Over het bepalen van de hoofdrekken met behulp van een rekstrookrozet

Over het bepalen van de hoofdrekken met behulp van een rekstrookrozet.

#

① Beschouw een punt O van het vrije oppervlak van een constructie; beschouw een kleine omgeving van O op dit oppervlak. De constructie wordt belast; het materiaal in de omgeving van O vervormt.

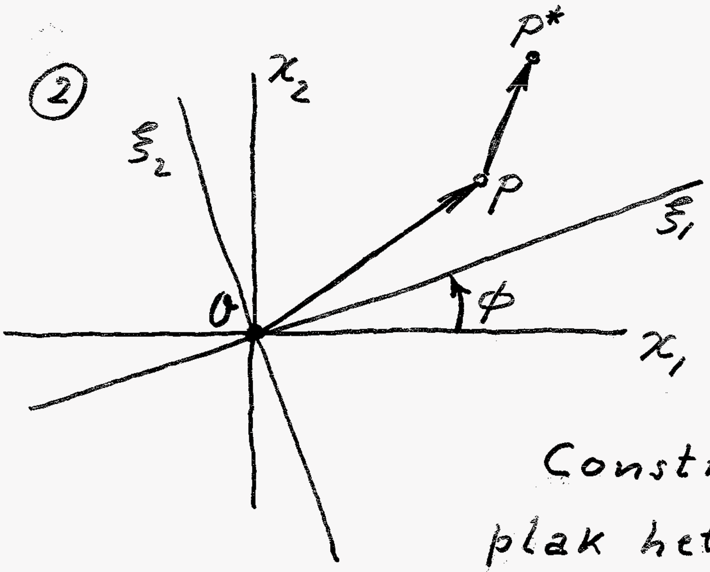
Vraag en opdracht:

Hoe is de rektoestand in O te beschrijven? leg de rektoestand vast met behulp van gegevens uit rekstrookrozet-metingen.

Uitgangspunt: De lezer heeft elementair begrip van „rekken", „rekstrookrozetten", „matrices".

Hypothesen: Continuiteitsmechanica, rekgrootheden klein, twee-dimensionaal probleem.

②



(x_1, x_2) } vast
(ξ_1, ξ_2) } assenkruis.

Constructie onbelast: plak het rozet met centrum in O.

Punt P van het materiaal (onbelaste toestand) verplaatst t.g.v. de belasting naar P*.

<u>Representaties</u>:

Plaats P
$$\begin{cases} \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \text{t.o.v. } x_1, x_2 \text{ basis} \\ \underline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} & \text{t.o.v. } \xi_1, \xi_2 \text{ basis} \end{cases}$$

verplaatsing van $P \rightarrow P^*$
$$\begin{cases} \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} & \text{t.o.v. } x_1, x_2 \text{ basis} \\ \underline{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} & \text{t.o.v. } \xi_1, \xi_2 \text{ basis} \end{cases}$$

Het verplaatsingsveld kan nu gekarakteriseerd worden door:

$\underline{u} = \underline{u}(\underline{x})$ of $\underline{\eta} = \underline{\eta}(\underline{\xi})$

Let op!: de coördinaten $\underline{x}$ en $\underline{\xi}$ worden gereserveerd voor de „plaatscoördinaten in onvervormde toestand" (<u>Lagrange-coördinaten</u>). Lagrange-coördinaten geven dus niet direct de „ware" plaats van een punt, het is alleen een naamkaartje bij het punt. Bij de z.g.n. „kleine verplaatsingen" worden de lagrange coordinaten vaak gebruikt voor de „ware plaatsbepaling".

Voor de in 1 genoemde „omgeving van O" en „rektoestand in O" moet voor O gelezen worden: het punt met lagrange coordinaten $(0,0)$.

(3) In een kleine omgeving van O (dwz. punt met lagrange coördinaten 0,0) kan het verplaatsingsveld worden benaderd door de eerste termen van een Taylor-ontwikkeling.

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + A\,\underline{x} \qquad \text{met} \quad A = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{bmatrix}$$

De plaatsvectoren $\underline{x}$ en $\underline{\xi}$ van P zijn als volgt gekoppeld.

$$\underline{x} = T\,\underline{\xi} \qquad \text{met} \quad T = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \overset{t}{T} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Voor de verplaatsingsvectoren $\underline{u}$ en $\underline{\eta}$ van $P \rightarrow P^*$ geldt

$$\underline{u} = T\,\underline{\eta} \quad \longleftrightarrow \quad \underline{\eta} = T^{-1}\underline{u}$$

De relatie $\underline{u} = \underline{u}_0 + A\underline{x}$ kan worden getransformeerd tot

$$T^{-1}\underline{u} = T^{-1}\underline{u}_0 + T^{-1}A\,\underline{x}$$

$$\boxed{\underline{\eta} = \underline{\eta}_0 + T^{-1}A\,T\,\underline{\xi}}$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{10} \\ \eta_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \qquad \text{met} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = T^{-1}AT$$

(4) Matrix A splitsen in een symmetrisch- en antimetrisch deel.

$$A = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \frac{u_{1,2}+u_{2,1}}{2} \\ \frac{u_{2,1}+u_{1,2}}{2} & u_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{u_{1,2}-u_{2,1}}{2} \\ \frac{u_{2,1}-u_{1,2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Definities:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = u_{1,1} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{u_{1,2}+u_{2,1}}{2} \\ \varepsilon_{22} = u_{2,2} \\ \omega = \frac{u_{1,2}-u_{2,1}}{2} \end{cases} \quad ; \quad E = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = E + \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenschap: $T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

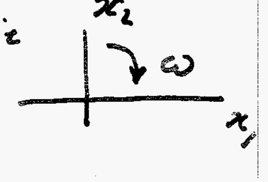
Hieruit:

$$\underline{\eta} = \underline{\eta}_0 + (T^{-1} E T)\underline{\xi} + \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underline{\xi}$$

Nu wordt de volgende <u>beperking</u> aangenomen: $\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1 \qquad i,j = 1,2,3$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j}$$

$$\underline{\eta} = \underbrace{\underline{\eta}_0}_{\text{translatie}} + \underbrace{(T^{-1} E T)\underline{\xi}}_{\substack{\text{kleine} \\ \text{deformatie} \\ \text{beschrijft} \\ \text{de rektoestand}}} + \underbrace{\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underline{\xi}}_{\substack{\text{kleine} \\ \text{rotatie}}}$$



(5) Definitie: $\boxed{\varepsilon_\phi = \dfrac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1}}$

(rek in ϕ richting in punt O)
Bewezen kan worden dat ε_ϕ gemeten kan worden met een voldoend klein rekstrookje met centrum in O en orientatie in de ϕ richting.

$$T^{-1} E T =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}\cos\phi + \varepsilon_{12}\sin\phi & -\varepsilon_{11}\sin\phi + \varepsilon_{12}\cos\phi \\ \varepsilon_{21}\cos\phi + \varepsilon_{22}\sin\phi & -\varepsilon_{21}\sin\phi + \varepsilon_{22}\cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\varepsilon_\phi = \varepsilon_{11}\cos^2\phi + \varepsilon_{12}\sin 2\phi + \varepsilon_{22}\sin^2\phi} \qquad \mathrm{I}$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2}\cos 2\phi + \varepsilon_{12}\sin 2\phi$$

$$\varepsilon_{\substack{max \\ min}} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{12}^2}$$

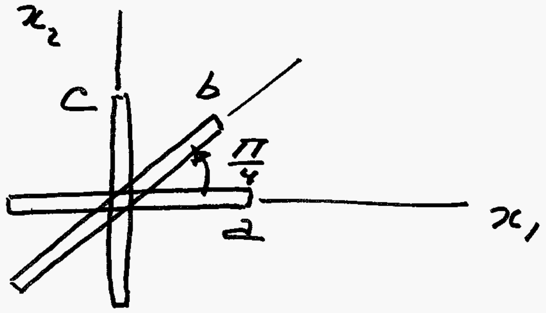
(hoofdrekken)

<u>Richting</u> hoofdrekken uit $\dfrac{d\varepsilon_\phi}{d\phi} = 0 \longrightarrow$

$$\tan 2\phi = \frac{2\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}$$

$$\boxed{\phi_p = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}} \quad \text{en} \quad \phi_p + \frac{\pi}{2}} \qquad \mathrm{II}$$

⑥ Het bepalen van richting, teken en grootte van de hoofdrekken met behulp van een speciaal rozet.



Drie rekstrookjes a, b en c

Gemeten wordt ε_a, ε_b, ε_c

Met behulp van I:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{11}$$
$$\varepsilon_b = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \varepsilon_{12}$$
$$\varepsilon_c = \varepsilon_{22}$$

Hieruit:

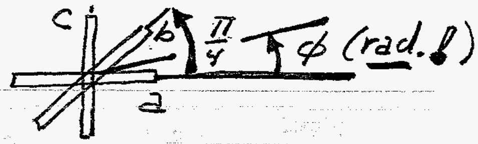
$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_a \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_b - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_b) \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_c \end{cases}$$

Nu ϕ_p en $\phi_p + \frac{\pi}{2}$ berekenen met II. Vervolgens deze waarden substitu-eren in I $\Longrightarrow$ ε_{ϕ_p} en $\varepsilon_{\phi_p + \frac{\pi}{2}}$. Numerieke waarden geven aan welke maximum en welke minimum is.

⑦ Hierna volgt een rekenprogramma in machinetaal voor een kleine tafelrekenautomaat (Hewlett-Packard Calculator 9100B). Programma's in diverse talen zijn in programmabibliotheken beschikbaar.

—〃—

Hoofdrekken uit rosetmeting :



	Key	
0	clear	Enter
	stop	$\boxed{\varepsilon_c \quad \varepsilon_b \quad \varepsilon_a}$
	print	
	print	
	x→( )	
	c	
	roll↑	
	x→( )	
	a	
	+	
	x⇄y	
	roll↑	ε_b $\varepsilon_a+\varepsilon_c$
	↑	
	+	$2\varepsilon_b$
1	↓	
	x⇄y	
	—	
	2	
	÷	
	y→( )	
	b	
	b	
	+	
	a	
	↑	
	c	
	—	
	↓	
2	÷	
	↓	
	arc	
	tan	
	↑	
	2	
	÷	
	y→( )	ϕ_p
	d	
	↓	
	cos	
	↑	
	x	
	a	

	Key	
3	x	
	d	
	sin	
	↑	
	x	
	c	
	x	
	↓	
	+	
	d	
	sin	
	↑	
	d	
	cos	
4	x	
	b	
	x	
	2	
	x	
	↓	
	+	
	y→( )	ε_{ϕ_p}
	e	
	d	
	↑	
	π	
	↑	
	2	
5	÷	
	↓	
	+	
	y→( )	$\phi_p+\frac{\pi}{2}$
	f	
	↓	
	cos	
	↑	
	x	
	a	
	x	
	f	
	sin	
	↑	

	Key	
6	x	
	c	
	x	
	↓	
	+	
	f	
	sin	
	↑	
	f	
	cos	
	x	
	b	
	x	
	2	
7	x	
	↓	
	+	$\varepsilon_{\phi_p+\frac{\pi}{2}}$
	e	
	↑	
	d	ϕ_p ε_{ϕ_p} $\varepsilon_{\phi_p+\frac{\pi}{2}}$
	print	
	print	
	print	
	end	

Nov. '71
W.L. Esmeijer

Storage

$\phi_p+\frac{\pi}{2}$

ε_{ϕ_p}

ϕ_p

$\varepsilon_c = \varepsilon_{22}$

$\varepsilon_{12} = \varepsilon_b - \frac{1}{2}(\varepsilon_a+\varepsilon_c)$

$\varepsilon_a = \varepsilon_{11}$