

Over het bepalen van de hoofdreken met behulp van een rekstrookrozet

Citation for published version (APA):

Esmeijer, W. L. (1972). *Over het bepalen van de hoofdreken met behulp van een rekstrookrozet*. (DCT rapporten; Vol. 1972.016). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1972

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Over het bepalen van de hoofdrekken
met behulp van een rekstrookrozet.
==

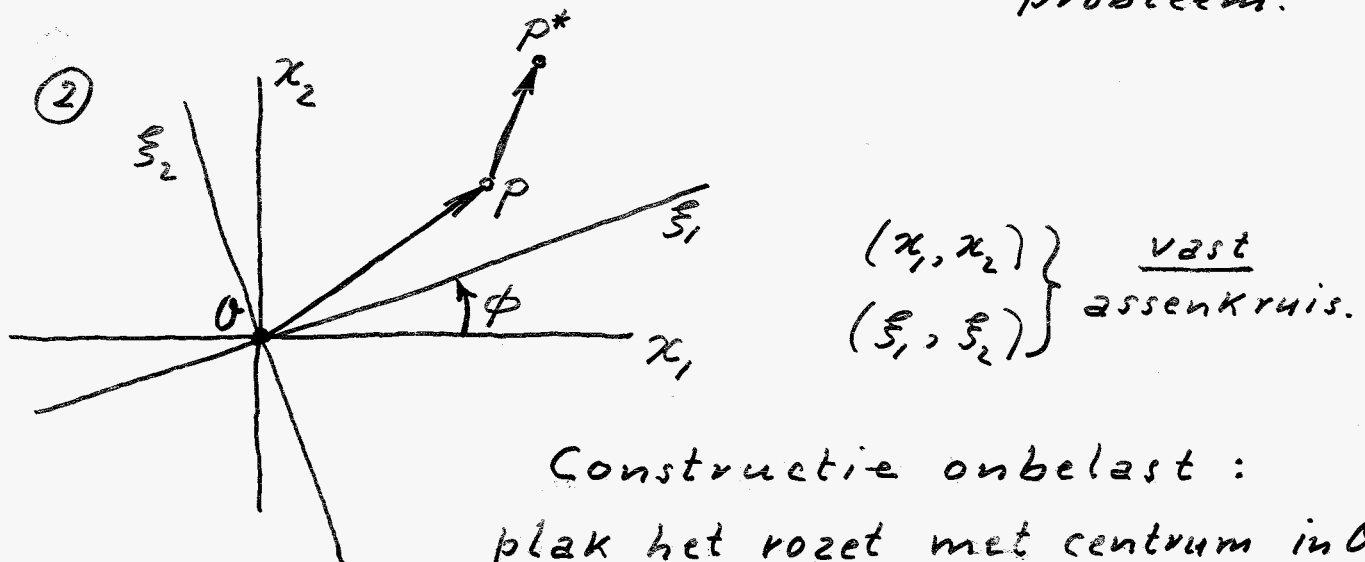
- ① Beschouw een punt O van het vrije oppervlak van een constructie; beschouw een kleine omgeving van O op dit oppervlak. De constructie wordt belast; het materiaal in de omgeving van O vervormt.

Vraag en opdracht:

Hoe is de rektoestand in O te beschrijven?
Leg de rektoestand vast met behulp van gegevens uit rekstrookrozet-metingen.

Uitgangspunt: De lezer heeft elementair begrip van „rekken“, „rekstrookrozetten“, „matrices“.

Hypothesen: Continuïteitsmechanica, rekgrootheden klein, twee-dimensionaal probleem.



Constructie onbelast:
plak het rozet met centrum in O .
Punt P van het materiaal (onbelaste toestand)
verplaatst t.g.v. de belasting naar P^* .

Representaties :

$$\begin{array}{l}
 \text{Plaats} \\
 \mathcal{P}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{t.o.v. } x_1, x_2 \text{ basis} \\
 \underline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{t.o.v. } \xi_1, \xi_2 \text{ basis}
 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 \text{verplaatsing} \\
 \text{van} \\
 \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^*
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{t.o.v. } x_1, x_2 \text{ basis} \\
 \underline{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \quad \text{t.o.v. } \xi_1, \xi_2 \text{ basis}
 \end{array} \right.$$

Het verplaatsingsveld kan nu gekarakteriseerd worden door :

$$\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}) \quad \text{of} \quad \underline{\gamma} = \underline{\gamma}(\underline{\xi})$$

Let op! : de coördinaten \underline{x} en $\underline{\xi}$ worden gereserveerd voor de „plaatscoördinaten in onvervormde toestand“ (Lagrange-coördinaten). Lagrange-coördinaten geven dus niet direct de „ware“ plaats van een punt, het is alleen een naamkaartje bij het punt. Bij de z.g.v. „Kleine verplaatsingen“ worden de Lagrange coördinaten vaak gebruikt voor de „ware plaatsbepaling“.

Voor de in ⑦ genoemde „omgeving van \mathcal{O} “ en „rektoestand in \mathcal{O} “ moet voor \mathcal{O} gelezen worden: het punt met Lagrange coördinaten $(0,0)$.

- ③ In een kleine omgeving van O (dwz. punt met Lagrange coördinaten q_0) kan het verplaatsingsveld worden benaderd door de eerste termen van een Taylor-ontwikkeling.

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + A \underline{x} \quad \text{met} \quad A = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{bmatrix}$$

De plaatsvectoren \underline{x} en $\underline{\xi}$ van P zijn als volgt gekoppeld.

$$\underline{x} = T \underline{\xi} \quad \text{met} \quad T = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = T^T = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

Voor de verplaatsingsvectoren \underline{u} en $\underline{\eta}$ van $P \rightarrow P^*$ geldt

$$\underline{u} = T \underline{\eta} \quad \iff \quad \underline{\eta} = T^{-1} \underline{u}$$

De relatie $\underline{u} = \underline{u}_0 + A \underline{x}$ kan worden getransformeerd tot

$$T^{-1} \underline{u} = T^{-1} \underline{u}_0 + T^{-1} A \underline{x}$$

$$\boxed{\underline{\eta} = \underline{\eta}_0 + T^{-1} A T \underline{\xi}}$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{10} \\ \eta_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = T^{-1} A T$$

④ Matrix A splitsen in een symmetrisch - en antimetrisch deel.

$$A = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \frac{u_{1,2} + u_{2,1}}{2} \\ \frac{u_{2,1} + u_{1,2}}{2} & u_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{u_{1,2} - u_{2,1}}{2} \\ \frac{u_{2,1} - u_{1,2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Definities :

$$\begin{cases} E_{11} = u_{1,1} \\ E_{12} = E_{21} = \frac{u_{1,2} + u_{2,1}}{2} \\ E_{22} = u_{2,2} \\ \omega = \frac{u_{1,2} - u_{2,1}}{2} \end{cases} ; \quad E = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = E + \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenschap : $T^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

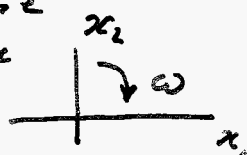
Hieruit :

$$\underline{\eta} = \underline{\eta}_0 + (T^{-1} E T) \underline{\xi} + \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underline{\xi}$$

Nu wordt de volgende bepijking aangenomen : $\left| \frac{\partial u_i}{\partial \pi_j} \right| \ll 1 \quad i, j = 1, 2, 3$
 $\frac{\partial u_i}{\partial \pi_j} = u_{i,j}$

$$\underline{\eta} = \underline{\eta}_0 + \underbrace{(T^{-1} E T)}_{\text{Kleine deformatie beschrijft de rektoestand}} \underline{\xi} + \underbrace{\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Kleine rotatie}} \underline{\xi}$$

↓
 translatic
 Kleine deformatie beschrijft de rektoestand



⑤

Definitie:

$$\epsilon_{\phi} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial \xi_1}$$

(rek in ϕ richting in punt ϕ)

Bewezen kan worden dat ϵ_{ϕ} gemeten kan worden met een voldoende klein rekstrookje met centrum in ϕ en orientatie in de ϕ richting.

$$T^{-1} E T =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \cos \phi + \epsilon_{12} \sin \phi & -\epsilon_{11} \sin \phi + \epsilon_{12} \cos \phi \\ \epsilon_{21} \cos \phi + \epsilon_{22} \sin \phi & -\epsilon_{21} \sin \phi + \epsilon_{22} \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{\phi} = \epsilon_{11} \cos^2 \phi + \epsilon_{12} \sin 2\phi + \epsilon_{22} \sin^2 \phi \quad \text{I}$$

$$\epsilon_{\phi} = \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2} + \frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2} \cos 2\phi + \epsilon_{12} \sin 2\phi$$

$$\epsilon_{\max} = \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2}\right)^2 + \epsilon_{12}^2}$$

$$\epsilon_{\min} = \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2}\right)^2 + \epsilon_{12}^2}$$

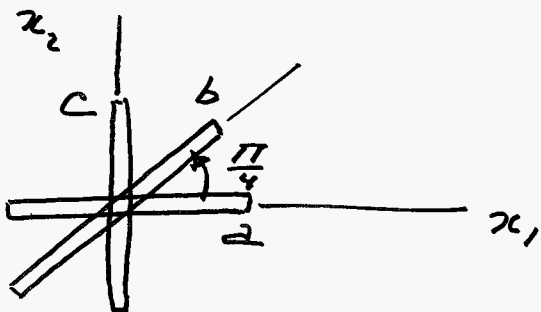
(hoofdrekken)

Richting hoofdrekken uit $\frac{d\epsilon_{\phi}}{d\phi} = 0 \rightarrow$

$$\tan 2\phi = \frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}$$

$$\phi_p = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} \quad \text{en} \quad \phi_p + \frac{\pi}{2} \quad \text{II}$$

- ⑥ Het bepalen van richting, teken en grootte van de hoofdreksen met behulp van een speciaal rozet.



Drie rekstrookjes
a, b en c
Gemeten wordt
 $\epsilon_a > \epsilon_b > \epsilon_c$

Met behulp van I :

$$\epsilon_a = \epsilon_{11}$$

$$\epsilon_b = \frac{1}{2} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \epsilon_{12}$$

$$\epsilon_c = \epsilon_{22}$$

Hieruit :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \epsilon_a \\ \epsilon_{12} = \epsilon_b - \frac{1}{2} (\epsilon_a + \epsilon_b) \\ \epsilon_{22} = \epsilon_c \end{cases}$$

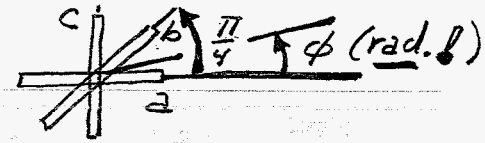
Nu ϕ_p en $\phi_p + \frac{\pi}{2}$ berekenen met II.

Vervolgens deze waarden substitu-
eren in I $\implies \epsilon_{\phi_p}$ en $\epsilon_{\phi_p + \frac{\pi}{2}}$

Numerieke waarden geven aan welke
maximum en welke minimum is.

- ⑦ Hierna volgt een rekenprogramma
in machinetaal voor een kleine tafel-
rekenautomat (Hewlett-Packard Calculator
Programma's in diverse talen zijn ^{9100B} zijn
in programmabibliotheken beschikbaar.

Hoofdreken uit rosetmeting:



```

0 clear
  stop
  print
  print
  x→()
  c
  roll↑
  x→()
  a
  +
  x↔y
  roll↑
  +
  ↓
  x↔y
  -
  2
  ÷
  y→()
  b
  b
  +
  a
  ↑
  c
  -
  ↓
  ÷
  ↓
  arc
  tan
  ↑
  2
  ÷
  y→()
  d
  ↓
  cos
  ↑
  x
  a
  
```

Enter 3
 $E_c \ E_b \ E_a$

$E_b \ E_a + E_c$
 $2 E_b$

```

1 ↓
  x↔y
  -
  2
  ÷
  y→()
  b
  b
  +
  a
  ↑
  c
  -
  ↓
  ÷
  ↓
  arc
  tan
  ↑
  2
  ÷
  y→()
  d
  ↓
  cos
  ↑
  x
  a
  
```

```

2 ÷
  ↓
  arc
  tan
  ↑
  2
  ÷
  y→()
  d
  ↓
  cos
  ↑
  x
  a
  
```

ϕ_p

```

3 x
  d
  sin
  ↑
  x
  c
  x
  ↓
  +
  d
  sin
  ↑
  d
  cos
  x
  b
  x
  2
  x
  ↓
  +
  y→()
  e
  d
  ↑
  pi
  ↑
  2
  ÷
  ↓
  +
  y→()
  f
  ↓
  cos
  ↑
  x
  a
  x
  f
  sin
  ↑
  
```

```

4 x
  b
  x
  2
  x
  ↓
  +
  y→()
  e
  d
  ↑
  pi
  ↑
  2
  ÷
  ↓
  +
  y→()
  f
  ↓
  cos
  ↑
  x
  a
  x
  f
  sin
  ↑
  
```

$E \phi_p$

$\phi_p + \frac{\pi}{2}$

```

5 ÷
  ↓
  +
  y→()
  f
  ↓
  cos
  ↑
  x
  a
  x
  f
  sin
  ↑
  
```

```

6 x
  c
  x
  ↓
  +
  f
  sin
  ↑
  f
  cos
  x
  b
  x
  2
  x
  ↓
  +
  e
  ↑
  d
  print
  print
  print
  end
  
```

```

7 x
  ↓
  +
  e
  ↑
  d
  print
  print
  print
  end
  
```

$E \phi_p + \frac{\pi}{2}$

$\phi_p \ E \phi_p \ E \phi_p + \frac{\pi}{2}$

Nov. 71
 W.L. Esmeijer

Stress

$$E_c = E_{22}$$

$$E_{12} = E_b - \frac{1}{2}(E_a + E_c)$$

$$E_a = E_{11}$$