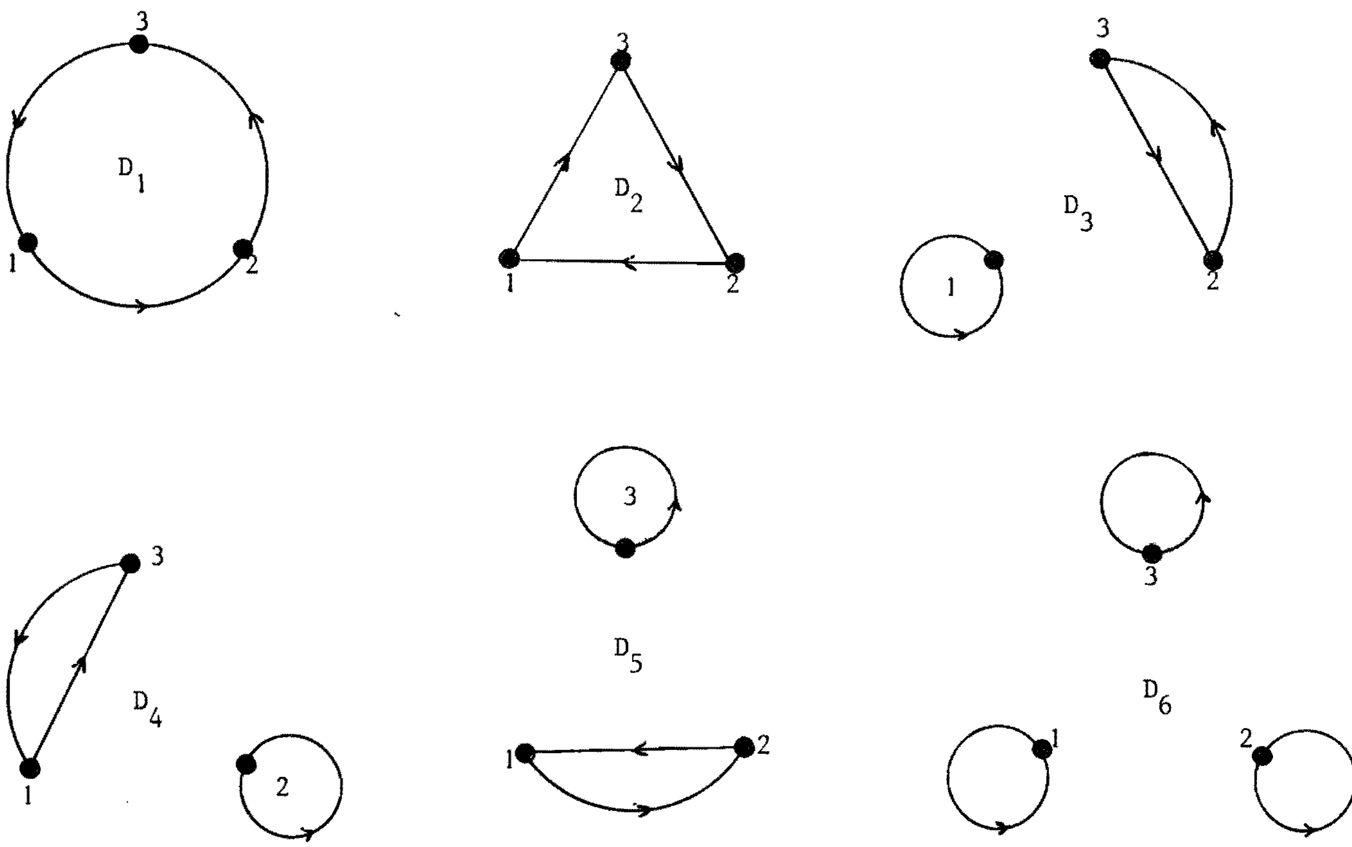
$c(D_1) = 1$, $w(D_1) = a_{12}a_{21}$

D_2 =



$c(D_2) = 2$, $w(D_2) = a_{11}a_{22}$.

Voorbeeld 2a. $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\}$, waarbij



	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
c	1	1	2	2	2	3
w	$a_{12}a_{23}a_{31}$	$a_{21}a_{32}a_{13}$	$a_{11}a_{23}a_{32}$	$a_{22}a_{13}a_{31}$	$a_{33}a_{12}a_{21}$	$a_{11}a_{22}a_{33}$

Opmerking. Omdat een maximale onvertakte deelgraaf D van ieder der n punten uit de Coates-graaf C_A precies één uitgaande en één inkomende pijl bevat, is het bijbehorende gewicht w(D) een product van n matrix elementen a_{ij}, uit iedere rij en iedere kolom precies één, m.a.w. w(D) is, op een plus- of minteken na, gelijk aan een term uit det A. Het zou dus best mogelijk kunnen zijn determinanten te definiëren met behulp van c(D) en w(D). Deze mogelijkheid werd gesuggereerd door Harary [3], zie ook Cvetkovic [4].

<u>Definitie</u>. $\det A := (-1)^n \sum_{D \in \mathcal{D}} (-1)^{c(D)} w(D)$.

<u>Voorbeeld 1b</u>. (Zie voorbeeld 1 en 1a.)

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-1)^2\{(-1)^1 a_{12}a_{21} + (-1)^2 a_{12}a_{22}\} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

<u>Voorbeeld 2b</u>. (Zie voorbeeld 2 en 2a.)

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (-1)^3\begin{Bmatrix} (-1)^1 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^1 a_{21}a_{32}a_{13} \\ +(-1)^2 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^2 a_{22}a_{13}a_{31} \\ +(-1)^2 a_{33}a_{12}a_{21} + (-1)^3 a_{11}a_{22}a_{33} \end{Bmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

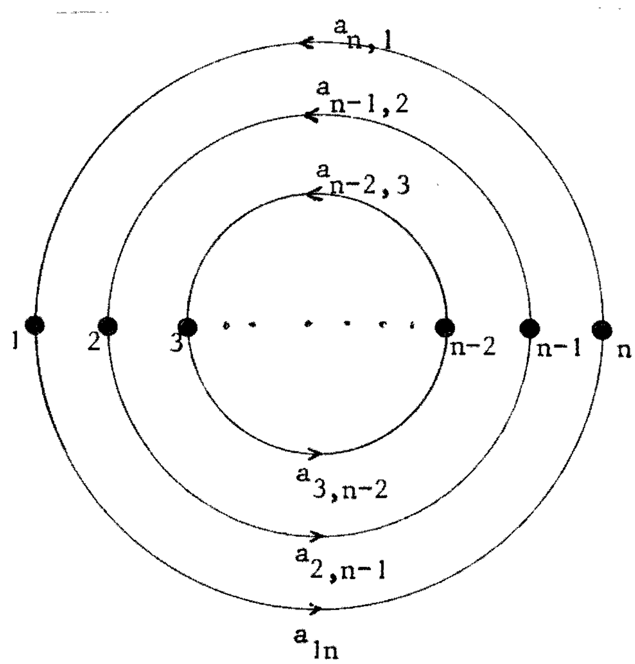
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{33}a_{12}a_{21} .$$

3. <u>Bezuinigingen in de Coates-graaf</u>

Matrix elementen die nul zijn geven in de Coates-graaf pijlen, waaraan een nul is toegevoegd. Maximale onvertakte deelgrafen die één of meer van dergelijke pijlen bevatten hebben gewicht nul en leveren derhalve geen bijdrage tot de determinantwaarde. Het tekenen van zulke pijlen is daarom overbodig. We doen dit dan ook niet meer en kunnen volstaan met het zoeken naar alle maximale overtakte deelgrafen in de aldus gesaneerde Coates-graaf.

<u>Voorbeeld 3</u>.

$$A = \begin{pmatrix} & & & a_{1n} \\ \bigcirc & & a_{2,n-1} & \\ & a_{n-1,2} & & \bigcirc \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

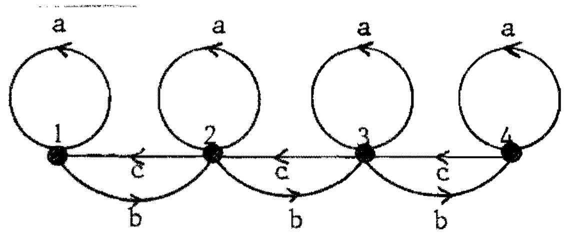


Er is slechts één maximale onvertakte deelgraaf, bestaande uit $\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$ cykels, met gewicht $a_{1n},\dots,a_{n1}$, dus

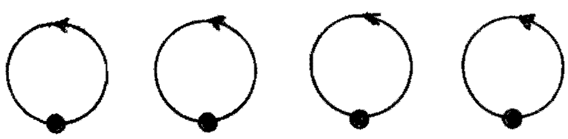
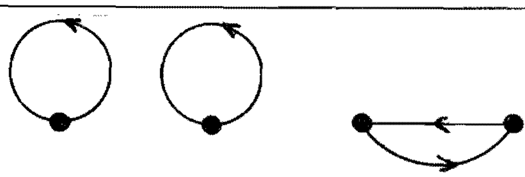
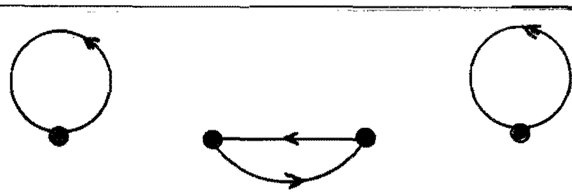
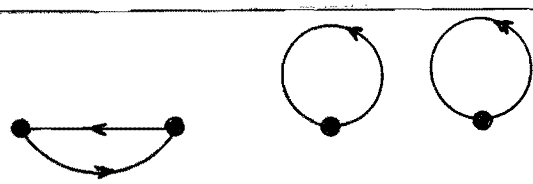
$$\det A = (-1)^n.(-1)^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor} a_{1n}a_{2,n-1},\dots,a_{n-1,2}a_{n1} .$$

<u>Voorbeeld 4.</u>

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 \\ 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & c & a \end{pmatrix}, \quad C_A =$$



$\mathcal{D}$ bestaat uit 5 grafen:

D	c(D)	w(D)
	4	a^4
	3	a^2bc
	3	a^2bc
	3	a^2bc
	2	b^2c^2

Dus

$$\det A = (-1)^4[(-1)^4a^4 + 3(-1)^3a^2bc + (-1)^2b^2c^2] =$$

$$= a^4 - 3a^2bc + b^2c^2 .$$

4. Illustratie en argumentatie van de bekende determinanteigenschappen

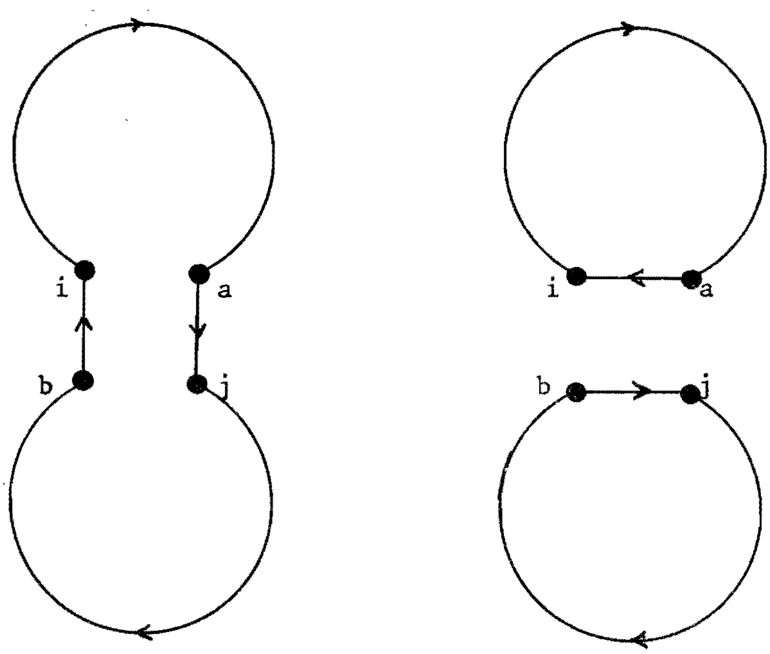
Stelling 1. det A^T = det A (A^T ontstaat uit A door spiegeling t.o.v. de hoofddiagonaal).

Bewijs. De Coates-graaf van A^T ontstaat uit die van A door de richting van alle pijlen om te keren. Alle maximale onvertakte deelgrafen veranderen hiermee van oriëntatie, maar niet van cykel-aantal of gewicht. Er ontstaan geen nieuwe en er gaan geen maximale onvertakte deelgrafen verloren. Ergo: det A^T = det A.

Gevolg. Zonder beperking van de algemeenheid kunnen we voortaan alle determinanteigenschappen formuleren en bewijzen voor kolomoperaties.

Stelling 2. Bij verwisseling van de i-de en de j-de kolom ($i \neq j$) verandert de determinant van teken.

Bewijs. Verwisseling van kolom i en kolom j betekent voor de Coates-graaf dat alle in punt i binnenkomende pijlen worden omgelegd naar punt j en omgekeerd. Verder verandert er niets aan de pijlenstructuur. Van een maximale onvertakte deelgraaf verandert alleen dat stuk, dat i en j bevat, d.w.z. één of twee cykels. De overige cykels van deze deelgraaf blijven ongewijzigd. De pijlenomlegging veroorzaakt een omzetting van de volgende cykelstructuren I en II in elkaar (ga dit na!).



I

II

Hierbij is niet a priori uitgesloten, dat $a = i$ of $b = j$. Van de gehele maximale onvertakte deelgraaf blijft het gewicht gelijk, maar verandert het aantal disjuncte cykels met 1 en daarmee verandert het teken van iedere term uit de determinant.

Stelling 3. De determinant van een matrix met twee gelijke kolommen is nul.

Bewijs. Gevolg van stelling 2. Verwissel de kolommen, dan blijft de determinant gelijk èn wisselt van teken, dus moet de determinant nul zijn.

Stelling 4 (lineariteit). Zijn A, B en C drie matrices van afmeting n, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ zo dat $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}$ $(i = 1,2,\ldots,n;$ $j = 1,2,\ldots,n-1)$ en geldt bovendien

$$c_{in} = \lambda a_{in} + \mu b_{in} \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

met vaste λ en μ, dan is

$$\det C = \lambda \det A + \mu \det B .$$

Bewijs. De Coates-grafen van A, B en C stemmen overeen, behoudens in de gewichten van de in punt n binnenkomende pijlen. Voor de gewichten der overeenkomstige maximale onvertakte deelgrafen D_a, D_b en D_c in de Coates-graaf van A, B en C geldt

$$w(D_c) = \lambda w(D_a) + \mu w(D_b) ,$$

waaruit het gestelde volgt.

Opmerking. Uit de voorafgaande stellingen 2, 3 en 4 volgt dat een matrix zijn determinantwaarde behoudt, als men veelvouden van één van zijn kolommen optelt bij de andere kolommen (zgn. vegen).

Stelling 5 (ontwikkelen van een determinant naar de elementen uit een rij of kolom). Zij A een matrix van afmeting n, en A^{ij} de matrix van afmeting $n-1$, die uit A ontstaat door alle elementen uit rij i en uit kolom j weg te laten $(i,j = 1,\ldots,n)$. Dan geldt voor alle i

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij} ,$$

en voor alle j geldt analoog

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij} .$$

Bewijs. Omdat iedere term uit det A een product is van n matrix elementen, uit elke rij en elke kolom van A precies één, kunnen we de termen groeperen naar de elementen uit de vaste kolom j tot

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_{ij}$$

en rest ons het bepalen van β_{ij}.
Hiertoe passen we, met behoud van de onderlinge volgorde der rijen met nummer $\neq i$ en kolommen met nummer $\neq j$ in matrix A zoveel rij- en kolomverwisselingen toe, dat het element a_{ij} in de linkerbovenhoek is beland. Dit gaat gepaard met $(i - 1) + (j - 1) = i + j - 2$ tekenwisselingen van de determinant. In de resulterende matrix A' staat de matrix A^{ij} genoteerd in de rijen en kolommen 2 t/m n. De factor a_{ij} komt voor in de gewichten van die maximale onvertakte deelgrafen D' van de Coates-graaf van A', welke de lus L op het punt 1 bevatten. Zo'n maximale onvertakte deelgraaf D' bestaat verder uit disjuncte cykels die samen alle punten 2 t/m n bevatten en dus een maximale onvertakte deelgraaf D'' van de Coates-graaf van A^{ij} vormen.
Conclusie:

$$w(D') = w(L)w(D'') = a_{ij}w(D'')$$

en

$$c(D') = 1 + c(D'') .$$

Derhalve

$$(-1)^{c(D')}w(D') = -a_{ij}(-1)^{c(D'')}w(D'') .$$

De term $a_{ij}\beta_{ij}$ uit det A wordt daarom

$$(-1)^n \sum_{D'} (-1)^{c(D')} w(D').(-1)^{i+j-2} =$$

$$= (-1)^n(-a_{ij})(-1)^{i+j-2} \sum_{D''} (-1)^{c(D'')} w(D'') =$$

$$= a_{ij}(-1)^{n-1}(-1)^{i+j} \sum_{D''} (-1)^{c(D'')} w(D'') =$$

$$= (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij} .$$ Q.E.D.

Stelling 6. Het nieuw ingevoerde determinantbegrip stemt overeen met de gebruikelijke definitie.

Bewijs. Voor determinanten van afmeting 2 en 3 zie men voorbeeld 1b en 2b. Voor grotere afmetingen volgt de uitspraak uit stelling 5 door volledige inductie.

Literatuur

[1] C.L. Coates, Flow graph solutions of linear algebraic equations. IRE Trans. Circuit Theory CT-6 (1959), 170-187.

[2] C.A. Desoer, The optimum formula for the gain of a flow graph or a simple derivation of Coates formula, Proc. I.R.E. 48 (1960), 883-889.

[3] F. Harary, The determinant of the adjacency matrix of a graph, SIAM Rev. 4 (1962), 202-210.

[4] D.M. Cvetkovic, The determinant concept defined by means of graph theory, Mat. Vesnik 12 (27) (1975), no. 4.