Een ondergrens voor de lengte van een partiële transversaal in een Latijns vierkant

69679?

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Memorandum 1978-02

April 1978

Een Ondergrens voor de Lengte van een Partiële Transversaal in een Latijns Vierkant

door

A.J. de Vries en R.M.A. Wieringa

Technische Hogeschool
Onderafdeling der Wiskunde
PO Box 513, Eindhoven
Nederland

Een Ondergrens voor de Lengte
van een Partiële Transversaal
in een Latijns Vierkant

door

A.J. de Vries en R.M.A. Wieringa

1. Inleiding

Een Latijns vierkant van orde n is een vierkante matrix waarvan elke rij en elke kolom een permutatie is van de symbolen 1,...,n.

Een transversaal van een Latijns vierkant van orde n is een verzameling van n verschillende elementen van de matrix, met precies één element in elke rij en elke kolom.

Een partiële transversaal ter lengte k van een Latijns vierkant van orde n ($n \geq k$) is een verzameling van k verschillende elementen van de matrix met ten hoogste één element in elke rij en elke kolom.

Een partiële transversaal ter lengte n is dus een transversaal.

Het vermoeden van Ryser [1] is, dat een Latijns vierkant van orde n voor oneven n altijd een transversaal heeft, en voor even n tenminste een partiële transversaal ter lengte $n-1$ heeft.

K.K. Koksma [2] heeft aangetoond dat een Latijns vierkant van orde n een partiële transversaal heeft met lengte tenminste $\frac{2n+1}{3}$.

Kan deze grens nog verlegd worden?

2. Notatie

In deze paragraaf enkele notatieafspraken:

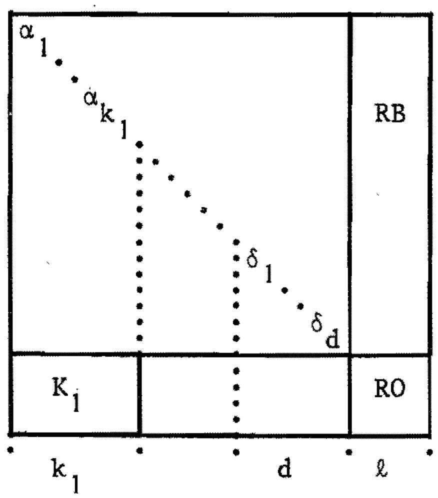
Latijns vierkant korten we verder af als LV.

Als we over elementen van een LV spreken, gebruiken we Griekse letters, eventueel geindiceerd: $\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\ldots$.

We willen een LV dikwijls onderverdelen in blokken. Voor de namen van deze blokken gebruiken we hoofdletters, eventueel geindiceerd: $K,R,RO,K_2,R_1',\ldots$

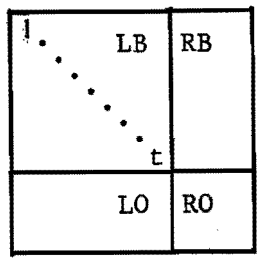
Natuurlijke getallen (zoals bijvoorbeeld afmetingen van blokken) geven we aan met kleine letters, eventueel geindiceerd: $d,k,\ell,r,\ldots,k_i,r_i,k_i^*,r_i^*,\ldots$

Ter illustratie een plaatje:



3. Algemene structuur

We gaan uit van een LV van orde n met 'n partiële transversaal ter lengte t, en geen partiële transversaal met lengte > t, 'n zogenaamde maximale partiële transversaal.



We definiëren ℓ als $\ell := n - t$.

Zonder verlies van algemeenheid kunnen we het LV onderverdelen in de blokken LB,RB, LO,RO, en veronderstellen dat de hoofddiagonaal van LB een maximale partiële transversaal vormt met elementen 1,...,t (zie de figuur hiernaast).

Omdat de partiële transversaal maximaal is, zijn de elementen van RO alle $\leq$ t.

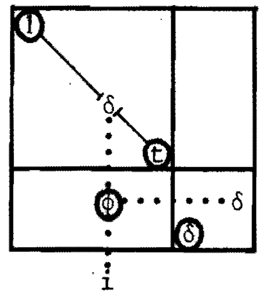
We verdelen ze in:

- elementen die meer dan éénmaal voorkomen, gevormd uit de symbolen $\delta_1,..,\delta_d$.
- elementen die slechts eenmaal voorkomen: $\varepsilon_1,...,\varepsilon_e$.

In LO staan ℓ^2 elementen > t, evenals in RB.

We leiden nu enkele eigenschappen af over de ligging van de elementen $\delta_1,...,\delta_d$ op de diagonaal t.o.v. de elementen > t in LO en RB, en over de ligging van de elementen > t in LO en RB t.o.v. elkaar.

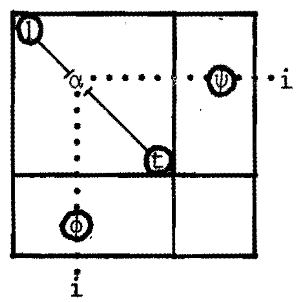
1. Stel op positie (i,i) van de matrix staat 'n $\delta \in \{\delta_1,...,\delta_d\}$ (i $\leq$ t). Deze δ maakt dus deel uit van de partiële transversaal.



   a. Dan kan in kolom i in LO geen element φ > t staan, want anders zouden we 'n partiële transversaal kunnen vormen ter lengte t + 1, door uit de oorspronkelijke partiële transversaal δ (op de diagonaal) te verwijderen, in kolom i φ, en in RO een δ die niet in dezelfde rij als φ staat (er zijn tenminste twee δ's in RO) te nemen.

b. Evenmin kan in rij i in RB een element $\varphi > t$ staan, hetgeen op geheel analoge wijze aangetoond kan worden.

2. a. Stel dat in LO in kolom $i \leq t$ 'n $\varphi > t$ staat en in rij i in RB 'n $\psi > t$. Dan moet $\varphi = \psi$. Want anders zouden we een partiële transversaal ter lengte $t+1$ kunnen vormen door het element α op positie (i,i) uit de partiële transversaal te verwijderen en de elementen φ en ψ eraan toe te voegen.



b. Een rechtstreeks gevolg van a. is, dat als in LO in kolom i 'n φ en 'n ψ staan, beide $> t$, in RB in rij i alle elementen $\leq t$ zijn, en omgekeerd, als in RB in rij i twee elementen staan die $> t$ zijn, in LO in kolom i alle elementen $\leq t$ zijn.

We definiëren voor $i = 0,1,\ldots,\ell$:

K_i, deelverzameling van LO, als dié kolommen waarin precies i elementen $> t$ staan,

K_i^* als $\bigcup_{j=i}^{\ell} K_j$,

k_i als $|K_i|$, k_i^* als $|K_i^*|$, (met $|K|$ bedoelen we het aantal kolommen van K),

R_i, deelverzameling van RB, als dié rijen waarin precies i elementen $> t$ staan,

R_i^* als $\bigcup_{j=i}^{\ell} R_j$,

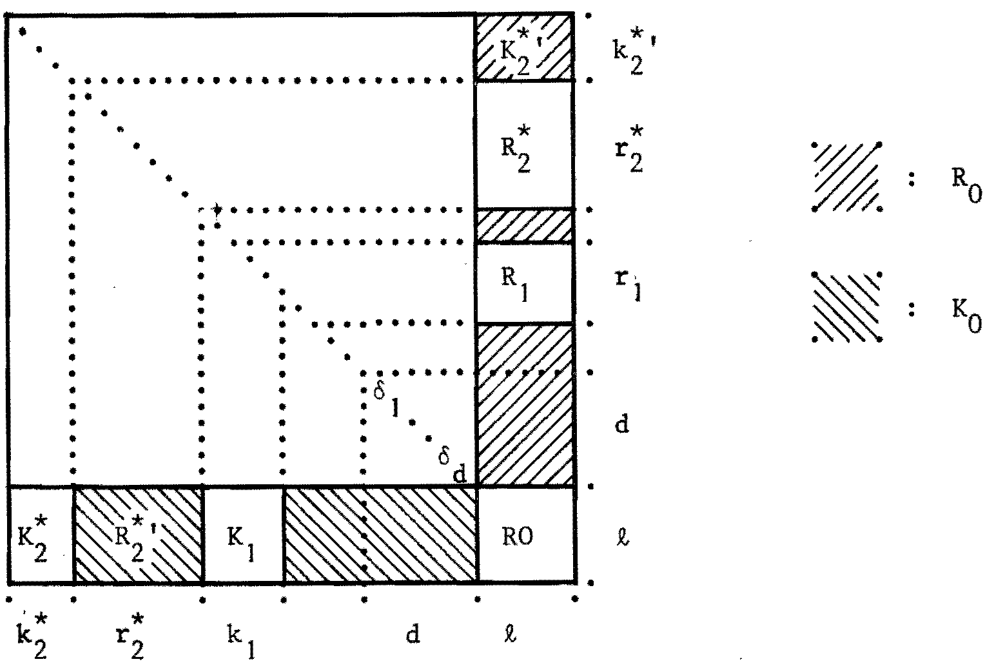
r_i als $|R_i|$, r_i^* als $|R_i^*|$, (met $|R|$ bedoelen we het aantal rijen van R).

Verder definiëren we:

Als K een deelverzameling is van LO, dan K', deelverzameling van RB, als die rijen i waarvoor geldt dat kolom i in K zit, en

Als R een deelverzameling is van RB, dan R', deelverzameling van LO, als die kolommen i waarvoor geldt dat rij i in R zit.

Met bovenstaande eigenschappen en definities kunnen we zonder verlies van algemeenheid het LV als volgt opgebouwd denken:

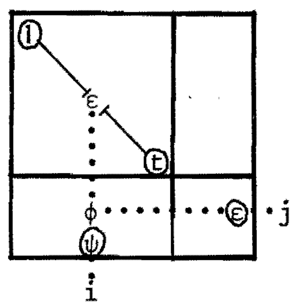


(In LO zijn $K_1^* \cap R_2^{*}{}'$ en $R_1^{*}{}' \cap K_2^*$ beide leeg!)

Er geldt dus altijd $n \geq k_2^* + r_2^* + k_1 + d + \ell$ en $n \geq k_2^* + r_2^* + r_1 + d + \ell$.

Voor de elementen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_e$ op de diagonaal geldt het volgende:
Stel op plaats (i,i) op de diagonaal staat een $\varepsilon \in \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_e\}$, $(i \leq t)$.

a. Dan mogen er in LO in kolom i geen φ en ψ, beide $> t$ voorkomen; anders zouden we een partiële transversaal ter lengte $t+1$ kunnen vormen door uit de oorspronkelijke transversaal de ε die op de diagonaal staat te verwijderen, en de ε die in RO (zeg in rij j) voorkomt en van φ en ψ een die niet in rij j staan toe te voegen.



b. Evenzo mogen dan in RB in rij i geen twee elementen $> t$ voorkomen.

4. Hoofdstelling

We bewijzen in deze paragraaf de

Stelling. Als $\ell \geq 3$ dan $n \geq 5\ell - 3$.

We veronderstellen verder in deze paragraaf $\ell \geq 3$.

In het bewijs onderscheiden we de gevallen:

1. $d < \ell$.
2. $d \geq \ell$.

4.1. $d < \ell$.

De d elementen $\delta_1,\ldots,\delta_d$ nemen in RO (afmetingen $\ell \times \ell$) maximaal $d.\ell$ plaatsen in beslag. Hieruit volgt voor e (het aantal elementen dat precies eenmaal in RO voorkomt): $e \geq \ell^2 - \ell.d$.

Deze e elementen $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_e$ komen ook als element van de partiële transversaal op de diagonaal voor, echter niet "boven" $K_2^* \cup R_2^{*\prime}$, zoals we in het laatste gedeelte van paragraaf 3 gezien hebben (met "boven" K bedoelen we in LB in dié kolommen waaruit in LO K bestaat).

Definieer S, deelverzameling van LO, als $K_1 \cup R_1'$ en s als $|S|$.

Tellen we alle elementen $> t$ in LO, dan zijn dat er ℓ^2, in RB eveneens ℓ^2, dus samen $2\ell^2$. Hiervan liggen er ten hoogste 2s in $S \cup S'$, de rest, tenminste $2\ell^2 - 2s$ stuks, in $K_2^* \cup R_2^*$. Omdat in K_2^* per kolom en in R_2^* per rij ten hoogste ℓ elementen kunnen voorkomen, geldt $k_2^* + r_2^* \geq \lceil (2\ell^2 - 2s)/\ell \rceil$.

Nu volgt uit de afmetingen van de blokken (en stukken diagonaal) van het LV:

$$n \geq (k_2^* + r_2^*) + \max\{s,e\} + d + \ell ,$$

dus

$$\begin{aligned} n\ell &\geq \ell(k_2^* + r_2^*) + \ell \max\{s,e\} + d\ell + \ell^2 \\ &\geq (2\ell^2 - 2s) + \ell \max\{s,e\} + d\ell + \ell^2 \\ &= 3\ell^2 + d\ell + \ell \max\{s,e\} - 2s . \end{aligned}$$

Als $s \geq e$ dan $\ell \max\{s,e\} - 2s = s(\ell - 2) \geq e(\ell - 2)$.

Als $s \leq e$ dan $\ell \max\{s,e\} - 2s \geq \ell e - 2e = e(\ell - 2)$.

Dus $n\ell \geq 3\ell^2 + d\ell + e(\ell - 2)$, en, met $e \geq \ell(\ell - d)$ en $d\ell = \ell^2 - \ell(\ell - d)$:

$$\begin{aligned} n\ell &\geq 3\ell^2 + \ell^2 - \ell(\ell - d) + \ell(\ell - d)(\ell - 2) \\ &= 4\ell^2 + \ell(\ell - d)(\ell - 3) , \end{aligned}$$

d.w.z. $n \geq 4\ell + (\ell - d)(\ell - 3)$.

Aangezien $d < \ell$, dus $\ell - d \geq 1$, geldt nu

$$n \geq 4\ell + (\ell - 3) = 5\ell - 3 . \qquad (1)$$

4.2. $d \geq \ell$.

Definieer weer S en s als in 4.1.

Duidelijk is, dat

$$n \geq (k_2^* + r_2^*) + s + d + \ell$$
$$\geq (k_2^* + r_2^*) + s + 2\ell \ .$$

Als $k_2^* + r_2^* + s \geq 3\ell$, dan volgt onmiddellijk: $n \geq 5\ell$. (2)

Stel nu verder $k_2^* + r_2^* + s \leq 3\ell - 1$.
Tellen we weer de elementen $> t$ in LO en RB, en bedenken dat in $S \cup S'$ ten hoogste 2s en in $K_2 \cup R_2$ $2(k_2 + r_2)$ elementen $> t$ staan, dan blijven er voor $K_3^* \cup R_3^*$ tenminste $2\ell^2 - 2s - 2(k_2 + r_2)$ over.
Zo volgt: $k_3^* + r_3^* \geq \lceil (2\ell^2 - 2(s + k_2 + r_2))/\ell \rceil$.

Nu volgt, met $k_2^* + r_2^* = (k_3^* + r_3^*) + (k_2 + r_2)$:

$$n\ell \geq \ell(k_3^* + r_3^*) + \ell(s + k_2 + r_2) + 2\ell^2$$
$$\geq 2\ell^2 - 2(s + k_2 + r_2) + \ell(s + k_2 + r_2) + 2\ell^2$$
$$= 4\ell^2 + (\ell - 2)(s + k_2 + r_2) \ .$$

Er zijn nu twee mogelijkheden:
De eerste mogelijkheid is dat $s + k_2 + r_2 \geq \ell$, dan volgt onmiddellijk

$$n\ell \geq 4\ell^2 + (\ell - 2)\ell \ ,$$

dus

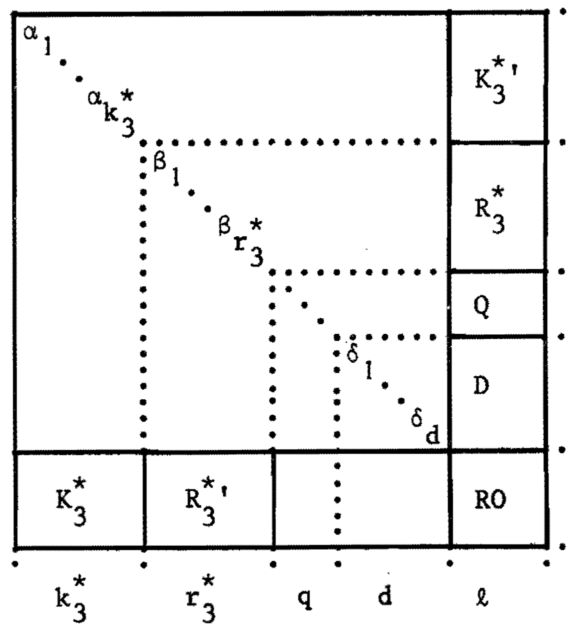
$$n \geq 5\ell - 2 \ . \qquad (3)$$

De andere mogelijkheid is dat $s + k_2 + r_2 \leq \ell - 1$. We beschouwen deze mogelijkheid nader en stellen dus $s + k_2 + r_2 \leq \ell - 1$.
Dan geldt

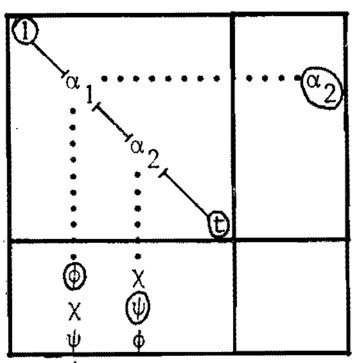
$$k_3^* + r_3^* \geq \left\lceil \frac{2\ell^2 - 2(s + k_2 + r_2)}{\ell} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2\ell^2 - 2\ell + 2}{\ell} \right\rceil \geq 2\ell - 1$$

(omdat $\ell \geq 3$). Wil hieraan voldaan zijn, moet minstens één van de getallen k_3^* en $r_3^* \geq \ell$ zijn. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we hier stellen $k_3^* \geq \ell$.

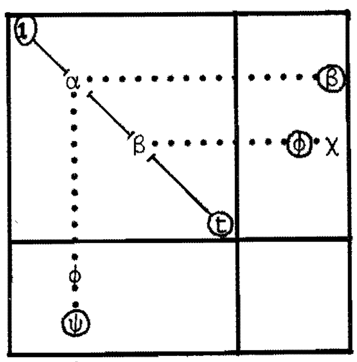
We kunnen het LV nu als volgt tekenen: (de definities van D, $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_3^*}$, $\beta_1, \dots, \beta_{r_3^*}$, Q en q hale men uit de figuur).



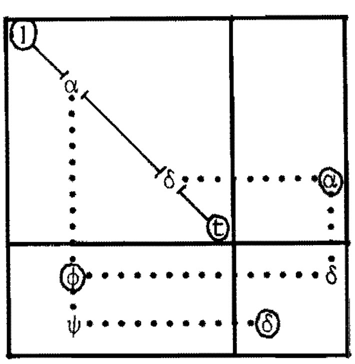
We beschouwen nu de laatste kolom van het LV. Hierin moeten de elementen α_i en β_j $(i = 1,\dots,k_3^*,\ j = 1,\dots,r_3^*)$ alle voorkomen. We tonen nu aan dat in $K_3^{*\prime}$, D en RO geen α_i's en β_j's mogen voorkomen. Zou dit wel het geval zijn dan zouden we 'n partiële transversaal ter lengte $t+1$ kunnen vormen. We laten voor $K_3^{*\prime}$ en D alleen plaatjes zien waarin staat aangegeven hoe de partiële transversaal ter lengte $t+1$ gerealiseerd zou kunnen worden door elementen uit de oorspronkelijke te verwijderen en nieuwe toe te voegen:
(φ, χ en ψ zijn steeds elementen > t. We kiezen steeds het meest "gecompliceerde" geval).



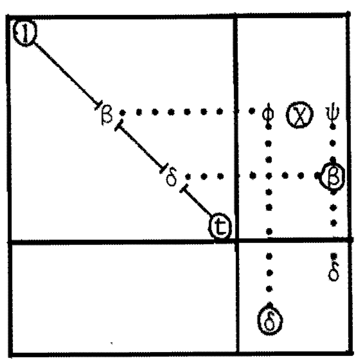
In $K_3^{*\prime}$ mag geen α_i staan.



In $K_3^{*\prime}$ mag geen β_i staan.



In D mag geen α_i staan.



In D mag geen β_i staan.

In paragraaf 3 hebben we aangetoond dat op de diagonaal "boven" $K_3^* \cup R_3^{*'}$ geen δ_i's en ε_j's mogen staan. Dit kunnen we nu anders omschrijven als:
In RO mogen geen α_i's en β_j's staan.

In de laatste kolom van het LV kunnen de α_i's en β_j's dus alleen staan in de blokken R_3^* en Q.
Er zijn in totaal $k_3^* + r_3^*$ α_i's en β_j's; R_3^* en Q hebben lengte r_3^* resp. q; dus moet gelden (willen de α_i's en β_j's in de twee blokken "passen"):
$r_3^* + q \geq k_3^* + r_3^*$, dus $q \geq k_3^* \geq \ell$ zoals we zonder verlies van algemeenheid hadden aangenomen.

De hoogte van het LV =

$$\begin{aligned} n &= k_3^* + r_3^* + q + d + \ell \\ &\geq 2\ell - 1 + \ell + \ell + \ell \\ &= 5\ell - 1 . \end{aligned} \tag{4}$$

4.3. We hebben aangetoond:

In 4.1: Als $d < \ell$ dan $n \geq 5\ell - 3$ (1)

In 4.2: Als $d > \ell$ en $k_2^* + r_2^* + s \geq 3\ell$ dan $n \geq 5\ell$ (2)

Als $d > \ell$, $k_2^* + r_2^* + s \leq 3\ell - 1$ en $k_2 + r_2 + s \geq \ell$ dan $n \geq 5\ell - 2$ (3)

Als $d > \ell$, $k_2^* + r_2^* + s \leq 3\ell - 1$ en $k_2 + r_2 + s \leq \ell - 1$ dan $n \geq 5\ell - 1$ (4)

Algemeen geldt dus: $n \geq 5\ell - 3$.
Hiermee is de hoofdstelling bewezen.

5. Conclusies

Lemma 1. Als $n \geq 12$ dan geldt $\ell \leq \frac{n+3}{5}$, dus $t \geq \frac{4n-3}{5}$.

Bewijs. Als $\ell \geq 3$, dan volgt uit de hoofdstelling dat $n \geq 5\ell - 3$, dus $\ell \leq \frac{n+3}{5}$ en $t \geq \frac{4n-3}{5}$. Als $\ell \leq 2$, volgt het gestelde direct.

Lemma 2. Als $n \leq 11$ dan geldt $\ell \leq 2$, dus $t \geq n - 2$.

Bewijs. Zou $\ell \geq 3$, dan zou met de hoofdstelling volgen: $n \geq 5\ell - 3 \geq 12$.

Opmerking. Dat voor $n \leq 6$ $\ell \leq 1$, dus $t \geq n - 1$ geldt, kan op eenvoudige wijze geverifieerd worden.

6. Referenties

[1] H.J. Ryser, Neuere Probleme der Kombinatorik im Vorträge über Kombinatorik, Oberwolfach, 24-28 juli 1967. Mathematischen Forchungsinstitut, Oberwolfach, 1968.

[2] K.K. Koksma, A lower Bound for the Order of a Partial Transversal in a Latin Square, Journ. of Comb. Th. 7, 94-95 (1969).