

Golfgeleiders met periodieke structuur

Citation for published version (APA):

Kooy, C. (1963). *Golfgeleiders met periodieke structuur*. (Technische Hogeschool Eindhoven : Afdeling der Elektrotechniek : rapport; Vol. ET 1). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1963

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Sectie Theoretische Electrotechniek

GOLFGELEIDERS

MET

PERIODIEKE STRUCTUUR

nov. 1961

Inhoud.

	blz.
I. Inleiding.	1
II. Enige fundamentele periodieke systemen.	2
III. Equivalentie van inwendig homogene golfpijp met in z-richting periodieke wand en inwendig perio- dieke golfpijp met in z-richting uniforme wand.	6
IV. Het Theorema van Floquet. Ruimtelijke harmonischen.	9
V. De gesloten periodieke golfgeleider als ketting- schakeling van vierpolen.	11
VI. Open periodieke structuren.	16
A. Het onbegrensde geleidende vlak met gleuven.	16
B. De Helix.	22
1. Het sheath-helix-model	23
2. Het tape-helix-model	26

Appendix I, II en III.

Literatuur.

I Inleiding

Golfgeleiders met periodiciteit staan sinds + 1945 in het centrum van de belangstelling. Het aanbrengen van een periodieke structuur, hetzij in de begrenzingen, hetzij in het golfvoortplantingsmedium zelf (fig. 1a resp. 1b), ver-

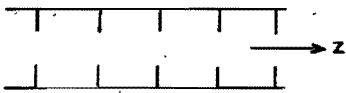


FIG. 1a

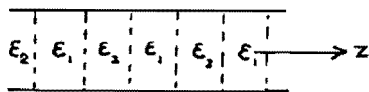


FIG. 1b

oorzaakt dat de golfgeleiders enkele bijzondere eigenschappen verkrijgen, met als voornaamste

a Er ontstaan doorlaat- en sperbanden in het frequentiespectrum (filterwerking)

b De fasesnelheden van zekere optredende e.m.golven zijn verkleind.

Voorals eigenschap b opende mogelijkheden voor technische toepassing. Het lukt namelijk fasesnelheden te creëren van dezelfde grootte-orde als de snelheid van electronen in gerichte bundels waardoor energiewisseling met deze bundels kan plaats vinden. Thans vinden periodieke structuren dan ook ruime toepassing in lopende golfbuizen en backwardwave-oscillators.

Het aantal mogelijke vormen van periodieke structuren is uiteraard legio. We beperken ons hier tot de behandeling van een ge-

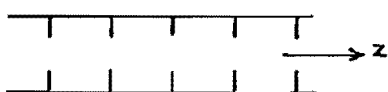


FIG. 1a

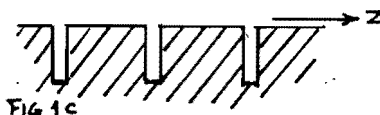


FIG. 1c



FIG. 1d

sloten structuur met dunne obstakels; een in z-richting uniforme golfpijp met periodiek geplaatste diafragma's (fig. 1a), en vervolgens twee open structuren; een onbegrensd geleidend vlak met groeven loodrecht op de golfvoortplantingsrichting (corrugated surface) (fig. 1c) en tenslotte de met constante spoed gespiraliseerde geleidende draad, de zgn. helix (fig. 1d).

Open periodieke structuren bezitten, zoals zal blijken, naast de eigenschappen die kenmerkend zijn voor periodiciteit nog een typisch gedragskenmerk, dat het onderscheid "open" en "gesloten"

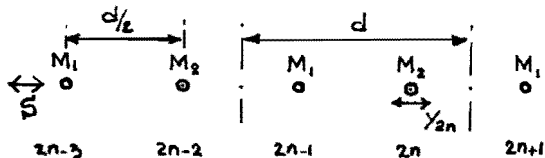
zinvol maakt.

Bij de analyse van de structuur van het type fig. 1a zullen analoge in de vorm van vierpoolcascadeschakelingen zeer succesvol blijken. De open structuren fig. 1c en 1d zijn meer geschikt voor rechtstreekse aanpak met de veldvergelijkingen van Maxwell.

II Enige fundamentele periodieke systemen.

Het karakteristieke gedrag van periodieke structuren is geenszins uitsluitend een electromagnetisch fenomeen, maar een algemeen fysisch verschijnsel.

Om dit tot uiting te doen komen beschouwen we een fundamenteel periodiek systeem van twee-soortige puntmassa's, onderling gekoppeld, en gelijktijdig het elektrisch analoog hiervan.



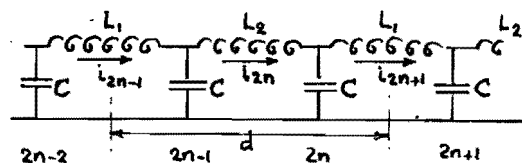
In rust bevinden alle massa's zich in stabiele toestand (potent. energie U minimaal). Ondersteld: wederzijdse beïnvloeding van de massa's beperkt tot naastliggende exemplaren.

T.g.v. storing S links ontstaan longitudinale uitwijkingen y .

Potentiele energie van p^e massa nu:

$$U_p = U\left(\frac{d}{2} + y_p - y_{p-1}\right) + U\left(\frac{d}{2} + y_{p+1} - y_p\right)$$

t.g.v. $p-1^e$ exempl. t.g.v. $p+1^e$ exempl.



We kunnen de volgende grondvergelijkingen opschrijven:

$$i_{2n} - i_{2n+1} = \frac{dQ_{2n}}{dt}$$

$$i_{2n+1} - i_{2n+2} = \frac{dQ_{2n+1}}{dt}$$

$$L_1 \frac{di_{2n+1}}{dt} = V_{2n} - V_{2n+1} = \frac{Q_{2n}}{C} - \frac{Q_{2n+1}}{C}$$

$$L_2 \frac{di_{2n}}{dt} = V_{2n-1} - V_{2n} = \frac{Q_{2n-1}}{C} - \frac{Q_{2n}}{C}$$

waarin Q = condensatorlading.

Differentiëren van de laatste twee vergelijkingen geeft:

$$L_1 \frac{d^2 i_{2n+1}}{dt^2} = \frac{1}{C} \frac{dQ_{2n}}{dt} - \frac{dQ_{2n+1}}{C dt}$$

$$L_2 \frac{d^2 i_{2n}}{dt^2} = \frac{1}{C} \frac{dQ_{2n-1}}{dt} - \frac{dQ_{2n}}{C dt}$$

stel nu $y \ll \frac{d}{2}$, dan Taylorontwikkeling om $\frac{d}{2}$ mogelijk:

$$U_p = 2U_{\frac{d}{2}} + U_{\frac{d}{2}}''(y_p - y_{p-1}) + U_{\frac{d}{2}}''(y_{p+1} - y_p) + \frac{1}{2}U_{\frac{d}{2}}''''(y_p - y_{p-1})^2 + \frac{1}{2}U_{\frac{d}{2}}''''(y_{p+1} - y_p)^2 + \dots$$

De terugdrijvende kracht F_p naar de evenwichtstoestand is nu:

$$F_p = -\frac{\partial U_p}{\partial y_p} = U_{\frac{d}{2}}''(y_{p-1} + y_{p+1} - 2y_p)$$

De bewegingsverg. luidt dus:

$$M_p \frac{\delta^2 y_p}{\delta t^2} = F_p$$

Voor de massa's M_1 :

$$M_1 \frac{\delta^2 y_{2n+1}}{\delta t^2} = U_{\frac{d}{2}}''(y_{2n} + y_{2n+2} - 2y_{2n+1})$$

Voor de massa's M_2 :

$$M_2 \frac{\delta^2 y_{2n}}{\delta t^2} = U_{\frac{d}{2}}''(y_{2n-1} + y_{2n+1} - 2y_{2n})$$

We onderstellen oplossingen van de vorm:

$$y_{2n} = A_2 e^{i(\omega t - 2nk_1)} \quad \text{voor } M_2$$

$$y_{2n+1} = A_1 e^{i[\omega t - (2n+1)k_1]} \quad \text{voor } M_1$$

met $k_1 = h(\frac{d}{2})$

Substitutie in bewegingsverg. geeft:

$$2A_1 U_{\frac{d}{2}}'' \cos k_1 + A_2 (M_2 \omega^2 - 2U_{\frac{d}{2}}'') = 0$$

$$A_1 (M_1 \omega^2 - 2U_{\frac{d}{2}}'') + 2A_2 U_{\frac{d}{2}}'' \cos k_1 = 0$$

waaruit door te eisen

$$\det/\text{coeff. van } A_{1,2} = 0$$

volgt:

$$\omega^2 = U_{\frac{d}{2}}'' \left[\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)^2 - 4 \frac{\sin^2 k_1}{M_1 M_2}} \right]$$

De interpretatie van de betrekking $\omega = f(k_1)$, waaruit de analogie van beide structuren duidelijk spreekt, is het eenvoudigst aan de hand van een diagram, waarin ω als functie van de voortplantingsconstante k_1 is uitgezet (fig.3).

De eerste twee vergelijkingen gesubstitueerd geeft:

$$L_1 \frac{d^2 i_{2n+1}}{dt^2} = \frac{1}{c} [i_{2n} + i_{2n+2} - 2i_{2n+1}]$$

$$L_2 \frac{d^2 i_{2n}}{dt^2} = \frac{1}{c} [i_{2n-1} + i_{2n+1} - 2i_{2n}]$$

Onderstel oplossingen van de

$$\text{vorm: } i_{2n} = A_2 e^{i(\omega t - 2nk_1)}$$

$$i_{2n+1} = A_1 e^{i[\omega t - (2n+1)k_1]}$$

Er ontstaan na substitutie weer twee vergelijkingen in A_1 en A_2 .

Oplossingen \neq nuloplossing weer alleen door te stellen:

$$\det/\text{coeff. van } A_{1,2} = 0$$

waaruit:

$$(-L_1 \omega^2 + \frac{2}{c})(-L_2 \omega^2 + \frac{2}{c}) - \frac{1}{c^2} (e^{ik_1} + e^{-ik_1})(e^{ik_1} + e^{-ik_1}) = 0$$

of:

$$\omega^4 - \left[\frac{2}{c} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \right] \omega^2 + \frac{4 \sin^2 k_1}{c^2 L_1 L_2} = 0$$

waaruit:

$$\omega^2 = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \pm \frac{1}{c} \sqrt{\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)^2 - \frac{4 \sin^2 k_1}{L_1 L_2}}$$

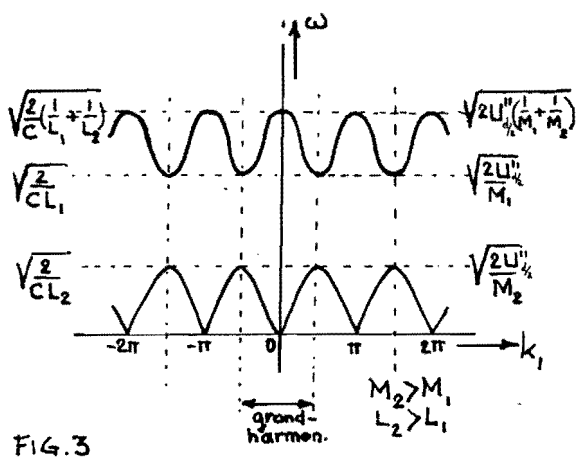


FIG.3

We merken op dat er twee frequentiegebieden zijn, waarin bij bepaalde ω voortplantingsconstanten k_1 optreden nl. voor

$$0 \leq \omega \leq \begin{cases} \sqrt{\frac{2L_1''}{M_2}} \\ \sqrt{\frac{2}{CL_2}} \end{cases}$$

en voor

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2L_1''}{M_1}} \\ \sqrt{\frac{2}{CL_1}} \end{cases} \leq \omega \leq \begin{cases} \sqrt{\frac{2L_1''}{M_1} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)} \\ \sqrt{\frac{2}{C} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)} \end{cases}$$

Dit zijn de doorlaatbanden. Voor de overige frequenties is geen voortplanting door de structuren mogelijk.

In een doorlaatband behoort bij een bepaalde frequentie ω , een onbegrensde reeks voortplantingsconstanten voor te stellen door

$$k_1(m) = k_1 + m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Omdat

$$\begin{aligned} \text{resp:} \quad y_{p+m} &= y_p e^{-2ik_1} \\ i_{p+m} &= i_p e^{-2ik_1} \end{aligned}$$

zien we direkt dat de term $m\pi$ geen invloed heeft op de oplossing voor y_p , resp. i_p . Er is een onbepaaldheid in de voortplantingsconstante omdat de "toetsing" van de oplossing slechts plaats vindt op discrete punten. We kunnen de golfoplossingen met $m \neq 0$ opvatten als ruimtelijke harmonischen.

De fase- en groepssnelheid van de golven kunnen in het ω - k_1 -diagram op eenvoudige wijze worden aangeduid.

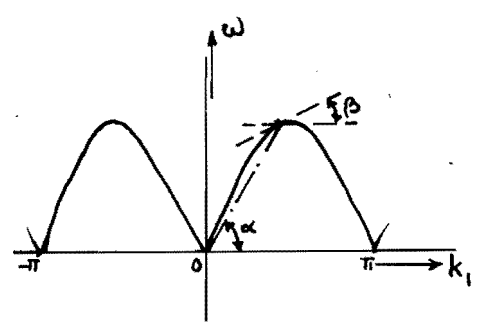


FIG.4

Immers:

$$v_f = \frac{\omega}{(k_1/d)} = \frac{d}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial (k_1/d)} = \frac{d}{2} \operatorname{tg} \beta$$

(zie fig. 4).

We kunnen bovenstaande beschouwingen zeer algemeen maken door een periodiek systeem van veel-

soortige puntmassa's te beschouwen.

Er ontstaan dan vele doorlaat- en sperrfrequentiebanden (fig. 5).
 In het limietgeval ontstaat een continu periodiek systeem en
 is het aantal doorlaatbanden onbegrensd geworden.

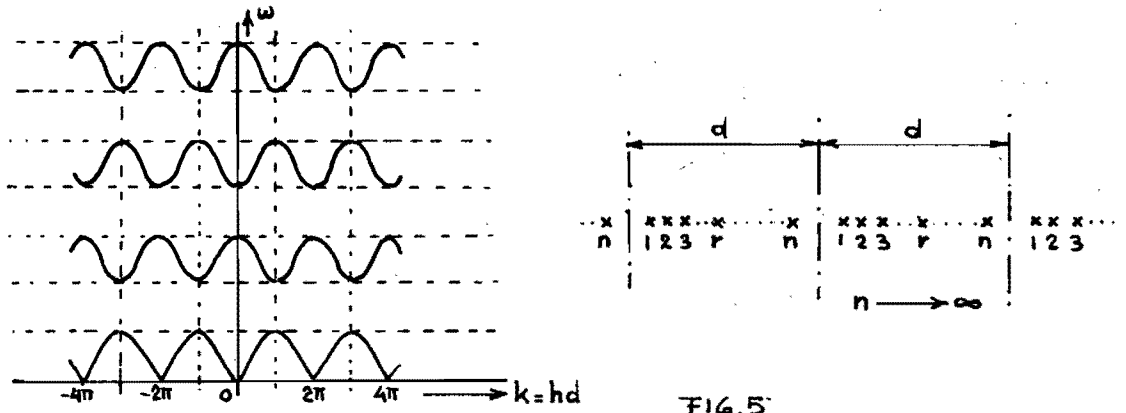
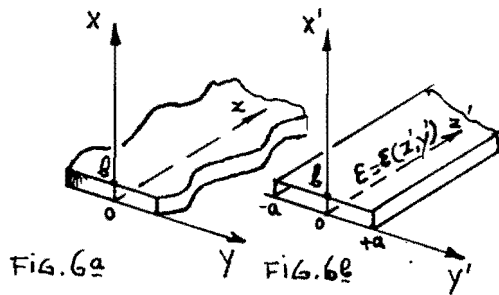


FIG. 5

De periodieke electromagnetische golfgeleiders die hierna zullen
 worden besproken zijn in wezen dergelijke limietgevallen.

III De aequivalentie van inwendig homogene golfpijp met in z-richting periodieke wand en inwendig periodieke golfpijp met in z-richting uniforme wand.



We tonen aan dat de configuratie van fig. 6a, een inwendig homogene golfpijp met onder- en bovenvlak $x = 0$ resp. $x = b$ en periodiek gebogen zijvlakken $f(y, z) = 0$ en $f(-y, z) = 0$ aequivalent is met een door platte vlakken begrensde golfpijp waarin echter $\epsilon = \epsilon(z', y')$.

Voor de beschrijving van de veldcomponenten in de golfpijp van fig. 6a kunnen we gebruik maken van een elektrische- en een magnetische Herzvector, die we hier in de x-richting kiezen.

Dus elektrische Herzvector: $\vec{a}_x \Pi_x(x, y, z)$

magnetische Herzvector: $\vec{a}_x \Pi_x^*(x, y, z)$

Zodat: $\vec{E} = \nabla \times \nabla \times \vec{a}_x \Pi_x - j\omega \nabla \times \vec{a}_x \Pi_x^* = \nabla \left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} \right) - j\omega \left(\vec{a}_y \frac{\partial \Pi_x^*}{\partial z} - \vec{a}_z \frac{\partial \Pi_x^*}{\partial y} \right) + k^2 \vec{a}_x \Pi_x$ ($k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$)

$\vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{a}_x \Pi_x^* + j\omega \epsilon \mu \nabla \times \vec{a}_x \Pi_x = \nabla \left(\frac{\partial \Pi_x^*}{\partial x} \right) + j\omega \epsilon \mu \left(\vec{a}_y \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \vec{a}_z \frac{\partial \Pi_x}{\partial y} \right) + k^2 \vec{a}_x \Pi_x^*$

voor boven- en onderwand moet gelden (voor alle y en z):

$$\left. \begin{aligned} x = 0, b: E_z = 0 &\rightarrow j\omega \frac{\partial \Pi_x^*}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial x \partial z} = 0 \\ E_y = 0 &\rightarrow -j\omega \frac{\partial \Pi_x^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{dus moet } \left. \begin{aligned} \Pi_x^* &= 0 \\ \frac{\partial \Pi_x}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ zijn voor } x = 0, b.$$

Voor de zijwanden is de eis $E_x = 0$ ($0 < x < b$)
en $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$ ($0 < x < b$)

waaruit:

$$E_x = \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial x^2} + k^2 \Pi_x = 0 \rightarrow \Pi_x = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = j\omega \epsilon \mu \left(n_y \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - n_z \frac{\partial \Pi_x}{\partial y} \right) + n_x \frac{\partial^2 \Pi_x^*}{\partial x \partial y} + n_z \frac{\partial^2 \Pi_x^*}{\partial x \partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(n_y \frac{\partial \Pi_x^*}{\partial y} + n_z \frac{\partial \Pi_x^*}{\partial z} \right) = 0$$

waaruit: $\vec{n} \cdot \nabla \Pi_x^* = 0 \rightarrow \frac{\partial \Pi_x^*}{\partial n} = 0$

We kunnen de Herzpotentialen dus schrijven in de vorm:

$$\Pi_x(x, y, z) = \phi(y, z) \cos \frac{m\pi}{b} x \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

$$\Pi_x^*(x, y, z) = \psi(y, z) \sin \frac{m\pi}{b} x \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

met ter plaatse van de zijwanden:

$$\phi(y, z) = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial \psi}{\partial n}(y, z) = 0 \quad (3)$$

π_x^* en π_x voldoen aan de homogene golfvergelijking:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \pi_x + k^2 \pi_x &= 0 \\ \nabla^2 \pi_x^* + k^2 \pi_x^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(3) gesubstitueerd geeft de betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{y,z}^2 \phi(y,z) + \left[k^2 - \frac{m^2 \pi^2}{\epsilon^2} \right] \phi(y,z) &= 0 \\ \nabla_{y,z}^2 \psi(y,z) + \left[k^2 - \frac{m^2 \pi^2}{\epsilon^2} \right] \psi(y,z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

waarin: $\nabla_{y,z}^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

We kunnen nu de vergelijkingen (5) transformeren van het y-z vlak naar een y'-z' vlak via een conforme transformatie

$$W = z + iy = F(z' + iy') = F(U) \quad (6)$$

voor zo'n transformatie geldt:

$$\left. \begin{aligned} dz^2 + dy^2 &= \left| \frac{dW}{dU} \right|^2 (dz'^2 + dy'^2) \\ \text{en: } \nabla_{z,y}^2 &= \frac{1}{\left| \frac{dW}{dU} \right|^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) = \frac{1}{\left| \frac{dW}{dU} \right|^2} \nabla_{z',y'}^2 \end{aligned} \right\} \quad \text{zie appendix I}$$

zodat de getransformeerde diff. vergelijkingen (5) worden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} + \left| \frac{dW}{dU} \right|^2 \left(k^2 - \frac{m^2 \pi^2}{\epsilon^2} \right) \phi &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z'^2} + \left| \frac{dW}{dU} \right|^2 \left(k^2 - \frac{m^2 \pi^2}{\epsilon^2} \right) \psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Is de transformatie $W = F(U)$ zodanig dat de periodiek gebogen zijwanden in het W-vlak overgaan in rechte zijwanden // z'-as in het U-vlak (fig. 6b) dan worden de randvoorwaarden (3):

$$\left. \begin{aligned} \phi(y',z') = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y'} = 0 & \quad \text{voor } y' = a \\ & \quad \text{en } y' = -a \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Omdat nu $\frac{dW}{dU}$ in het algemeen een functie is van y' en z' kunnen we de vergelijkingen (7) interpreteren als zijnde de golfvergelijkingen voor een rechthoekige golfpijp, uniform in de z'-richting en gevuld met een medium waarvan de diëlectrische constante plaatsafhankelijk is. Hiermee is de aequivalentie van de fig. 6a en 6b aangetoond.

Voorbeeld: Kies voor de conforme transformatie $W = F(U)$:

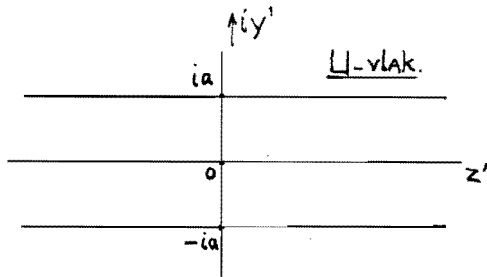


FIG. 7a

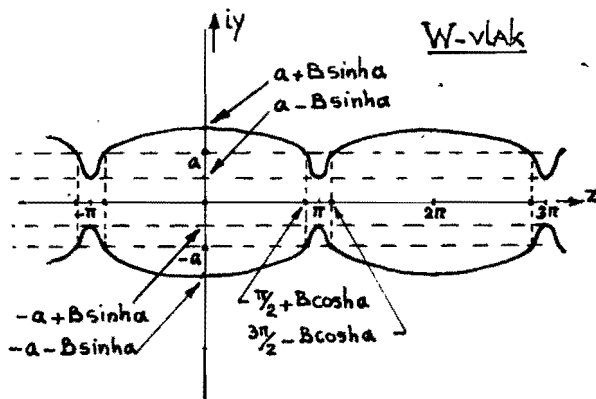


FIG. 7b

$$W = U + B \sin U \quad (9)$$

$$W = z + iy$$

$$U = z' + iy'$$

Deze transformatie doet rechten / z' as in het U-vlak (fig. 7a) overgaan in periodieke krommen in het W-vlak (fig. 7b). Bovendien gaat de z' -as in het U-vlak over in de z -as van het W-vlak, dus het gebied tussen $z' \pm ia$ gaat over in het gebied tussen beide krommen in het W-vlak (ga dit na).

Uit (9) volgt:

$$\left| \frac{dW}{dU} \right| = |1 + B \cos U|$$

of:

$$\left| \frac{dW}{dU} \right|^2 = (1 + B \cos z' \cosh y')^2 + B^2 \sin^2 z' \sinh^2 y'$$

of: $\left| \frac{dW}{dU} \right|^2 = 1 + 2B \cos z' \cosh y' + B^2 \cos^2 z' + B^2 \sinh^2 y' \quad (-a \leq y' \leq +a)$

Dus $\left| \frac{dW}{dU} \right|^2$ is periodiek in z' . Voor a voldoende klein mogen we stellen $\cosh y' = 1 + \frac{1}{2} y'^2$ en $\sinh y' \approx y'$ zodat voor $B = 1$:

$$\left| \frac{dW}{dU} \right|^2 \approx (1 + \cos z')^2 = M(z'), \text{ indien } a \ll 1$$

waardoor splitsing van de variabelen in (7) mogelijk wordt.

Stellen we $\left. \begin{matrix} \phi(y', z') \\ \psi(y', z') \end{matrix} \right\} = Y(y').Z(z')$

dan volgt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 Y(y')}{Y(y') \partial y'^2} &= -\eta & \Rightarrow & \frac{\partial^2 Y}{\partial y'^2} + \eta Y = 0 \\ \frac{\partial^2 Z(z')}{Z(z') \partial z'^2} + M(z') \left(k^2 - \frac{m^2 \pi^2}{\epsilon^2} \right) &= +\eta & \Rightarrow & \frac{\partial^2 Z}{\partial z'^2} + [M(z') \left(k^2 - \frac{m^2 \pi^2}{\epsilon^2} \right) - \eta] Z = 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

De resultaten van dit hoofdstuk samenvattend mogen we aannemen dat bij golfgeleiders met periodiciteit in de langsrichting (z -richting), ongeacht de aard van de periodiciteit (medium of rand) de golfvoortplanting in de z -richting wordt beheerst door een differentiaalvergelijking van de vorm:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + f(z) \Theta = 0 \text{ met } f(z) \text{ periodiek} \quad (11)$$

IV Het theorema van Floquet. Ruimtelijke harmonischen.

We gaan nu de fundamentele diff. vergelijking (11) nader onderzoeken. Zijn $g(z)$ en $h(z)$ onafhankelijke oplossingen van (11) dan is de algemene oplossing te schrijven:

$$F(z) = Aq(z) + Bh(z) \quad A \text{ en } B \text{ constant.}$$

Is de periode van $f(z)$ in (11) 2π , dan zijn $g(z + 2\pi)$ en $h(z + 2\pi)$ ook oplossingen, hetgeen door substitutie direkt duidelijk is.

Echter in het algemeen: $\left. \begin{matrix} g(z + 2\pi) \\ h(z + 2\pi) \end{matrix} \right\} \neq \begin{cases} g(z) \\ h(z) \end{cases}$

Wel is te schrijven: $\begin{matrix} g(z + 2\pi) = \alpha_{11}g(z) + \alpha_{12}h(z) \\ h(z + 2\pi) = \alpha_{21}g(z) + \alpha_{22}h(z) \end{matrix} \quad \alpha_{nm} \text{ constant}$

Zodat: $F(z+2\pi) = (A\alpha_{11} + B\alpha_{21})g(z) + (A\alpha_{12} + B\alpha_{22})h(z) \quad (12)$

Dus: $F(z+2\pi) = kF(z)$ met k is constant

mits: $\begin{matrix} A\alpha_{11} + B\alpha_{21} = kA \\ A\alpha_{12} + B\alpha_{22} = kB \end{matrix} \quad (13)$

Een oplossing voor A en $B \neq 0$ is mogelijk als

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-k & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-k \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

Een gevonden k met bijbehorende B/A verschaft dus een oplossing waarvoor geldt: $F(z+2\pi) = kF(z)$ ^{*)} (15)

Definiëren we nu $k = e^{2\pi\mu}$ en noemen $\phi(z) = e^{-\mu z} F(z)$

zodat $F(z) = e^{\mu z} \phi(z)$

dan is: $\phi(z+2\pi) = e^{-\mu(z+2\pi)} F(z+2\pi) = \frac{1}{k} e^{-\mu z} k F(z) = \phi(z)$

of wel: De differentiaalvergelijking (11) bezit een bijzondere oplossing van de vorm $\phi(z)e^{\mu z}$ waarin $\phi(z)$ periodiek is.

Dit is het theorema van Floquet.

Een andere formulering, gebaseerd op (15) luidt:

Er is een oplossing van (11) waarvoor geldt:

Voor twee z-waarden die een periode verschillen zijn de oplossingen gelijk op een constante complexe factor na.

*) De wortels k_1 en k_2 zijn onafhankelijk van de keuze van $g(z)$ en $h(z)$. Toon dit aan door twee nieuwe basisoplossingen $\delta_1(z)$ en $\delta_2(z)$ te nemen waarbij $\begin{matrix} g(z) = \gamma_{11}\delta_1(z) + \gamma_{12}\delta_2(z) \\ h(z) = \gamma_{21}\delta_1(z) + \gamma_{22}\delta_2(z) \end{matrix}$

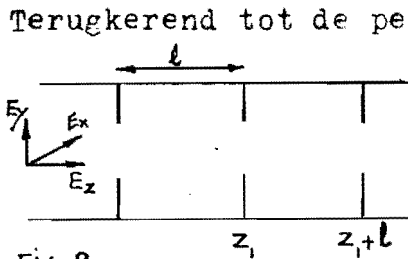


FIG. 8

Terugkerend tot de periodieke golfgeleider (fig. 8) kunnen we zeggen dat bijvoorbeeld de elektrische veldcomponenten bij golfvoortplanting in de z-richting van de gedaante

$$\bar{E} = \bar{E}(x,y,z) e^{-\mu z} e^{j\omega t} \quad (\mu = \text{imag.}) \quad (16)$$

moeten zijn. Uit de configuratie vermoeden we dat $\bar{E}(x,y,z)$ periodiek is in z met periode l. Dit vermoeden zal juist zijn als (16) dan voldoet aan het theorema van Floquet.

Ter plaatse z_1 : $\bar{E}_1 = \bar{E}(x,y,z_1) e^{-\mu z_1} e^{j\omega t}$

Ter plaatse $z_1 + l$: $\bar{E}_2 = \bar{E}(x,y,z_1+l) e^{-\mu(z_1+l)} e^{j\omega t}$

Echter $\bar{E}(x,y,z_1) = \bar{E}(x,y,z_1+l)$

Daarom $\bar{E}_2 = \bar{E}_1 e^{-\mu l}$ en voldoet aan het theorema van Floquet.

Het veldverloop als functie van z zal in het algemeen niet sinusvormig zijn. Dit suggereert een Fourierontwikkeling van $\bar{E}(x,y,z)$

naar z:

$$\bar{E}(x,y,z) e^{-\mu z} = \sum_{\text{alle } n} \bar{E}_n(x,y) e^{-j(\frac{2\pi n}{l})z} e^{-\mu z}$$

of:

$$\bar{E}(x,y,z) e^{-\mu z} = \sum_{\text{alle } n} \bar{E}_n(x,y) e^{-(\mu + j\frac{2\pi n}{l})z} \quad (17)$$

Het golfverschijnsel in de periodieke structuur kan dus beschouwd worden als een superpositie van "ruimtelijke" harmonischen (Hartree harmonics), ieder met eigen fasesnelheid.

Gesteld

dan is: $\mu = jh_p$
 $h_p^{(n)} = h_p + \frac{2\pi n}{l} \quad (18)$

de voortplantingsconstante van de n^e ruimtelijke harmonische.

Om de sterkte \bar{E}_n te vinden van een Hartree harmonic vermenigvuldigen we (17) met $e^{j(\frac{2\pi m}{l})z + \mu z}$, zodat:

$$\bar{E}(x,y,z) e^{j(\frac{2\pi m}{l})z + \mu z} = \sum_{\text{alle } n} \bar{E}_n(x,y) e^{j(\frac{2\pi m}{l} - \frac{2\pi n}{l})z}$$

Integreer van z tot z + l:

$$\int_z^{z+l} \bar{E}(x,y,z) e^{j(\frac{2\pi m}{l})z + \mu z} dz = \sum_{\text{alle } n} \int_z^{z+l} \bar{E}_n(x,y) e^{j\frac{2\pi}{l}(m-n)z} dz$$

$\rightarrow 0 \quad (m \neq n)$

Dus:

$$\bar{E}_n(x,y) = \frac{1}{l} \int_z^{z+l} \bar{E}(x,y,z) e^{j(\frac{2\pi n}{l})z} dz \dots \dots \dots \quad (19)$$

V De gesloten periodieke golfgeleider als kettingschakeling van vierpolen.

In de rechthoekige golfpijp (fig. 9) heeft de dominerende mode, de H_{10} mode, de volgende veldcomponenten:

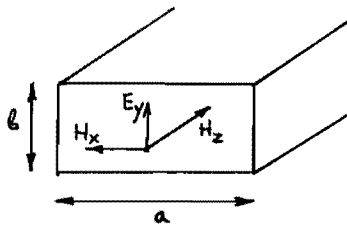


FIG. 9

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{jha}{\pi} A \sin \frac{\pi x}{a} e^{-jhz} & H_y &= 0 \\ E_y &= -\frac{j\omega\mu a}{\pi} A \sin \frac{\pi x}{a} e^{-jhz} & E_x &= 0 \\ H_z &= -A \cos \frac{\pi x}{a} e^{-jhz} \end{aligned} \right\} (20)$$

We definiëren nu een golfimpedantie

$$\xi = \frac{E_x}{H_y} = \frac{-E_y}{H_x} \quad (21)$$

Indien geen reflecties optreden geldt dus hier

$$\xi_0 = \frac{\omega\mu}{h}$$

In het algemene geval dat wel reflecties voorkomen, bijvoorbeeld ter plaatse $z = z_2$ (fig. 10) zal de golfimpedantie ξ ter plaatse $z = z_1$ zijn:

$$\xi_{z_1} = \frac{-E_y(z_2) \{ e^{-jh(z_1-z_2)} + \bar{R} e^{jh(z_1-z_2)} \}}{H_x(z_2) \{ e^{-jh(z_1-z_2)} - \bar{R} e^{jh(z_1-z_2)} \}}$$

waarin \bar{R} = reflectiecoëfficiënt (in het algemeen complex).

Het tekenverschil tussen de gereflekteerde $-E_y$ en de gereflekteerde H_x demonstreert het omkeren van de Poyntingvector.

Noemen we $z_2 - z_1 = l$, dan volgt:

$$\xi_{z_1} = \xi_0 \frac{e^{jhl} + \bar{R} e^{-jhl}}{e^{jhl} - \bar{R} e^{-jhl}} \quad (22)$$

voor $l = 0$:

$$\xi_{z_2} = \xi_0 \left(\frac{1 + \bar{R}}{1 - \bar{R}} \right) = \xi_L \quad \text{waaruit } \bar{R} = \frac{\xi_L - \xi_0}{\xi_L + \xi_0}$$

zodat:
$$\xi_{z_1} = \xi_0 \left(\frac{\xi_L + j\xi_0 \operatorname{tgh} l}{\xi_0 + j\xi_L \operatorname{tgh} l} \right) \quad (23)$$

Dit is de bekende transformatieformule voor de ingangsimpedantie van een lange transmissielijn, afgesloten met belasting ξ_L

We bekijken nu één cel van een rechthoekige golfgeleider met periodiek geplaatste schermen (fig. 11).

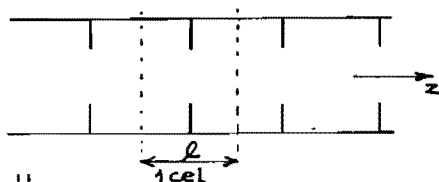


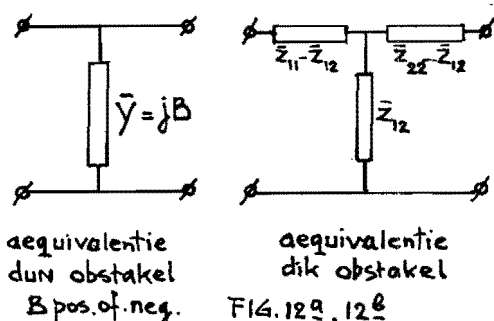
FIG. 11

In het navolgende maken we met betrekking tot de structuur van fig. 11 de volgende vóóronderstellingen:

- a. De frequentie is zodanig gekozen dat in de homogene golfpijp alleen de H_{10} mode zich zou kunnen voortplanten.
- b. De afstand l tussen de schermen is zo groot dat ter plaatse van een scherm aangestoten hogere modes bij de naastliggende schermen praktisch zijn uitgedempt.

Een cel van deze structuur kunnen we nu zien als een stuk lange leiding waarin halverwege een dwarsadmittantie is aangebracht (zie voor aequivalentie scherm \leftrightarrow dwarsadmittantie het college U.K.G. techniek van prof. Knol).

In het algemene geval van obstakels met niet meer te verwaarlozen dikte moet het aequivalent echter een T-netwerk zijn (fig. 12b). Het obstakel is dan gekarakteriseerd door drie para-

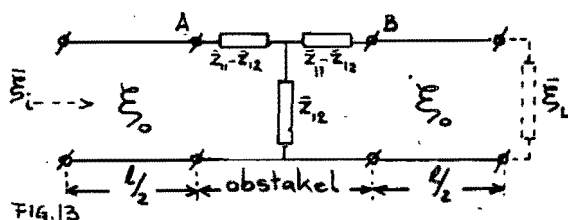


meters (\bar{z}_{11} , \bar{z}_{22} en \bar{z}_{12}).

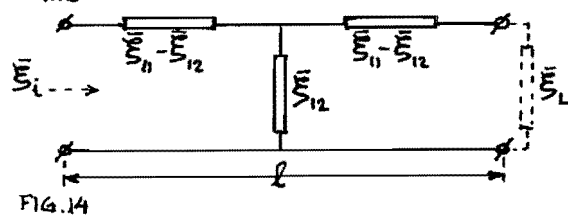
We ontwikkelen de theorie verder voor de periodieke structuur van fig. 11, echter met symmetrische dikke obstakels ($\bar{z}_{11} = \bar{z}_{22}$).

Het vervangingschema voor één cel wordt dan als in fig. 13. We trachten

nu dit schema te vervangen door een symmetrisch T-netwerk, gekenmerkt door $\bar{\xi}_{11}$ en $\bar{\xi}_{12}$, beiden functies van de obstakelparameters \bar{z}_{11} en \bar{z}_{12} . We vergelijken daartoe de ingangsimpedanties $\bar{\xi}_i$, bij af-



sluiting rechts met $\bar{\xi}_L$. Hebben we de parameters $\bar{\xi}_{11}$ en $\bar{\xi}_{12}$ van de aequivalente symmetrische vierpool gevonden, dan is de transformatie van de periodieke structuur tot ketting van elementaire vierpolen compleet.



Uit fig. 13:

$$\bar{\xi}_{Bi} = \frac{\bar{\xi}_L + j t \frac{h}{z}}{1 + j \bar{\xi}_L t \frac{h}{z}} = \frac{\bar{\xi}_L + j t}{1 + j \bar{\xi}_L t}$$

waarin $t = \tan \frac{h}{z}$ en $\bar{\xi}_{Bi}$ en $\bar{\xi}_L$ zijn genormeerd met betrekking tot $\bar{\xi}_0$.

Zo ook:

$$\bar{\xi}_{Ai} = \frac{\bar{z}_{11}^2 - \bar{z}_{12}^2 + \bar{z}_{11} \left\{ \frac{\bar{\xi}_L + j t}{1 + j \bar{\xi}_L t} \right\}}{\bar{z}_{11} + \left\{ \frac{\bar{\xi}_L + j t}{1 + j \bar{\xi}_L t} \right\}} = \frac{(\bar{z}_{11}^2 - \bar{z}_{12}^2)(1 + j \bar{\xi}_L t) + \bar{z}_{11}(\bar{\xi}_L + j t)}{\bar{z}_{11}(1 + j \bar{\xi}_L t) + (\bar{\xi}_L + j t)}$$

zodat:

$$\bar{\xi}_i = \frac{\bar{\xi}_{Ai} + j t}{1 + j \bar{\xi}_{Ai} t} = \frac{[(\bar{z}_{11}^2 - \bar{z}_{12}^2) + j \bar{z}_{11} t + j t \bar{z}_{11} t^2] + [(\bar{z}_{11}^2 - \bar{z}_{12}^2) j t + \bar{z}_{11} t^2 \bar{z}_{11} + j t] \bar{\xi}_L}{[\bar{z}_{11} + j t + j t (\bar{z}_{11}^2 - \bar{z}_{12}^2) - t^2 \bar{z}_{11}] + [j \bar{\xi}_L t + 1 - t^2 (\bar{z}_{11}^2 - \bar{z}_{12}^2) + j t \bar{z}_{11}] \bar{\xi}_L} \quad (24)$$

Voor fig. 14 geldt:

$$\bar{\Sigma}_i = \frac{\bar{\Sigma}_{11}^2 - \bar{\Sigma}_{12}^2 + \bar{\Sigma}_{11} \bar{\Sigma}_L}{\bar{\Sigma}_{11} + \bar{\Sigma}_L} \quad (25)$$

Vergelijking van (24) met (25) geeft:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma}_{11} &= \frac{(\bar{z}_{11}^2 - \bar{z}_{12}^2 + 1)jt + \bar{z}_{11}(1-t^2)}{1 + 2jt\bar{z}_{11} - (\bar{z}_{11}^2 - \bar{z}_{12}^2)t^2} \\ \bar{\Sigma}_{11}^2 - \bar{\Sigma}_{12}^2 &= \frac{(\bar{z}_{11}^2 - \bar{z}_{12}^2) + 2jt\bar{z}_{11}t - t^2}{1 + 2jt\bar{z}_{11} - (\bar{z}_{11}^2 - \bar{z}_{12}^2)t^2} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

waarmee $\bar{\Sigma}_{11}$ en $\bar{\Sigma}_{12}$ zijn bepaald.

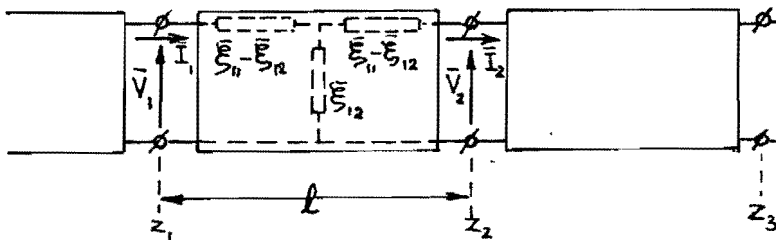


FIG. 15

Uit fig. 15 zien

we: $\bar{\Sigma}_{z_1} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} \quad (27)$

Bedenken we dat $\bar{\Sigma}_{z_1}$ genormeerd is m.b.t. $\bar{\Sigma}_0$ dan kunnen we na

vergelijking van (27) met (22) formeel schrijven:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_1 &= c_1 + b_1 \\ \bar{I}_1 &= c_1 - b_1 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &\text{waarin: } c_1 = \text{golf met voortplanting} \\ &\quad \text{in pos. z-richting} \\ &b_1 = \text{golf met voortplanting} \\ &\quad \text{in neg. z-richting} \end{aligned}$$

De golfverschijnselen als geheel door de structuur moeten voldoen aan het theorema van Floquet, dus er moeten oplossingen verschijnen van de vorm $\phi(z) e^{-jh_p z}$ met $\phi(z+l) = \phi(z)$

Dit houdt in dat met betrekking tot fig. 15 moet gelden:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_2 = c_2 + b_2 &= \phi(z_2+l) e^{-jh_p(z_2+l)} = \phi(z_2) e^{-jh_p z_2} e^{-jh_p l} = (c_1 + b_1) e^{-jh_p l} \\ \bar{I}_2 = c_2 - b_2 &= (c_1 - b_1) e^{-jh_p l} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Voor fig. 15 gelden nog de vierpoolvergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_1 &= \bar{\Sigma}_{11} \bar{I}_1 - \bar{\Sigma}_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 &= \bar{\Sigma}_{12} \bar{I}_1 - \bar{\Sigma}_{11} \bar{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

(28) in (29) gesubstitueerd geeft:

$$\left. \begin{aligned} (c_1 + b_1) &= (c_1 - b_1) \bar{\Sigma}_{11} - e^{-jh_p l} (c_1 - b_1) \bar{\Sigma}_{12} \\ e^{-jh_p l} (c_1 + b_1) &= (c_1 - b_1) \bar{\Sigma}_{12} - e^{-jh_p l} (c_1 - b_1) \bar{\Sigma}_{11} \end{aligned} \right\} \quad (\bar{\Sigma}_{nm} \text{ genormeerd m.b.t. } \bar{\Sigma}_0)$$

of:

$$\begin{aligned} 0 &= (\bar{\Sigma}_{11} - 1 - \bar{\Sigma}_{12} e^{-jh_p l}) c_1 + (\bar{\Sigma}_{12} e^{-jh_p l} - \bar{\Sigma}_{11} - 1) b_1 \\ 0 &= (\bar{\Sigma}_{12} - \bar{\Sigma}_{11} e^{-jh_p l} - e^{-jh_p l}) c_1 + (\bar{\Sigma}_{11} e^{-jh_p l} - \bar{\Sigma}_{12} - e^{-jh_p l}) b_1 \end{aligned}$$

Er zijn alleen oplossingen \neq nuloplossing voor c_1, b_1 , mogelijk als:

$$\det/\text{coeff. van } c_1, b_1 \neq 0$$

Waaruit volgt:

$$e^{-jh_p l} = \frac{\bar{\xi}_{11} \bar{\xi}_{12}}{\bar{\xi}_{11} \bar{\xi}_{12}} = \sqrt{\dots}$$

$$e^{+jh_p l} = \frac{\bar{\xi}_{11} \bar{\xi}_{12}}{\bar{\xi}_{11} \bar{\xi}_{12}} = \sqrt{\dots}$$

of:
$$2 \cosh h_p l = 2 \frac{\bar{\xi}_{11} \bar{\xi}_{12}}{\bar{\xi}_{11} \bar{\xi}_{12}} \rightarrow \cosh h_p l = \frac{\bar{\xi}_{11}}{\bar{\xi}_{12}} \quad (30)$$

De laatste stap is nu in (30) $\bar{\xi}_{11}$ en $\bar{\xi}_{12}$ uit te drukken in de parameters \bar{z}_{11} en \bar{z}_{12} van het obstakel en de voortplantingsconstante h van de uniforme golfgeleider.

Met behulp van (26) vinden we:

$$\frac{\bar{\xi}_{11}}{\bar{\xi}_{12}} = \frac{(\bar{z}_{11} - \bar{z}_{12} + 1) j \tanh \frac{hl}{2} + \bar{z}_{11} (1 - \tanh \frac{hl}{2})}{\bar{z}_{12} (1 + \tanh \frac{hl}{2})}$$

zodat we tenslotte vinden:

$$\cosh h_p l = \frac{\bar{z}_{11}}{\bar{z}_{12}} \cosh hl + j \left(\frac{\bar{z}_{11} - \bar{z}_{12} + 1}{2 \bar{z}_{12}} \right) \sinh hl \quad (31)$$

Deze vergelijking is van groot belang voor de bestudering van het gedrag van de structuur want omdat voor de H_{10} -mode geldt:

$$k^2 - h^2 = \frac{\pi^2}{a^2} \quad \text{met } k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

legt (31) verband tussen de structuurvoortplantingsconstante h_p en de frequentie, met \bar{z}_{11} en \bar{z}_{12} van de obstakels als parameter.

Kiezen we bijvoorbeeld een dun capacitief diafragma als periodiek obstakel (fig. 16) dan mogen we stellen $\bar{z}_{11} = \bar{z}_{12}$

$$\text{en } \bar{z}_{12} = \frac{1}{jB} \quad (B > 0)$$

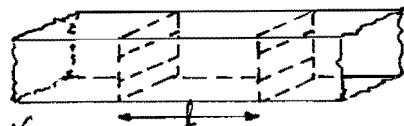


FIG. 16

zodat (31) reduceert tot:

$$\cosh h_p l = \cos hl - \frac{B}{2} \sin hl \quad (32)$$

Dit kan ook geschreven worden als:

$$\cos h_p l = \sqrt{1 + \frac{1}{4} B^2} \cos(hl + \varphi) \quad (33)$$

$$\text{met } \varphi = \text{arctg } \frac{B}{2}$$

De admittantie B is evenredig met h .

Het rechterlid van (33) uitgezet als functie van hl geeft fig. 17.

Golfvoortplanting is alleen mogelijk voor reële h_p , dus voor

$$-1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{4} B^2} \cos(hl + \varphi) \leq +1$$

Uit fig. 17 zien we dat er doorlaat- en spergebieden zijn.

(32), resp. (33) tesamen met de betrekking

$$k^2 - h^2 = \frac{\pi^2}{a^2} \quad (k = \omega \sqrt{\epsilon \mu})$$

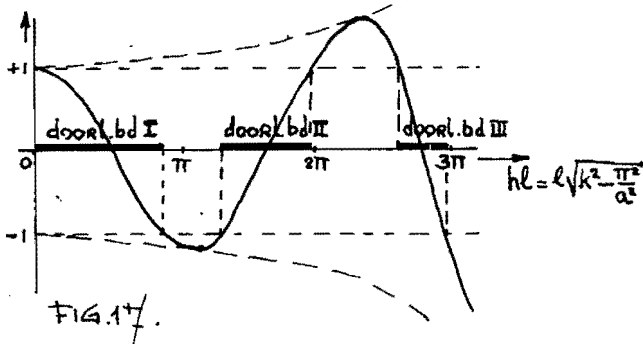


FIG. 17.

maakt het mogelijk een $kl-h_p$ -diagram te tekenen overeenkomstig

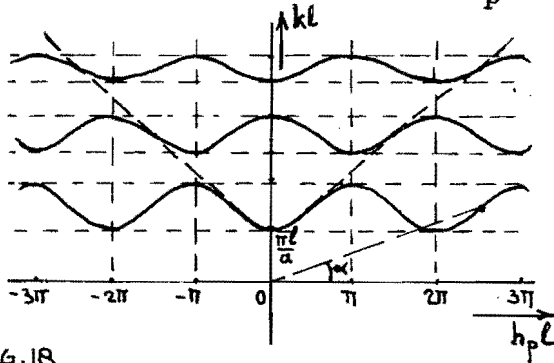


FIG. 18

fig. 5.

We zien hierin weer periodiciteit optreden (ruimtelijke harmonischen). Aan de grenzen van de doorlaatgebieden geldt namelijk:

$$\cos h_p \ell = \begin{cases} +1 \rightarrow h_p \ell = 2m\pi \\ -1 \rightarrow h_p \ell = \pi + 2n\pi \end{cases}$$

Uit fig. 17 zien we dat bij een grote waarde van B de doorlaatbanden smal worden. We merken ook op dat vooral de hogere ruimtelijke harmonischen van de laagste doorlaatbandeen lage fase-snelheid bezitten ($\text{tg} \alpha$, fig. 18).

De streepkromme in fig. 18 geeft het $k-h$ -verband weer voor de H_{10} -mode in de uniforme rechth. golfpijp volgens $kl = \sqrt{h^2 l^2 + \frac{\pi^2 l^2}{a^2}}$. De doorlaatbanden in fig. 18 die boven de grensfrequentie van de H_{20} -mode liggen zijn op grond van de aan deze theorie gekoppelde vóóronderstellingen niet zinvol meer.

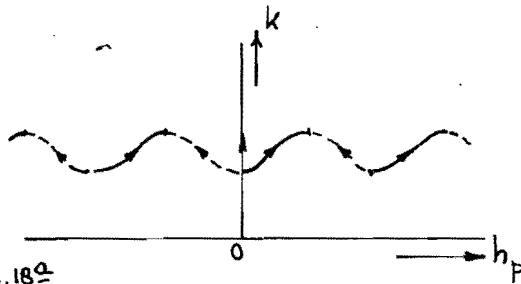


FIG. 18a

De wijze, waarop het $k-h_p$ diagram wordt doorlopen bij toenemende k is afhankelijk van de richting van de energiestroom in de structuur.

Onderstellen we de bron ter plaatse $z = -\infty$, dan zal de energiestroom in positieve z -richting zijn en daarmee ook de groepssnelheid $\frac{d\omega}{dh_p}$ positief zijn (zie appendix II). Daar de groepssnelheid evenredig is met de helling van de kromme in het $k-h_p$ diagram zullen bij toenemende k de met een getrokken lijn aangegeven gedeelten in pijlrichting worden doorlopen. De gestippelde gedeelten worden doorlopen bij onderstelling van een bron ter plaatse $z = +\infty$

VI Open periodieke structuren.

In het hiernavolgende zullen successievelijk de open structuren van fig. 1c en 1d worden bestudeerd door middel van veldanalyse. Het is de bedoeling weer te komen tot een $k-h_p$ diagram voor deze structuren, zodat beoordeling van het gedrag als golfgeleider en vergelijking met gesloten structuren mogelijk wordt.

A. Het onbegrensde geleidende vlak met gleuven.

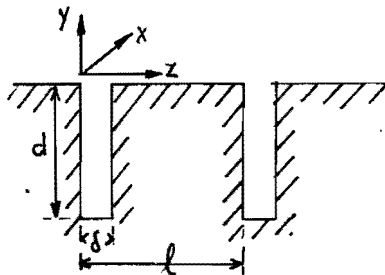


Fig. 19

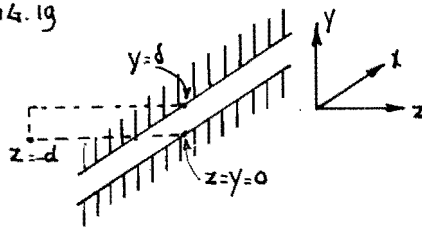


Fig. 20

We wensen oplossingen van de vergelijkingen van Maxwell zodanig dat:

I. voldaan wordt aan de randvoorwaarden t.p.v. het ideaal geleidende, gegleufde vlak.

II. alle veldcomponenten uitdempem bij toenemende $y > 0$.

III. voor $y > 0$ alleen in de z-richting reële energievoortplanting kan plaats vinden. (fig. 19)

De punten I, II en III samenvattend kunnen we het probleem ook als volgt formuleren: we onderzoeken de mogelijkheid van het optreden van oppervlaktegolven met veldcomponenten, die ter plaatse $y=0$, $ml < z < ml + d$ aansluiten op mogelijke veldconfiguraties in de gleuven. We onderzoeken eerst veldoplossingen voor de gleuven.

In fig. 20 is een gleuf in horizontale stand en met aangepast assenkruis getekend, zodat de overeenkomst van een gleuf met een ter plaatse $z = -d$ kortgesloten parallelle plaat-golfgeleider zichtbaar wordt. We onderzoeken nu de mogelijkheid van een veldconfiguratie met $E_z = H_z = 0$ in de gleuf, (dominerende mode, zal blijken).

$$\left. \begin{aligned} \text{Verg. van Maxwell: } \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega\epsilon\vec{E} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Nu te schrijven: } \nabla_t \times \vec{E}_t + \vec{a}_z \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} &= -j\omega\mu\vec{H}_t \\ \nabla_t \times \vec{H}_t + \vec{a}_z \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} &= j\omega\epsilon\vec{E}_t \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

waarbij $\left. \begin{matrix} \vec{E}_t \\ \vec{H}_t \end{matrix} \right\}$ veld in dwarsvlak.

Uit (35) zien we: $\nabla_t \times \bar{E}_t = 0$
 $\nabla_t \times \bar{H}_t = 0$ (36)

zodat: $\bar{a}_z \times \frac{\partial \bar{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu \bar{H}_t$
 $\bar{a}_z \times \frac{\partial \bar{H}_t}{\partial z} = j\omega\epsilon \bar{E}_t$ (37)

Uit (36) volgt: $\bar{E}_t = \nabla_t M(x,y,z)$
 $\bar{H}_t = \nabla_t N(x,y,z)$

We proberen oplossingen van de vorm

$\bar{E}_t = g_t(z) \nabla_t \phi(x,y)$ (38)

Uit (37) zien we $\bar{a}_z \times \frac{\partial^2 \bar{E}_t}{\partial z^2} = -j\omega\mu \frac{\partial \bar{H}_t}{\partial z}$
 zodat: $\bar{a}_z \times (\bar{a}_z \times \frac{\partial^2 \bar{E}_t}{\partial z^2}) = -j\omega\mu (\bar{a}_z \times \frac{\partial \bar{H}_t}{\partial z}) = k^2 \bar{E}_t$ ($k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$)
 dus: $\frac{\partial^2 \bar{E}_t}{\partial z^2} + k^2 \bar{E}_t = 0$
 Evenzo uit (37): $\frac{\partial^2 \bar{H}_t}{\partial z^2} + k^2 \bar{H}_t = 0$ } (39)

Met betrekking tot (38) kunnen we dus als algemene oplossing schrijven:

$\bar{E}_t = (A' \cos kz + B' \sin kz) \nabla_t \phi$
 $\bar{H}_t = (A'' \cos kz + B'' \sin kz) \nabla_t \psi$

We weten ook nog:

$\nabla \cdot \bar{E} = \nabla_t \cdot \bar{E}_t = 0$ } dus met (38): $\nabla_t^2 \phi(x,y) = 0$ (40a)

$\nabla \cdot \bar{H} = \nabla_t \cdot \bar{H}_t = 0$ } $\nabla_t^2 \psi(x,y) = 0$ (40b)

We onderstellen op grond van de configuratie dat het veld niet x-afhankelijk is, dus $\phi = \phi(y)$ en $\psi = \psi(y)$

Dan luidt dus (40a): $\frac{\partial^2 \phi(y)}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \phi = Cy + C'$

Bijgevolg: $E_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ (41)

en: $E_y = (A' \cos kz + B' \sin kz) \frac{\partial \phi}{\partial y} = C(A' \cos kz + B' \sin kz)$

Randvoorwaarde te plaatse $z = -d$: $(E_y)_{z=-d} = 0$

Dus: $CA' \cos kd - CB' \sin kd = 0 \rightarrow A'/B' = \tan kd$

Zodat: $E_y = CB' \left(\frac{A'}{B'} \cos kz + \sin kz \right) = \frac{CB'}{\cos kd} \sin k(z+d)$ (42)

Ter plaatse $z = 0$ stellen we $E_y = E_{sm}$ (index m duidt op gleuf met rangnummer m) zodat:

$CA' = E_{sm}$

of: $CB' \tan kd = E_{sm} \rightarrow CB' = \frac{E_{sm}}{\tan kd}$

Ingevuld ontstaat dan tenslotte:

$E_y = E_{sm} \frac{\sin k(z+d)}{\sin kd}$ (43)

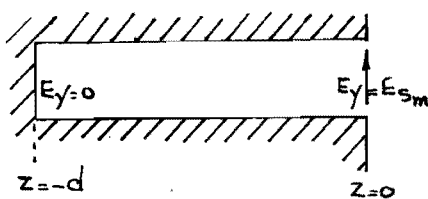


Fig. 21 m^e gleuf

Uit (37) volgt nu: $-j\omega\mu\bar{H}_t = \bar{a}_z \times \bar{a}_y (kE_{sm} \frac{\cos k(z+d)}{\sin kd})$

$$\text{of: } H_x = \frac{k}{j\omega\mu} E_{sm} \frac{\cos k(z+d)}{\sin kd} \quad (44)$$

De gevonden veldconfiguratie in de gleuven, nu weer betrokken op het assenstelsel van fig. 19:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_{sm} \frac{\sin k(y+d)}{\sin kd} \\ H_x &= j \frac{k}{\omega\mu} E_{sm} \frac{\cos k(y+d)}{\sin kd} \\ E_x = H_z = E_y = H_y &= 0 \end{aligned} \right\} (-d \leq y < 0) \quad (45)$$

is in feite het staande golfpatroon op basis van de fundamentele TEM-mode voor de parallelle plaatgolfgeleider.

We gaan nu aandacht besteden aan veldoplossingen in de halfruimte $y > 0$. Om aansluiting mogelijk te maken met het veld in de gleuven stellen we:

- a. Dat $E_z \neq 0$ en $H_z = 0$, dus optreden van TM-modes.
- b. Voortplanting in de z-richting.
- c. Geen x-afhankelijkheid in de veldcomponenten.

Indien oplossingen onder de voorwaarden a, b en c mogelijk zijn, zullen ze dus van de vorm:

$$V = \hat{V}(y,z) e^{-jh_p z} \quad \text{zijn.}$$

De argumentatie van hoofdstuk IV volgend zal $\hat{V}(y,z)$ weer periodi- citeit vertonen in de z-richting met periode 1. Fourierontwikke- ling van $\hat{V}(y,z)$ naar z (zie hoofdstuk IV-(17)) geeft:

$$\hat{V}(y,z) = \sum_{\text{alle } n} V_n(y) e^{-j \frac{2\pi n}{1} z}$$

en: $V = \sum_{\text{alle } n} V_n(y) e^{-j(h_p + \frac{2\pi n}{1})z} = \sum_{\text{alle } n} V_n(y) e^{-jh_p(n)z}$

Hierdoor zijn de veldcomponenten ontbonden in "ruimtelijke har- monischen", onder sanctie van het theorema van Floquet. We be- palen ons even alleen tot de komponent E_z , volgens bovenstaande van de gedaante $E_z = \hat{E}_z(y,z) e^{-jh_p z}$

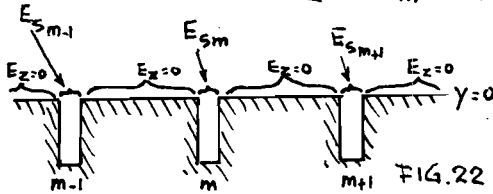
Voor $y = 0$ moet voor E_z gelden (zie (45)):

$$\begin{aligned} E_z &= 0 \quad \text{voor } ml + \delta < z < (m+1)l \\ E_z &= E_{sm} \quad \text{voor } ml < z < ml + \delta \end{aligned} \quad (46)$$

we nemen nu aan dat E_{sm} over de gleufopening konstant kan worden gedacht, hetgeen een goede benadering is zolang $\delta \ll l$.

We schrijven dus voor $ml < z < ml + \delta$:

$$E_z = E_{sm} = E_0 e^{-jh_p ml} \quad (E_0 = \text{constant}) \quad (47)$$



Dan wordt de Fourierontwikkeling naar z van de E_z -verdeling voor $y = 0$ (fig. 22):

$$E_z = \sum_{\text{alle } n} E_{nz} = \sum_{\text{alle } n} E_{n0} e^{-jh_p(n)z} = E_0 e^{-jh_p ml} \quad (ml < z < ml + \delta)$$

waarin $h_p(n) = h_p + \frac{2\pi n}{l}$

De coëfficiënt van de n^e ruimtelijke harmonische wordt dan

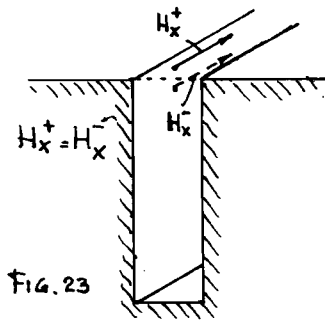
$$E_{n0} = \frac{1}{l} \int_{ml}^{ml+\delta} E_0 e^{-jh_p ml} e^{jh_p(n)z} dz$$

of:
$$E_{n0} = \frac{1}{l} E_0 e^{j(h_p(n) - h_p)ml} \frac{[e^{jh_p(n)\delta} - 1]}{jh_p(n)} = \frac{E_0}{l} \frac{e^{jh_p(n)\delta} - 1}{jh_p(n)} = \frac{\delta}{l} E_0 e^{jh_p(n)\frac{\delta}{2}} \left(\frac{\text{Sin } h_p(n)\frac{\delta}{2}}{h_p(n)\frac{\delta}{2}} \right) \quad (48)$$

zodat voor $y = 0$ de n^e ruimtelijke harmonische van E_z geschreven kan worden:

$$E_{nz} = E_{n0} e^{-jh_p(n)z} = \frac{\delta}{l} E_0 e^{jh_p(n)\frac{\delta}{2}} \left(\frac{\text{Sin } h_p(n)\frac{\delta}{2}}{h_p(n)\frac{\delta}{2}} \right) e^{-jh_p(n)z} \quad (49)$$

De continuïteit van E_z voor $y = 0$ aldus verzorgd hebbend, rest ons de continuïteit van H_x te eisen (fig. 23) voor $y = 0$.



Deze eis levert ons de informatie betreffende de structuurvoortplantingsconstante h_p in afhankelijkheid van de frequentie.

De ruimtelijke harmonischen in de halfruimte $y > 0$ moeten voldoen aan de vergelijkingen van Maxwell. Hoe zien deze

vergelijkingen eruit onder de voorwaarden a, b en c, gesteld aan het begin van deze beschouwing? Nu geldt:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_t \times \bar{E}_n + \bar{a}_z \times \frac{\partial \bar{E}_n}{\partial z} &= -j\omega\mu \bar{H}_{nt} \\ \nabla_t \times \bar{H}_{nt} + \bar{a}_z \times \frac{\partial \bar{H}_{nt}}{\partial z} &= j\omega\epsilon \bar{E}_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{index } t = \text{transversaal})$$

Scalaire vermenigvuldiging met \bar{a}_z geeft:

$$\begin{aligned} \bar{a}_z \cdot \nabla_t \times \bar{E}_n = 0 &\longrightarrow \frac{\partial E_{ny}}{\partial x} - \frac{\partial E_{nx}}{\partial y} = 0 \\ \bar{a}_z \cdot \nabla_t \times \bar{H}_{nt} = j\omega\epsilon E_{nz} &\longrightarrow \frac{\partial H_{ny}}{\partial x} - \frac{\partial H_{nx}}{\partial y} = j\omega\epsilon E_{nz} \end{aligned}$$

Geen x -afhankelijkheid dus:

$$\frac{\partial E_{nx}}{\partial y} = 0 \quad (50)$$

$$-\frac{\partial H_{nx}}{\partial y} = j\omega\epsilon E_{nz} \quad (51)$$

Uit $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ volgt $\nabla_t \cdot \vec{H}_{nt} = 0 \rightarrow \frac{\partial H_{ny}}{\partial y} = 0$ (52)

Uit $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ tenslotte: $\frac{\partial E_{ny}}{\partial y} = -\frac{\partial E_{nz}}{\partial z}$ (53)

(50) en (52) geven noodzakelijk:

$$E_{nx} = H_{ny} = 0 \quad (54)$$

Door middel van (51) en (53) zijn H_{nx} en E_{ny} uitgedrukt in E_{nz} voor $y > 0$.

E_{nz} , evenals de andere componenten, voldoet aan de golfvergelijking

$$\nabla_t^2 E_{nz} + (k^2 - h_p^2) E_{nz} = 0 \quad k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$$

Die nu de gedaante krijgt: (geen x-afh.heid)

$$\frac{\partial^2 E_{nz}}{\partial y^2} + (k^2 - h_p^2) E_{nz} = 0$$

of: $\frac{\partial^2 E_{nz}}{\partial y^2} - (h_p^2 - k^2) E_{nz} = 0$

Met als een oplossing:

Uit (51) volgt dan:

en uit (53):

$$\left. \begin{aligned} E_{nz} &= E_{n0} e^{-\sqrt{h_p^2 - k^2} y} e^{-j h_p z} \\ H_{nx} &= \frac{j \omega \epsilon}{\sqrt{h_p^2 - k^2}} E_{n0} e^{-\sqrt{h_p^2 - k^2} y} e^{-j h_p z} \\ E_{ny} &= -\frac{j h_p}{\sqrt{h_p^2 - k^2}} E_{n0} e^{-\sqrt{h_p^2 - k^2} y} e^{-j h_p z} \end{aligned} \right\} (y > 0) \quad (55)$$

Uit deze veldcomponenten zien we:

1e. Dat ze verdwijnen voor $y \rightarrow \infty$, mits $|h_p(n)| > k$

2e. Dat de Poyntingvector in de y-richting imaginair is, dus geen-energieverlies in de y-richting, mits $|h_p(n)| > k$

(55) bezit dus de kenmerken van een oppervlaktegolf mits $|h_p(n)| > k$.

In het k-h_p diagram is dus al een verboden gebied aan te wijzen

(fig. 24). De continuïteit van H_x eist nu:

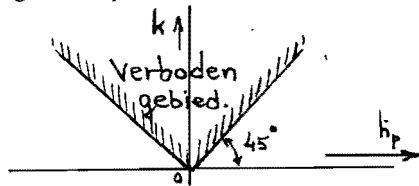


FIG. 24

$$H_{x, \text{golf}} = H_{x, \text{halfruimte}} \quad \text{voor } y = 0$$

Ingevuld uit (45) en (55) doet ontstaan:

$$\frac{j k}{\omega \mu} E_{n0} \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{k d} = \sum_n \frac{j \omega \epsilon}{\sqrt{h_p^2 - k^2}} E_{n0} e^{-j h_p z}$$

$$\frac{j k}{\omega \mu} E_{n0} e^{-j h_p m l} \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{k d} = \sum_n \frac{j \omega \epsilon}{\sqrt{h_p^2 - k^2}} \frac{\delta}{l} E_{n0} e^{j h_p \frac{m}{2} l} \left(\frac{\sin h_p \frac{\delta}{2}}{h_p \frac{\delta}{2}} \right) e^{-j h_p z}$$

Het is onmogelijk voor alle z binnen $ml < z < ml + \delta$ bovenstaande vergelijking in een gelijkheid te doen overgaan. Gedachtig $\delta \ll l$ eisen we slechts gelijkheid voor $z = ml + \frac{\delta}{2}$, waardoor ontstaat na vereenvoudiging:

$$\frac{1}{k d \sin \theta} = \sum_{\text{alle } n} \frac{\delta}{l} \frac{1}{\sqrt{h_p^2 - k^2}} \left(\frac{\sin h_p \frac{\delta}{2}}{h_p \frac{\delta}{2}} \right) e^{-j(h_p(n) - h_p) m l} = \sum_{\text{alle } n} \frac{\delta}{l d} \frac{1}{\sqrt{h_p^2 - k^2}} \left(\frac{\sin h_p \frac{\delta}{2}}{h_p \frac{\delta}{2}} \right)$$

De vorm
$$\frac{1}{k \operatorname{tg} kd} = \frac{\delta}{\ell} \sum_{\text{alle } n} \frac{1}{\sqrt{h_p^2 - k^2}} \left(\frac{\sin h_p \frac{\delta}{2}}{h_p \frac{\delta}{2}} \right) \quad (56)$$

is nu de gezochte betrekking tussen de frequentie en de structuurvoortplantingsconstante h_p . We moeten evenwel bedenken, dat (56) is gevonden onder twee vereenvoudigende aannamen nl.:

1e. In de gleuven is alleen het optreden van de fundamentele TEM-mode ondersteld.

2e. Het is voldoende geacht de aanpassing van de veldcomponenten te beperken tot de punten $y = 0, z = m\ell + \frac{\delta}{2}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Zolang echter $\delta \ll \ell$ is en de gleuven voldoende diep zijn is dit een goede benadering en is (56) representatief voor het gedrag van de structuur.

Het rechterlid van (56) is een periodieke functie van h_p met periode $\frac{2\pi}{\ell}$. Schrijven we nl. (56) als:

$$\frac{1}{k \operatorname{tg} kd} = \frac{\delta}{\ell} \sum_n R_n = \frac{\delta}{\ell} \left[\dots + R_{n-1} + R_n + R_{n+1} + R_{n+2} + \dots \right]$$

en maken in (56) de substitutie $h_p(n) \rightarrow h_p(n+1) = h_p(n) + \frac{2\pi}{\ell}$

dan zien we dat

$$R_{n-1} \rightarrow R_n$$

$$R_n \rightarrow R_{n+1}$$

$$R_{n+1} \rightarrow R_{n+2}$$

enz.

en dezelfde reeks $\sum_n R_n$ ontstaat weer rechts. De consequentie hiervan is dat in het $k-h_p$ diagram ook periodiciteit met periode $\frac{2\pi}{\ell}$ optreedt zodat het verboden gebied van fig. 24, nu volledig, eruit ziet als in fig. 25 getekend. Voor een meer exacte bepaling

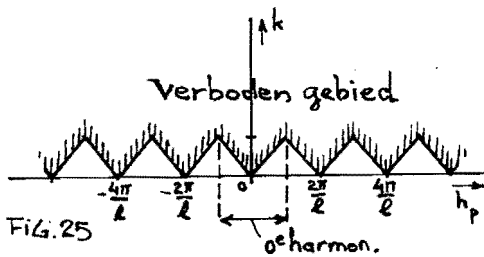


FIG. 25

van het verboden gebied van fig. 25, gebaseerd op de eis dat voor alle n $|h_p(n)| > k$ moet zijn, zie appendix III. Wegens deze periodiciteit is het voldoende het verband $k-h_p$ te bepalen in

het gebied van de 0^e ruimtelijke harmonische.

Stellen we $h_p \approx k$ dan mogen we in (56) de reeks vervangen door de term voor $n = 0$ omdat wegens $\sqrt{h_p^2 - k^2}$ in de noemer deze 0^e term sterk domineert.

Zo ontstaat:
$$\frac{1}{k \operatorname{tg} kd} = \frac{\delta}{\ell} \frac{1}{\sqrt{h_p^2 - k^2}} \left(\frac{\sin h_p \frac{\delta}{2}}{h_p \frac{\delta}{2}} \right) \approx \frac{\delta}{\ell} \frac{1}{\sqrt{h_p^2 - k^2}} \left(\frac{\sin k \frac{\delta}{2}}{k \frac{\delta}{2}} \right)$$

of:

$$\sqrt{h_p^2 - k^2} = \frac{\delta}{\ell} k \operatorname{tg} kd \left(\frac{\sin k \frac{\delta}{2}}{k \frac{\delta}{2}} \right)$$

De factor $\frac{\sin k \frac{\delta}{2}}{k \frac{\delta}{2}} \approx 1$, immers (zie fig. 25):

$$1 > \frac{\sin k \frac{\delta}{2}}{k \frac{\delta}{2}} > \frac{\sin \frac{\pi \delta}{2l}}{\frac{\pi \delta}{2l}} \approx 1 \quad \text{want } \frac{\delta}{l} \ll 1$$

Dus: $\sqrt{h_p^2 - k^2} \approx \frac{\delta}{l} k \operatorname{tg} kd$ ----- (57)

Wegens de eis $|h_p| > k$ zal er geen oplossing van (57) zijn voor $\operatorname{tg} kd < 0$, dus voor $m\pi - \frac{\pi}{2} < kd < m\pi$ ($k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$)

Dit zijn dan de sperbanden.

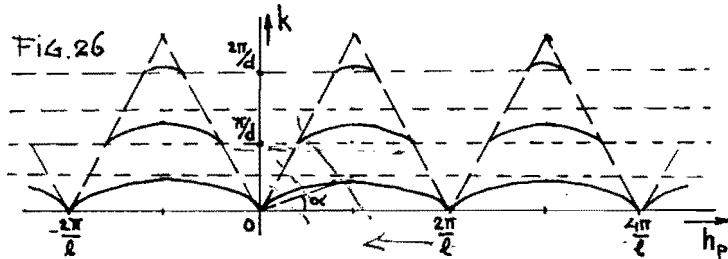
De doorlaatbanden beginnen dus voor $kd = m\pi$

Verg. (57) verder uitgewerkt geeft:

$$h_p^2 - k^2 = \frac{\delta^2}{l^2} k^2 \operatorname{tg}^2 kd$$

of: $h_p = \pm k \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{l^2} \operatorname{tg}^2 kd}$ (58)

Verg. (58), tesamen met de gevonden gegevens over de plaats van doorlaat- en sperbanden stelt ons in staat het $k-h_p$ verband te tekenen en dit periodiek voort te zetten. Zie fig. 26.



Het optreden van verboden gebieden is kenmerkend voor open structuren. Uit fig. 26 zien we dat lage fasesnelheden ($\operatorname{tg} \alpha$) voor de 0^e ruimtelijke harmonische bereikt worden door de gleufdiepte d voldoende groot en/of de gleufafstand l klein te kiezen.

B. De Helix.

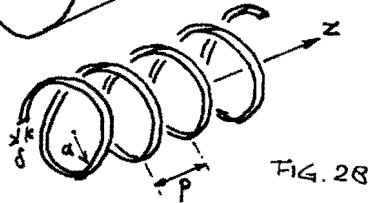
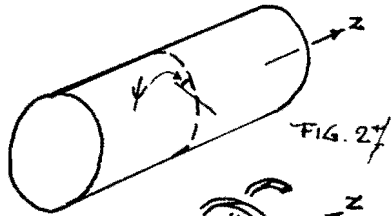
Bij de bespreking van het gedrag van de helix zullen in de eerste plaats de methode van aanpak en de interpretatie van de resultaten aandacht krijgen.

Na een algemene veldentheoretische beschouwing zal, zonder de algebraïsche details in extenso weer te geven, de weg naar de gedragsbepalende $k-h_p$ betrekking worden aangeduid.

Om tot een oplossing te komen van het helixprobleem zijn modellen bedacht, waarvan de voornaamste

- a. de cirkelvormige cylinder met een slechts in één richting geleidende wand (de zgn. sheath-helix) fig. 27.
- b. de helix, gevormd uit een ideaal geleidende strip zonder radiële dikte (de tape helix) fig. 28.

Als het aantal windingen per golflengte groot is, is model a representatief, ofschoon een bezwaar is



dat dit model geen periodieke structuur is waardoor bepaalde eigenschappen van de helix in dit model niet tot uiting komen.

Model b is een zeer goede benadering van de werkelijkheid. Sensiper heeft hiervan in 1951 een grondige analyse

gegeven in zijn dissertatie. Beide modellen bekijken we nader.

1. Het sheath-helix-model.

Wegens de bijzondere randvoorwaarden aan het cylinderoppervlak, namelijk perfecte geleiding in ψ richting (fig. 27) en geen geleiding in alle andere richtingen, zal het veld, in- en uitwendig een lineaire combinatie zijn van TE- en TM-modes (E_z , resp. $H_z = 0$), uitdrukbaar in resp. elektrische- en magnetische Herzvectoren $\bar{\Pi}$ en $\bar{\Pi}^*$

We schrijven dan:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \nabla \times \nabla \times \bar{\Pi} - j\omega \nabla \times \bar{\Pi}^* \\ \bar{H} &= j\omega \epsilon \nabla \times \bar{\Pi} + \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \bar{\Pi}^* \end{aligned}$$

(zie coll. dictaat III^b & IV, blz. 86, prof. v. Trier)

waarin:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= \bar{a}_z \Pi_z \\ \bar{\Pi}^* &= \bar{a}_z \Pi_z^* \end{aligned}$$

De veldcomponenten worden dan in cylindercoördinaten:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\partial \Pi_z}{\partial z \partial r} - j\omega \frac{\partial \Pi_z^*}{\partial \theta} & (59^a) & \quad H_r = \frac{j\omega \epsilon}{r} \frac{\partial \Pi_z}{\partial \theta} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial z \partial r} & (59^d) \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z \partial \theta} + j\omega \frac{\partial \Pi_z^*}{\partial r} & (59^b) & \quad H_\theta = -j\omega \epsilon \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} + \frac{1}{\mu r} \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial z \partial \theta} & (59^e) \\ E_z &= \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z & (59^c) & \quad H_z = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial z^2} + \frac{k^2}{\mu} \Pi_z^* & (59^f) \end{aligned} \quad (59)$$

en Π_z resp. Π_z^* voldoen aan de vergelijking:

$$\nabla^2 \Pi_z^{(*)} + k^2 \Pi_z^{(*)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_z^{(*)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi_z^{(*)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z^{(*)}}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z^{(*)} = 0 \quad (k^2 = \omega^2 \epsilon \mu) \quad (60)$$

Vergelijking (60) geeft na separatie exponentiële z - en θ - afhankelijkheid:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_z \\ \Pi_z^* \end{aligned} \right\} = f(r) e^{-jh_r z} \cdot e^{-j\theta}$$

waarbij $f(r)$ een oplossing is van:

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) - [(h_p^2 - k^2)r^2 + n^2] f = 0 \quad (61)$$

We zijn weer geïnteresseerd in oppervlaktegolven, waarbij dus

$$\xi^2 = h_p^2 - k^2 > 0 \quad \text{moet zijn (zie hoofdst. VI-A, verg. (55) e.v.)}$$

De lineair onafhankelijke oplossingen van (61) zijn de zgn. gemodificeerde Besselfuncties

$$I_n(\xi r) \quad \text{en} \quad K_n(\xi r)$$

$K_n(r)$ blijft niet eindig voor $r = 0$, maar $K_n(r) \rightarrow 0$ voor $r \rightarrow \infty$

$I_n(r)$ blijft eindig voor $r = 0$, maar $I_n(r) \rightarrow \infty$ voor $r \rightarrow \infty$

De enige fysisch mogelijke oplossing van (61) is dus

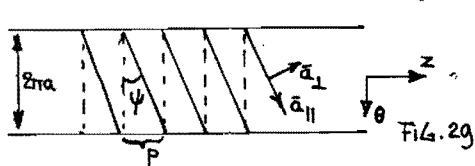
$$\begin{aligned} I_n(\xi r) & \text{ voor } 0 \leq r < a \\ K_n(\xi r) & \text{ voor } a < r < \infty \end{aligned}$$

De basisoplossingen zijn dus van de gedaante:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_z^i &= A_n^i I_n(\xi r) e^{j h_p z} e^{-j n \theta} \\ \Pi_z^e &= A_n^e K_n(\xi r) e^{-j h_p z} e^{-j n \theta} \\ \Pi_z^{*i} &= B_n^i I_n(\xi r) e^{-j h_p z} e^{-j n \theta} \\ \Pi_z^{*e} &= B_n^e K_n(\xi r) e^{-j h_p z} e^{-j n \theta} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

In fig. 29 is een uitslag van de anisotrope wand geschetst.

\bar{a}_\parallel is de eenheidsvector in de richting van perfecte geleiding. Men kan zich de uitslag voorstellen als een vlak, schuin aaneengesloten belegd met zeer dunne, onderling geïsoleerde, volmaakt geleidende draden. De spoed is p . We zien uit deze figuur:



$$\begin{aligned} \bar{a}_r \times \bar{a}_\parallel &= \bar{a}_\perp \quad (a) \\ \bar{a}_\parallel &= \bar{a}_z \sin \psi + \bar{a}_\theta \cos \psi \quad (b) \\ \bar{a}_\perp &= \bar{a}_z \cos \psi - \bar{a}_\theta \sin \psi \quad (c) \end{aligned} \quad (63)$$

Voor $r = a$ gelden nu de volgende randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} E_\parallel^i &= E_\parallel^e = 0 \quad (a) \\ E_\perp^i &= E_\perp^e \quad (b) \\ H_\parallel^i &= H_\parallel^e \quad (c) \end{aligned} \quad (64)$$

(63^b) en (63^c) met (64) tesamen geven als randvoorwaarde voor de veldcomponenten:

$$\begin{aligned} E_z^i &= E_z^e \quad (a) \\ E_\theta^i &= E_\theta^e \quad (b) \\ E_z^{i,e} &= -E_\theta^{i,e} \cot \psi \quad (c) \\ H_z^i + H_\theta^i \cot \psi &= H_z^e + H_\theta^e \cot \psi \quad (d) \end{aligned} \quad (65)$$

(65) met (59^{b,c,e,f}) en (62) geeft:

uit (65^a): $A_n^i I_n - A_n^e K_n = 0$

uit (65^b): $-\frac{h_p n}{a} A_n^i I_n + \frac{h_p n}{a} A_n^e K_n + j\omega \xi B_n^i I_n' - j\omega \xi B_n^e K_n' = 0$

uit (65^c): $(\xi^2 + \frac{h_p n}{a} \cot \psi) A_n^i I_n - j\omega \xi \cot \psi B_n^i I_n' = 0$

uit (65^d): $-j\omega \xi \cot \psi A_n^i I_n' + j\omega \xi \cot \psi A_n^e K_n' - \frac{1}{\mu} (\xi^2 + \frac{h_p n}{a} \cot \psi) B_n^i I_n + \frac{1}{\mu} (\xi^2 + \frac{h_p n}{a} \cot \psi) B_n^e K_n = 0$

Een oplossing voor de A_n^i en B_n^i uit deze vier vergelijkingen is alleen mogelijk als de coëff. determinant = 0 gesteld wordt. Dit geeft de betrekking tussen h_p en k .

Na een aanzienlijke hoeveelheid algebra vinden we de volgende gedaante voor $f(k, h_p) = 0$:

$$\frac{I_n'(\xi a) K_n'(\xi a)}{I_n(\xi a) K_n(\xi a)} + \frac{(\xi^2 + nh_p a \cot \psi)^2}{k^2 a^2 \xi^2 \cot^2 \psi} = 0 \quad \xi^2 = h_p^2 - k^2 \quad (66)$$

we willen betrekking (66) in het k - h_p diagram uitzetten met n als parameter. Tengevolge van de eis $h_p^2 - k^2 > 0$ is er weer een verboden gebied in het k - h_p diagram (fig. 30).

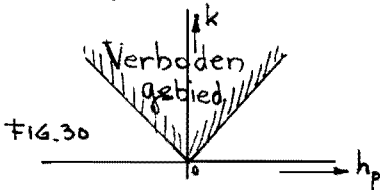


Fig. 30

Voor $n = 0$ wordt (66):

$$\frac{I_0'(\xi a) K_0'(\xi a)}{-\xi^2 a^2 I_0(\xi a) K_0(\xi a)} = \frac{1}{k^2 a^2 \cot^2 \psi}$$

We onderstellen $\cot \psi \gg 1$ en $|h_p| \gg k$,

of $\xi^2 \approx h_p^2$, dus niet in de buurt van de verboden zônegrens.

Dan kunnen we voor $n = 0$ schrijven:

$$-\frac{I_0'(\xi a) K_0'(\xi a)}{\xi^2 a^2 I_0(\xi a) K_0(\xi a)} \approx \frac{1}{h_p^2 a^2} \approx \frac{1}{k^2 a^2 \cot^2 \psi} \Rightarrow h_p \approx \pm k \cot \psi$$

omdat voor ξa groot:

$$I_0(\xi a) \approx I_0'(\xi a) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi \xi a}} e^{\xi a}$$

$$K_0(\xi a) \approx -K_0'(\xi a) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\xi a}} e^{-\xi a}$$

Voor $n \geq 1$ geldt bij benadering:

$$-\frac{(\xi^2 a^2 - nh_p a \cot \psi)^2}{k^2 a^2 \xi^2 \cot^2 \psi} = \frac{I_n'(\xi a) K_n'(\xi a)}{I_n(\xi a) K_n(\xi a)} \approx -\frac{n^2 + \xi^2 a^2}{\xi^2 a^2}$$

of: $\xi^2 a^2 [(\xi^2 a^2 - nh_p a \cot \psi)^2 - (n^2 + \xi^2 a^2) k^2 a^2 \cot^2 \psi] = 0$ waaruit: $\xi^2 = 0 \Rightarrow h_p = \pm k$
 en, met de onderstellingen $\xi^2 \approx h_p^2$ en $\xi^2 a^2 \gg n^2$ voor lage n :

$$(h_p^2 a^2 - nh_p a \cot \psi)^2 - h_p^2 a^2 k^2 a^2 \cot^2 \psi = 0 \quad \text{waaruit } h_p a = (\pm ka + n) \cot \psi$$

we vinden dus als benaderde oplossingen van (66):

$$\begin{cases} h_p = \pm k \\ h_p a = (\pm ka + n) \cot \psi \end{cases} \quad \text{voor alle } n \quad (67)$$

Fig. 31 geeft het exacte $k-h_p$ diagram. In de buurt van de verboden

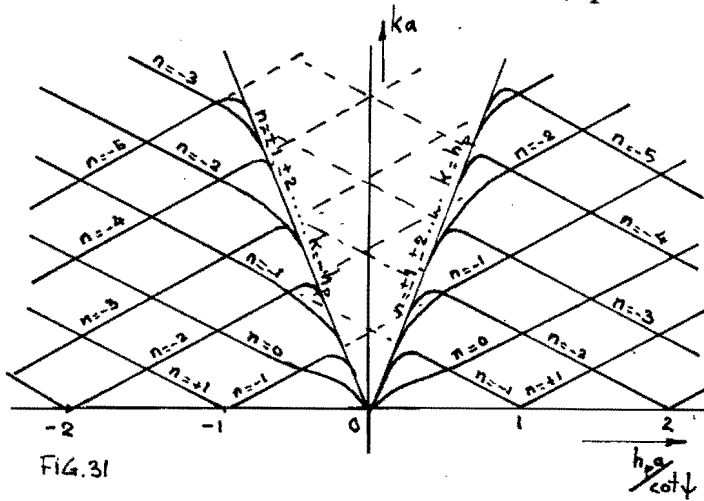


FIG.31

zône treden afwijkingen op van de benaderde uitdrukkingen (67) zoals te verwachten was. We zien dat fase- en groepssnelheid voor de $n = 0$ -mode nagenoeg constant is. Bij de behandeling van de tape helix zal dit ook naar voren komen. De frequentie-onafhankelijkheid van v_f en v_g voor $n = 0$ is een

zeer belangrijke eigenschap van de helix.

2. Het tape helix-model.

Dit model, waarvan de uitslag in fig. 32 is getekend, geeft een zeer goed beeld van het gedrag van de werkelijke helix.

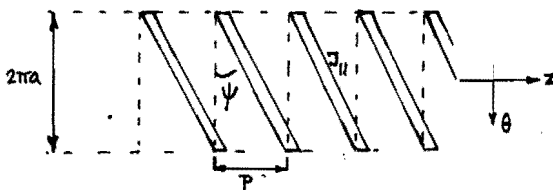


FIG.32

Door de met dit model geïntroduceerde periodiciteit zullen de veldcomponenten weer ontbonden kunnen worden in ruimtelijke harmonischen met voort-

plantingsconstante van de gedaante

$$h_p(n) = h_p + \frac{2\pi n}{P} \quad (p = \text{spoed, zie fig.32})$$

De Herzpotentialen (62) krijgen in dit geval dan de gedaante:

$$\begin{aligned} \Pi_z^{i,e} &= e^{-jh_p z} \sum_{m,n} A_{m,n}^{i,e} \frac{I_m(\xi_n r)}{K_m(\xi_n r)} e^{jm\theta} e^{-jn \frac{2\pi}{P} z} \quad (r < a) \\ &= e^{-jh_p z} \sum_{m,n} B_{m,n}^{i,e} \frac{I_m(\xi_n r)}{K_m(\xi_n r)} e^{jm\theta} e^{-jn \frac{2\pi}{P} z} \quad (r > a) \end{aligned} \quad (\xi_n^2 = h_p^2(n) - k^2)$$

Deze uitdrukkingen kunnen nog vereenvoudigd worden dank zij een symmetrie-eis waaraan moet worden voldaan. Een axiale verschuiving plus een passende rotatie moet namelijk de helix in zichzelf doen overgaan, dus stel een translatie $z = z' + z_p$ vervolgens een rotatie $\theta = \theta' + \frac{2\pi z_p}{P}$, (68)

dan moet op grond van het theorema van Floquet de oplossing als functie van ϕ' en z' van dezelfde vorm zijn als die uitgedrukt in ϕ en z , voor alle z_p .

Substitutie van (68) geeft:

$$\Pi_z^{i,e} = e^{-jh_p z'} e^{-jh_p z_p} \sum_{m,n} A_{m,n}^{i,e} \frac{I_m(\xi_n r)}{K_m(\xi_n r)} e^{-j(n-m) \frac{2\pi}{P} z_p} e^{jm\theta'} e^{-jn \frac{2\pi}{P} z'} \quad (r < a)$$

$$\Pi_z^{i,e} = e^{-jh_p z'} e^{-jh_p z_p} \sum_{m,n} A_{m,n}^{i,e} \frac{I_m(\xi_n r)}{K_m(\xi_n r)} e^{-j(n-m) \frac{2\pi}{P} z_p} e^{jm\theta'} e^{-jn \frac{2\pi}{P} z'} \quad (r > a)$$

en overeenkomstig voor $\Pi_z^{*i.e}$

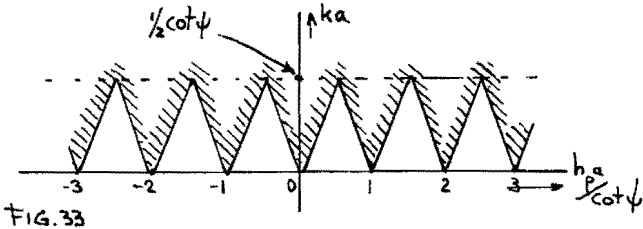
We zien hieruit dat bovengenoemde eis alleen vervuld is voor $m = n$.
Zodat we kunnen schrijven:

$$\begin{aligned} \Pi_z^{i.e} &= e^{-j h_p z} \sum_n A_n^{i.e} \frac{I_n(\xi_n r)}{K_n(\xi_n a)} e^{j n \theta} e^{-j \frac{2\pi n}{p} z} & (r < a) \\ &= e^{-j h_p z} \sum_n B_n^{i.e} \frac{I_n(\xi_n r)}{K_n(\xi_n a)} e^{j n \theta} e^{-j \frac{2\pi n}{p} z} & (r > a) \end{aligned} \quad (69)$$

Omdat geen reële energieuitstraling in radiële richting mag optreden (oppervlaktegolven, zie hfdst. VI-A (55)) geldt hier, als bij het geleidende vlak met gleuven, de eis:

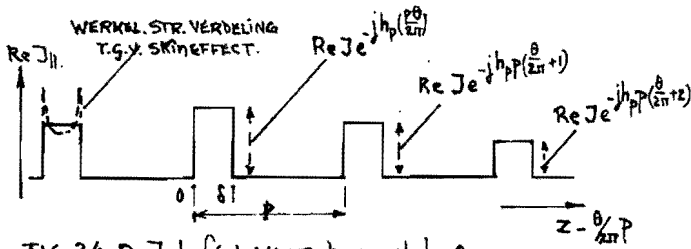
$$|h_p(n)| > k \quad \text{voor alle } n.$$

Hieruit volgt weer het verboden gebied in het $k-h_p$ diagram (zie appendix III). De vorm van dit gebied (fig. 33) komt overeen met dat van het geleidende vlak met periodieke gleuven.



De nodige randvoorwaarden voor $r = a$ zijn:

$$\left. \begin{aligned} E_z^i &= E_z^e \\ E_\theta^i &= E_\theta^e \end{aligned} \right\} \quad (70)$$



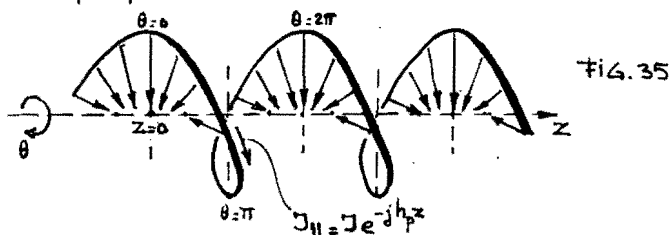
$$\left. \begin{aligned} H_z^i - H_z^e &= J_\theta = J_{||} \cos \psi \\ H_\theta^e - H_\theta^i &= J_z = J_{||} \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Voor (71) ter plaatse van de tape.

Voor de verdere analyse voeren

we de volgende benaderingen in:

- a. De stroomdichtheidsvector \vec{J}_{tape} is overal in de tape evenwijdig met de tape-begrenzing, dus $\vec{J}_{\text{tape}} = \vec{J}_{||}$. In de tape onderstellen we $|\vec{J}_{||}|$ constant. Het stroomdichtheidsverloop ter plaatse $r = a$ is dan als in fig. 34. Voor smalle tape ($\delta \ll p$) is deze benadering goed te noemen. De fase van de in de tape-breedte constante $|\vec{J}_{||}|$ wordt uitgedrukt door de factor $e^{-j h_p z}$ (fig. 34,35).



b. We eisen het verdwijnen van het tangentiële elektrische veld ter plaatse van de tape slechts voor het midden van de tape. Ook dit is weer een goede benadering mits $\delta \ll p$.

Met inachtneming van a en b verloopt de weg naar de gezochte $k-h_p$ betrekking als volgt, in drie stappen verdeeld:

i. We ontwikkelen de stroomverdeling voor $r = a$ (fig. 34) in een Fourierreeks naar z :

$$J_{||} = \sum_n i_{||n} e^{-jh_p(n)z} e^{jn\theta} = e^{-jh_p z} \sum_n i_{||n} e^{-jn(\frac{2\pi}{p}z - \theta)} \begin{cases} J e^{-jh_p(\frac{\delta}{2\pi p})} (\frac{\theta p}{2\pi} + \delta) > z > \frac{\theta p}{2\pi} \\ = 0 \text{ voor de andere } z\text{-} \\ \text{waarden binnen de} \\ \text{periode } p \end{cases} \quad (72)$$

We vinden op dezelfde wijze als in hoofdstuk VI-A:

$$i_{||n} = \frac{\delta}{p} J e^{+jh_p(n)\frac{\delta}{2}} \left(\frac{\sinh h_p(n)\frac{\delta}{2}}{h_p(n)\frac{\delta}{2}} \right) \quad (73)$$

ii. Door substitutie van (69) in (59) vinden we $E_{z,\theta}$ en $H_{z,\theta}$ ontwikkeld in ruimtelijke harmonischen:

$$E_{z,\theta}^{ie} = \sum_n E_{z,\theta,n}^{ie} \quad H_{z,\theta}^{ie} = \sum_n H_{z,\theta,n}^{ie}$$

Gebruik makend van (72) en (71) kunnen we nu de veldcomponentharmonischen $E_{z,\theta,n}$ en $H_{z,\theta,n}$ uitdrukken in de stroomharmonische $i_{||n}$. Na een zeer omvangrijke hoeveelheid algebra vinden we

$$E_{||n} = E_{zn} \sin \psi + E_{\theta n} \cos \psi$$

$$E_{||n(r=a)} = j \frac{e^{-jh_p(n)z} \sin^2 \psi}{\omega \epsilon a} e^{+jn\theta} \left\{ [\epsilon_n^2 a^2 - 2nh_p(n)a \cot \psi + n^2 h_p(n)^2 a^2 \frac{\cot^2 \psi}{\epsilon_n^2 a^2}] I_n(\epsilon_n a) K_n(\epsilon_n a) + k a^2 \cot^2 \psi I_n'(\epsilon_n a) K_n'(\epsilon_n a) \right\} i_{||n} \quad (74)$$

iii. we stellen $E_{||} = 0$ ter plaatse van het midden van de tape, dus voor $r = a$, $z = \frac{p\theta}{2\pi} + \frac{\delta}{2} + mp$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

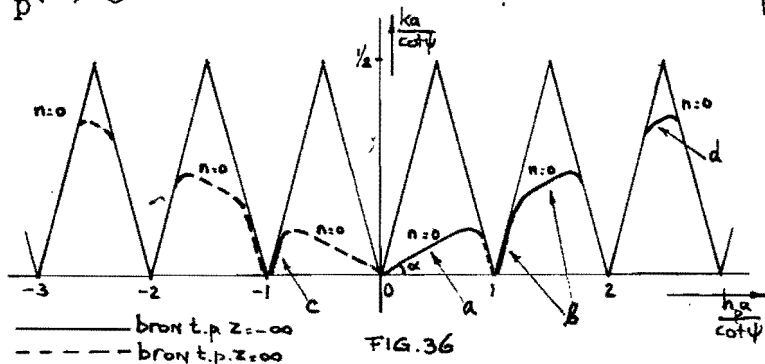
Met gebruikmaking van (73) en (74) ontstaat dan:

$$E_{||} = \sum E_{||n} = j \frac{e^{-jh_p z} J \sin^2 \psi}{\omega \epsilon a} \sum_n \left\{ [\epsilon_n^2 a^2 - 2nh_p(n)a \cot \psi + n^2 h_p(n)^2 a^2 \frac{\cot^2 \psi}{\epsilon_n^2 a^2}] \right. \\ \left. I_n(\epsilon_n a) K_n(\epsilon_n a) + k a^2 \cot^2 \psi I_n'(\epsilon_n a) K_n'(\epsilon_n a) \right\} \left(\frac{\sinh h_p(n)\frac{\delta}{2}}{h_p(n)\frac{\delta}{2}} \right) = 0$$

De factor voor het sommeringsteken kan niet nul zijn, dus:

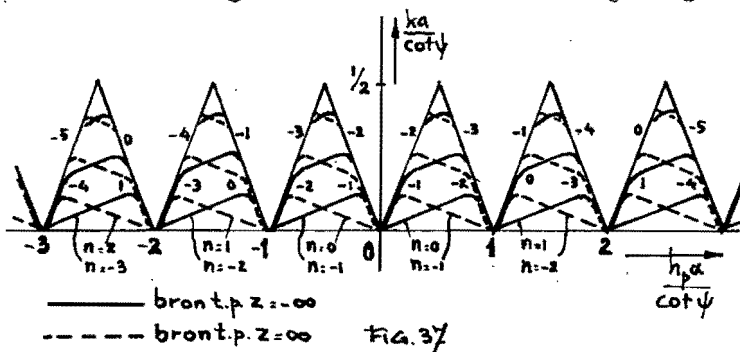
$$\sum_n \left\{ \left[\epsilon_n^2 a^2 - 2nh_p(n)a \cot \psi + n^2 h_p(n)^2 \frac{\cot^2 \psi}{\epsilon_n^2 a^2} \right] I_n(\epsilon_n a) K_n(\epsilon_n a) + k_a^2 \cot^2 \psi I_n'(\epsilon_n a) K_n'(\epsilon_n a) \right\} \left(\frac{\sinh_p(n) \frac{d}{2}}{h_p(n) \frac{d}{2}} \right) = 0 \quad (75)$$

is de gezochte betrekking tussen k en h_p voor de tape-helix. Beperken we de reeks in (75) tot slechts de 0^e term dan verschijnt weer de $k-h_p$ betrekking voor het sheath-helix-model voor $n = 0$. De betrekking tussen k en h_p voor $n = 0$ uit de volledige betrekking (75) is niet eenvoudig te bepalen. Daartoe moeten we alle $h_p(n)$ schrijven als $h_p(n) = h_p + \frac{2\pi n}{P}$ en de voorkomende Besselfuncties geschikt benaderen (zie sheath-helix-model), zodat sommering over alle n mogelijk wordt. Voor het bepalen van de betrekking tussen k en $h_p(m)$, dus voor $n = m \neq 0$ geldt hetzelfde met dien verstande dat dan in (75) alle $h_p(n)$ geschreven dienen te worden als: $h_p(n) = h_p(m) + \frac{2\pi(n-m)}{P}$



In fig. 36 is $k=f(h_p)$ voor $n = 0$ getekend, terwijl fig. 37 het $k-h_p$ diagram volledig laat zien. Afgezien van de periodiciteit van het verboden gebied, ver-

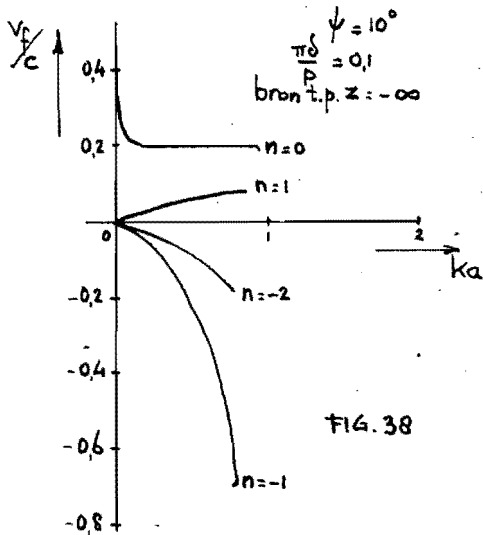
toont het diagram in eerste oogopslag veel overeenkomst met dat van het sheath-helix-model. Er zijn echter enige merkwaardige verschillen. Uit fig. 36 zien we dat bij lage frequentie de 0^e ruimtelijke



harmonische is samengesteld uit 3 modes (a, b en c), waarvan a echter dominerend is. Voor hogere frequenties verdwijnen de modes a en c en is de 0^e harmonische alleen vertegenwoordigd door mode b,

totdat ook deze verdwijnt. De 0^e harmonische keert bij toenemende frequentie nog eenmaal terug in een zeer smalle frequentieband

(mode d, fig. 36). Dit gedrag geldt voor alle ruimtelijke harmonische. De dominerende mode a bij lage frequenties is technisch het belangrijkste. In fig. 38 is de fasesnelheid van deze dominerende mode voor de 0^e , 1^e , -1^e en -2^e ruimtelijke harmonische als functie van de frequentie uitgezet.



Voor $n = 0$ blijkt de dominant een nagenoeg constante fasesnelheid te bezitten, ook uit fig. 36 te zien ($\text{tg } \alpha$). Nu geldt: (zie ook betrekking (67), sheath-helix)

$$\frac{v_f}{c} = \text{tg } \alpha = \frac{k}{h_p} \approx \text{tg } \psi = \frac{P}{2\pi a}$$

terwijl $v_f \approx v_g$

We zien hieruit dat naast de belangrijke eigenschap van de frequentie-onafhankelijkheid van v_f van de dominant voor $n = 0$, een tweede technisch be-

langrijk feit optreedt namelijk dat verlaging van de fasesnelheid van de dominant voor $n = 0$ direkt kan worden bereikt door verkleining van de spoed p van de helix.

Uit fig. 38 zien we nog, dat de dominanten voor $n = -1$ en $n = -2$ een negatieve fasesnelheid bezitten, terwijl de groepsnelheid v_g positief is (bron op $z = -\infty$). Dit zijn dan zgn. backwardwaves, van belang in de backwardwaveoscillators.

Appendix I

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} &= \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z'} \right) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z'} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z'} \right) \frac{\partial z}{\partial z'} + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z'} \right) \frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z'} \right) \frac{\partial z}{\partial z'} \quad (A)
 \end{aligned}$$

Nu is:

$$W = z + jy = F(z' + jy')$$

of:

$$dW = F'(u)(dz' + jdy')$$

$$dz + jdy = F'(u)(dz' + jdy') = (\operatorname{Re} F'(u) dz' - \operatorname{Im} F'(u) dy') + j(\operatorname{Im} F'(u) dz' + \operatorname{Re} F'(u) dy')$$

Zodat:
$$\left. \begin{aligned} dz &= \operatorname{Re} F'(u) dz' - \operatorname{Im} F'(u) dy' \\ dy &= \operatorname{Im} F'(u) dz' + \operatorname{Re} F'(u) dy' \end{aligned} \right\} (B)$$

$$dz^2 + dy^2 = [(\operatorname{Re} F'(u))^2 + (\operatorname{Im} F'(u))^2](dz'^2 + dy'^2)$$

$$dz^2 + dy^2 = \left| \frac{dW}{dU} \right|^2 (dz'^2 + dy'^2) \quad \text{q.e.d.}$$

Uit (B) volgt ook:

$$\frac{\partial z}{\partial z'} = \operatorname{Re} F'(u) \quad \frac{\partial z}{\partial y'} = -\operatorname{Im} F'(u)$$

$$\frac{\partial y}{\partial z'} = \operatorname{Im} F'(u) \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = \operatorname{Re} F'(u)$$

Gesubstitueerd in (A) geeft:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} (\operatorname{Re} F'(u))^2 - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \operatorname{Im} F'(u) \operatorname{Re} F'(u) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} (\operatorname{Im} F'(u))^2 + \\
 &\quad + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} (\operatorname{Im} F'(u))^2 + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \operatorname{Im} F'(u) \operatorname{Re} F'(u) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} (\operatorname{Re} F'(u))^2
 \end{aligned}$$

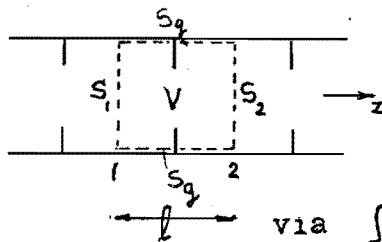
of:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} = [(\operatorname{Re} F'(u))^2 + (\operatorname{Im} F'(u))^2] \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = \left| \frac{dW}{dU} \right|^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)$$

q.e.d.

Appendix II.

We beschouwen één cel van de periodieke structuur. Het volume V



van de cel wordt begrensd door

$$S = S_1 + S_2 + S_g$$

V is bronvrij, dus $\int_S \bar{E} \times \bar{H}^* \cdot d\bar{S} = 0$ (A)

(\bar{H}^* = toegev. complexe van \bar{H}).

$$\text{via } \int_S \bar{E} \times (\nabla \times \bar{E}^*) \cdot d\bar{S} = \int_V \nabla \cdot [\bar{E} \times (\nabla \times \bar{E}^*)] \cdot dV = 0$$

kan na differentiatie naar ω en gebruikmaking van

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}^* = \omega^2 \epsilon \mu \bar{E}^*$$

(A) in de vorm

$$2 \operatorname{Re} \left\{ \int_S \frac{\partial \bar{E}}{\partial \omega} \times (\nabla \times \bar{E}^*) \cdot d\bar{S} \right\} - 2 \omega \epsilon \mu \int_V \bar{E} \cdot \bar{E}^* \cdot dV = 0 \quad (B)$$

worden gebracht. Volgens Floquet geldt: $\bar{E}_2 = \bar{E}_1 e^{-j h_p l}$

$$\text{resp.: } \bar{E}_2^* = \bar{E}_1^* e^{j h_p l}$$

Dit ingevoerd in (B) geeft met gebruikmaking van $\nabla \times \bar{E}^* = j \omega \mu \bar{H}^*$

tenslotte

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{S_2} \bar{E} \times \bar{H}^* \cdot d\bar{S}_2 \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{l} \frac{d\omega}{dh_p} \int_V \epsilon \bar{E} \cdot \bar{E}^* \cdot dV$$

waaruit we zien dat de richting van de energiestroom is gekoppeld aan het teken van de groepssnelheid $\left(\frac{d\omega}{dh_p} \right)^*$

Appendix III

De eis is $|h_p(n)a| > ka$ (voor alle n geheel)

$$\text{of: } |h_p a + \frac{2\pi n}{l} a| > ka$$

Onderstel h_p positief en n negatief, dan moet $|h_p a - \frac{2\pi |n|}{l} a| > ka$

$$a) \quad h_p a > \frac{2\pi |n|}{l} a \quad \text{dan is de eis: } h_p a > ka + \frac{2\pi |n|}{l} a \quad (1)$$

$$b) \quad h_p a < \frac{2\pi |n|}{l} a \quad \text{dan moet: } -h_p a > ka - \frac{2\pi |n|}{l} a$$

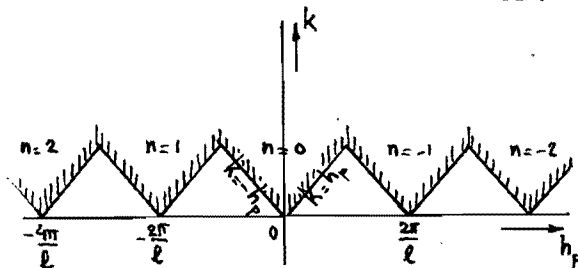
$$\text{of: } h_p a < \frac{2\pi |n|}{l} a - ka \quad (2)$$

(1) en (2) tesamen bepalen het verboden gebied (zie fig.).

Voor de tape helix geldt:

$$l = p \text{ (spped)}$$

$$\text{en: } \frac{2\pi a}{p} = \cot \psi$$



)^{*} Zie verder D.A. Watkins. Topics in E.M.-theory blz. 10 e.v.

Literatuur.

1. L. Brillouin. Wave Propagation in Periodic Structures.
Dover Publications 1953.
2. S. Flügge. Handbuch der Physik. Band XVI blz. 377 e.v.
Springer Verlag Berlin 1958
3. R.E. Collin. Field Theory of Guided Waves.
Mac. Graw-Hill Cy 1960
4. D.A. Watkins. Topics in Electromagnetic Theory. Hfdst. I & II.
J. Wiley & Sons, New York 1958
5. S. Sensiper. Electromagnetic Wave Propagation in Helical
Structures.
Proceedings I.R.E. Febr. 1955, blz. 149