De bepaling van hoeken in een cardanoverbrenging met behulp van afbeeldingsmatrices

DE BEPALING VAN HOEKEN IN EEN CARDANOVERBRENGING MET BEHULP VAN AFBEELDINGSMATRICES

door

ir G. Groeneveld.

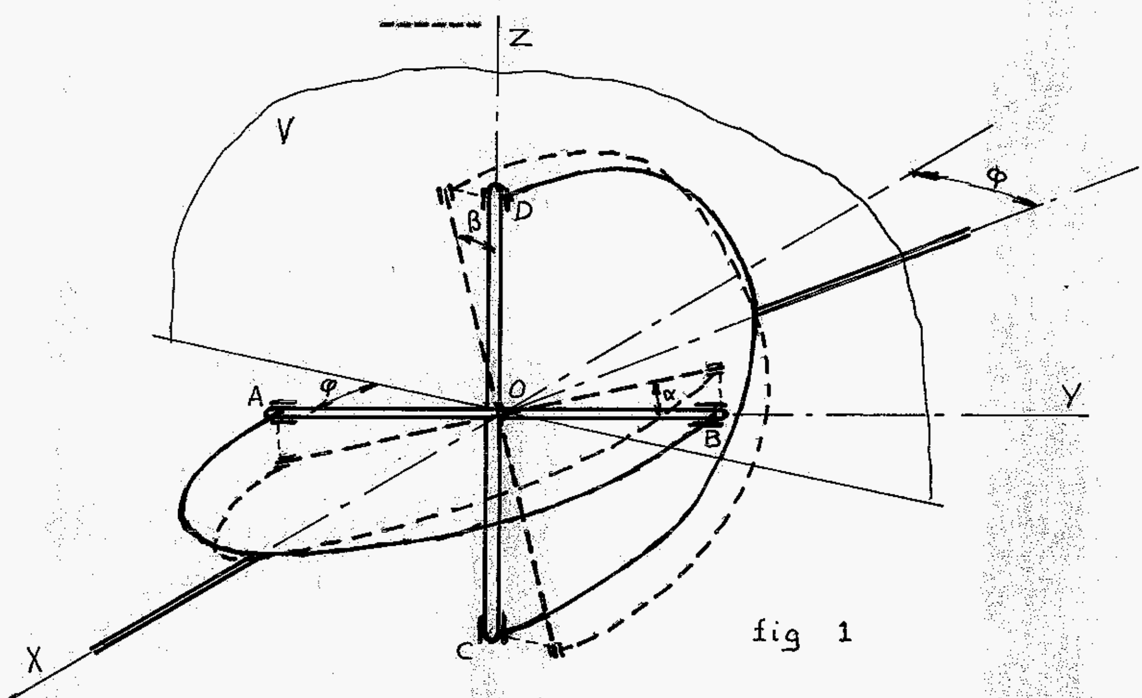


fig 1

1. Eerste probleemstelling.

In figuur 1 is een cardankoppeling getekend met een loodrecht kruis. De primaire as loopt langs de positieve X-as; de secundaire as ligt in het XY-vlak en maakt een hoek φ met de negatieve X-as.

Staaf AB van het kruis blijft steeds in het YZ-vlak bij rotatie van de primaire as; staaf CD blijft dan steeds in het vlak V door O, loodrecht op de secundaire as.

Gevraagd wordt de hoek β te bepalen, die de staaf CD maakt met de Z-as, indien staaf AB over een hoek α vanuit de Y-as is gedraaid. Dit verband levert na differentiatie een betrekking tussen ω_1 en ω_2, de hoeksnelheden van de primaire en secundaire as.

2. Tweede probleemstelling.

Het kruis van de cardankoppeling is nu niet loodrecht, doch de staven OB en OD maken nu een hoek $90° - \gamma$ met elkaar. Wederom wordt gevraagd het verband tussen ω_1 en ω_2. We kunnen nu de hoeken α en β nog op verschillende manieren definiëren. De meest voor de hand liggende definities zijn weergegeven in figuur 2 en figuur 3.

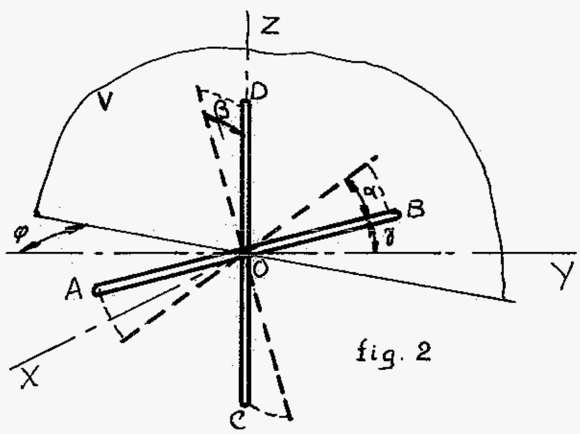


fig. 2

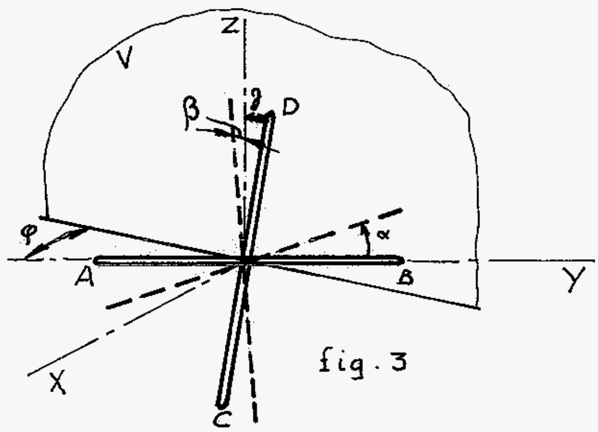


fig. 3

In figuur 2 is nog $\beta = 0$, als $\alpha = 0$; in figuur 3 is dit niet het geval.
In figuur 3 is bovendien de uitgangsstand geometrisch niet mogelijk als stand van de cardankoppeling. Dit is echter van geen belang.

3. Oplossingsmethoden.

Voor de bepaling van β wordt in alle drie gevallen dezelfde weg bewandeld.
Met behulp van afbeeldingsmatrices worden achtereenvolgens twee assenkruistransformaties uitgevoerd.
Uitgegaan wordt van het assenkruis XYZ. Dit assenkruis wordt gedraaid om de X-as over een hoek α. Noemen we de nieuwe coördinaten x', y' en z', dan levert de matrix ons een methode om de componenten van een willekeurige vector in de coördinaten x', y' en z' uit te drukken in de coördinaten x, y en z.
De volgende transformatie is een verdraaiing om de lijn OB in het X'Y'Z'-assenkruis over een hoek δ.

De coördinaten x", y" en z" kunnen we met behulp van de tweede afbeeldingsmatrix uitdrukken in de coördinaten x', y' en z' en deze weer met behulp van de eerste matrix in x, y en z.

We kiezen hierbij hoek δ zodanig, dat na de tweede transformatie de nieuwe OD juist ligt in het vlak loodrecht op de secundaire as.

We hebben als meetkundige voorwaarden:

a) Na twee transformaties moet OB loodrecht staan op de primaire as (dit is een contrôle).

b) Na twee transformaties moet OB een hoek α maken met de oorspronkelijke stand van OB (ook dit is een contrôle).

c) Na twee transformaties moet OD loodrecht staan op de secundaire as (dit levert een vergelijking voor δ).

d) De hoek β kan nu worden berekend als hoek tussen OD (na twee transformaties) en de oorspronkelijke Z-as.

4. Te gebruiken afbeeldingsmatrices.

Daar ons slechts hoeken interesseren, kunnen we alle vectoren de lengte 1 geven. We vinden dan bovendien voor de hoek tussen twee vectoren u en v dat $\cos(u,v) = u^t.v$, het inwendig product van deze vectoren (met u^t wordt de getransponeerde van de kolomvector u, dus de rijvector, bedoeld).

Moeten u en v loodrecht zijn, dan moet dus $u^t.v = 0$.

Als transformaties hebben we nu nodig:

a) rotatie om de X-as over een hoek α;

b) rotatie om de Y'-as over een hoek δ;

c) rotatie om de vector $\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix}$ over een hoek δ.

Voor a) en b) is de matrix zeer eenvoudig op te stellen. We hoeven namelijk voor een afbeeldingsmatrix slechts te kijken naar drie bijzondere vectoren in het X'Y'Z' kruis, namelijk de assen zelf en deze te schrijven in de componenten x, y en z. Deze componenten vormen achtereenvolgens de kolommen van mijn matrix.

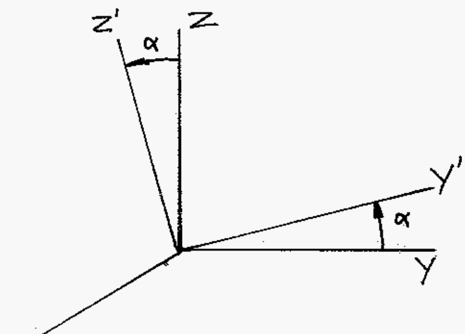


fig 4

We krijgen: rotatie om de X-as geeft de afbeeldingsmatrix:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{(fig. 4)}$$

Een vector u in het X'Y'Z'-assenkruis heeft dus de coördinaten $A_1.u$ in het XYZ-stelsel.

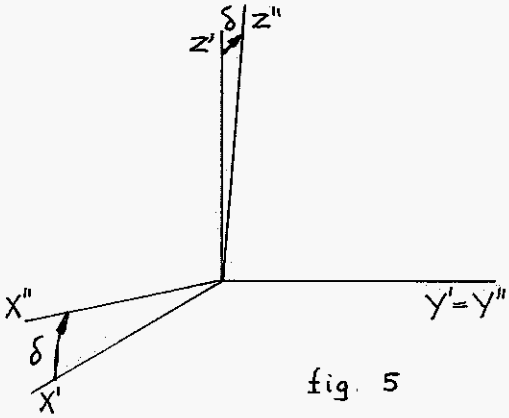


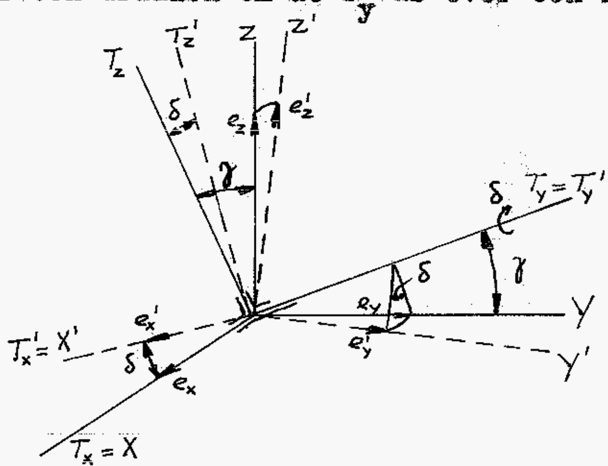
fig 5

Rotatie om de Y-as geeft de afbeeldingsmatrix:

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\delta & 0 & -\sin\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\delta & 0 & \cos\delta \end{pmatrix} \quad \text{(fig. 5)}$$

Een vector u in het X"Y"Z"-assenstelsel heeft de componenten $A_2.u$ in het X'Y'Z'-stelsel.

Stel, dat we beide rotaties achter elkaar uitvoeren, dan krijgen we dus de componenten $A_1.A_2.u$ in het XYZ-stelsel.
De matrix voor G is moeilijker op te stellen.
We beschouwen nu twee stelsels, XYZ en $T_xT_yT_z$, die we gezamenlijk laten draaien om de T_y-as over een hoek δ. We interesseren ons voor de componenten van e'_x, e'_y en e'_z uitgedrukt in het XYZ-stelsel.



Nu heeft een vector p in het X'Y'Z'-stelsel de componenten $B_3.p$ in het stelsel T'_x, T'_y, T'_z met

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

Een vector p' in T'_x, T'_y, T'_z heeft in $T_xT_yT_z$ de componenten $B_2.p'$ met

$$B_2 = \begin{pmatrix} \cos\delta & 0 & -\sin\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\delta & 0 & \cos\delta \end{pmatrix}$$

Een vector p" in $T_xT_yT_z$ tenslotte heeft in XYZ de componenten $B_1p"$ met

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

p in het X'Y'Z'-stelsel heeft dus in XYZ de componenten $B_1.B_2.B_3.p$.

De gezochte afbeeldingsmatrix A_3 is dus:

$$A_3 = B_1 . B_2 . B_3 = \begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\gamma \sin\delta & -\cos\gamma \sin\delta \\ -\sin\gamma \sin\delta & \cos^2\gamma + \sin^2\gamma \cos\delta & \cos\gamma \sin\gamma (1-\cos\delta) \\ \cos\gamma \sin\delta & \cos\gamma \sin\gamma (1-\cos\delta) & \sin^2\gamma + \cos^2\gamma \cos\delta \end{pmatrix}$$

5. Oplossing van het eerste probleem.

We hebben achtereenvolgens de afbeeldingen A_1 en A_2, dus een totale matrix

$$C = A_1 . A_2 = \begin{pmatrix} \cos\delta & 0 & -\sin\delta \\ \sin\alpha \sin\delta & \cos\alpha & -\sin\alpha \cos\delta \\ \cos\alpha \sin\delta & \sin\alpha & \cos\alpha \cos\delta \end{pmatrix}$$

Voor de vier punten genoemd in paragraaf 3 vinden we achtereenvolgens:

a) OB is in X"Y"Z" de vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (de Y"-as), dus in XYZ de vector

$$C . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

De X-as is $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = 0.$$ Dit klopt dus.

b) De Y-as is $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \cos\alpha .$$ Dit klopt eveneens.

c) OD is in X"Y"Z" de vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (de Z"-as) dus in XYZ de vector

$$C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\delta \\ -\sin\alpha \cos\delta \\ \cos\alpha \cos\delta \end{pmatrix}$$

De secundaire as is de vector $\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(-\cos\varphi \quad \sin\varphi \quad 0) \begin{pmatrix} -\sin\delta \\ -\sin\alpha \cos\delta \\ \cos\alpha \cos\delta \end{pmatrix} = 0$$ levert de vergelijking:

$$\sin\delta \cos\varphi - \sin\alpha \cos\delta \sin\varphi = 0 \quad \text{of} \quad \tan\delta = \sin\alpha \tan\varphi$$

d) $$\cos\beta = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} -\sin\delta \\ -\sin\alpha \cos\delta \\ \cos\alpha \cos\delta \end{pmatrix} = \cos\alpha \cos\delta$$

Uit c) en d) volgt na enig rekenen: $\tan\beta = \dfrac{\tan\alpha}{\cos\varphi}$

Stellen we $\alpha = \omega_1 t$ met ω_1 constant, dan is

$$\frac{d\beta}{dt} = \omega_2 = \frac{1}{1+\frac{\tan^2\alpha}{\cos^2\varphi}} \cdot \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \omega_1 = \frac{\omega_1 \cos\varphi}{\cos^2\varphi\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$$

Dit is een bekende betrekking.

6. Oplossing van het tweede probleem, eerste manier.

We hebben nu de afbeeldingen A_1 en A_3 met als productmatrix

$$D = A_1 . A_3 = \begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\gamma\sin\delta & -\cos\gamma\sin\delta \\ \begin{array}{l}-\cos\alpha\sin\gamma\sin\delta \\ -\sin\alpha\cos\gamma\sin\delta\end{array} & \begin{array}{l}+\cos\alpha(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\cos\delta) \\ -\sin\alpha\cos\gamma\sin\gamma(1-\cos\delta)\end{array} & \begin{array}{l}+\cos\alpha\cos\gamma\sin\gamma(1-\cos\delta) \\ -\sin\alpha(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma\cos\delta)\end{array} \\ \begin{array}{l}-\sin\alpha\sin\gamma\sin\delta \\ +\cos\alpha\cos\gamma\sin\delta\end{array} & \begin{array}{l}+\sin\alpha(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\cos\delta) \\ +\cos\alpha\cos\gamma\sin\gamma(1-\cos\delta)\end{array} & \begin{array}{l}+\sin\alpha\cos\gamma\sin\gamma(1-\cos\delta) \\ +\cos\alpha(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma\cos\delta)\end{array} \end{pmatrix}$$

We vinden nu:

a) OB is in X"Y"Z" de vector $\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix}$ dus in XYZ de vector $D. \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \sin\gamma\sin\delta\cos\gamma - \cos\gamma\sin\delta\sin\gamma \\ \cos\alpha\cos\gamma(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\cos\delta)-\sin\alpha\cos^2\gamma\sin\gamma(1-\cos\delta)+\cos\alpha\cos\gamma\sin^2\gamma(1-\cos\delta) \\ -\sin\alpha\sin\gamma(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma\cos\delta) \\ \sin\alpha\cos\gamma(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\cos\delta)+\cos\alpha\cos^2\gamma\sin\gamma(1-\cos\delta)+\sin\alpha\cos\gamma\sin^2\gamma(1-\cos\delta) \\ +\cos\alpha\sin\gamma(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma\cos\delta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha\cos^3\gamma - \sin\alpha\cos^2\gamma\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma\sin^2\gamma - \sin\alpha\sin^3\gamma \\ \sin\alpha\cos^3\gamma + \cos\alpha\cos^2\gamma\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma\sin^2\gamma + \cos\alpha\sin^3\gamma \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma \end{pmatrix}$$

Nu is de cosinus van de hoek tussen deze vector en de X-as =

$$= (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma \end{pmatrix} = 0, \text{ hetgeen klopt.}$$

b) $(0\ \ \cos\gamma\ \ \sin\gamma) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma \end{pmatrix} =$

$= \cos\alpha\cos^2\gamma - \sin\alpha\sin\gamma\cos\gamma + \sin\alpha\cos\gamma\sin\gamma + \cos\alpha\sin^2\gamma = \cos\alpha$.

Klopt.

c) OD is in X"Y"Z" de vector $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dus in XYZ

$$D\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\gamma\sin\delta \\ +\cos\alpha\cos\gamma\sin\gamma\ (1-\cos\delta) \\ -\sin\alpha\,(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma\cos\delta) \\ +\sin\alpha\cos\gamma\sin\gamma\ (1-\cos\delta) \\ +\cos\alpha\,(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma\cos\delta) \end{pmatrix}$$

Deze vector moet loodrecht staan op de vector $\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$

Dus $(-\cos\varphi \quad \sin\varphi \quad 0).D.\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0$ of

$$\cos\gamma\sin\delta\cos\varphi + \{\cos\alpha\cos\gamma\sin\gamma\ (1-\cos\delta) - \sin\alpha\ (\sin^2\gamma+\cos^2\gamma\cos\delta)\}\sin\varphi = 0$$

d) Tot slot vinden we voor $\cos\beta = (0 \quad 0 \quad 1).D.\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$

$$\cos\beta = \sin\alpha\cos\gamma\sin\gamma\ (1-\cos\delta) + \cos\alpha\ (\sin^2\gamma+\cos^2\gamma\cos\delta)$$

De eliminatie van δ uit de laatste twee formules is een probleem dat voorlopig niet zal worden aangepakt.
Eerst proberen we het tweede probleem op de tweede manier.

7. Oplossing van het tweede probleem, tweede manier.

We hebben weer de oorspronkelijke afbeeldingen A_1 en A_2, dus $C = A_1.A_2$.
Tevens is dus aan de punten a) en b) van paragraaf 3 nog steeds voldaan.

c) De lijn OD is in het stelsel X"Y"Z" de vector $\begin{pmatrix}0\\ \sin\gamma\\ \cos\gamma\end{pmatrix}$ dus in XYZ

$$C\begin{pmatrix}0\\ \sin\gamma\\ \cos\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\gamma\sin\delta \\ \cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma\cos\delta \\ \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma\cos\delta \end{pmatrix}$$

Deze moet loodrecht staan op $\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$

Dus: $\cos\gamma\sin\delta\cos\varphi + \sin\varphi\,(\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma\cos\delta) = 0$

d) $\cos\beta = \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma\cos\delta$

De laatste twee vergelijkingen zijn veel beter hanteerbaar dan de vergelijkingen uit paragraaf 6. Het onderzoek naar de maxima en minima van ω_2 in $\beta = \omega_2 t$ vergt echter nog enorm veel rekenwerk.

Getracht moet worden de betreffende maxima te minimaliseren door keuze van de hoek γ.

Eindhoven, 7 april 1961.

AHvernwld