

Het bepalen van de spanningsverdeling in een rechthoekige pijp met sleuf, waarop een wringend moment wordt uitgeoefend

Citation for published version (APA):

Laan, P. J. (1965). *Het bepalen van de spanningsverdeling in een rechthoekige pijp met sleuf, waarop een wringend moment wordt uitgeoefend*. (DCT rapporten; Vol. 1965.016). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1965

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Het bepalen van de spanningsverdeling in een rechthoekige pijp met sleuf, waarop een wringend moment wordt uitgeoefend.

Inhoud.

0. Samenvatting.
1. Doel van de proef.
2. Proefstuk, proefopstelling en gebruikte apparatuur.
3. Het experiment.
4. Meetresultaten.
5. Berekeningen.

Eindhoven, maart 1965.



P.J. Laan.

Het bepalen van de spanningsverdeling in een rechthoekige pijp met sleuf, waarop een wringend moment wordt uitgeoefend.

o. Samenvatting.

Uit dit experiment is gebleken, dat een sleuf in een rechthoekige pijp, die op wrijving wordt belast, grote invloed heeft op de spanningsverdeling.

De meetresultaten worden niet verklaard door de theorie. Het aantal meetpunten is te gering om een duidelijk beeld van de spanningsverdeling te verkrijgen.

1 Doel van de proef

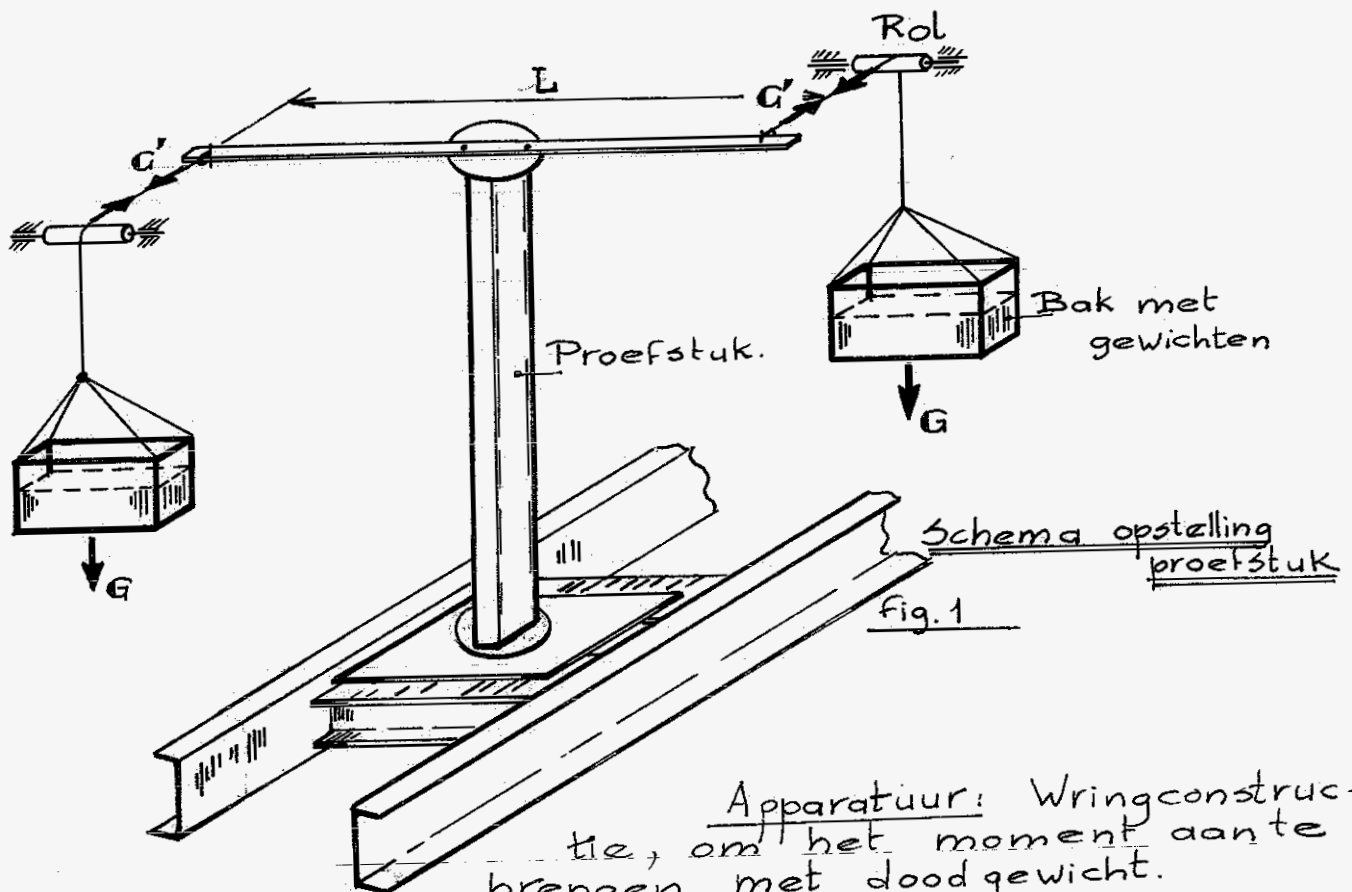
Het doel van de proef is, om met behulp van weerstandsrekstrookjes het spanningsverloop in de buurt van de sleuf te bepalen.

Met name interesseert ons de overgang van open doorsnede in gesloten doorsnede.

Het wringend moment is opgebracht met behulp van "dood"gewicht.

2. Proefstuk, proefopstelling en gebruikte apparatuur (Zie ook tekening op blz 6)

Proefstuk: Afmetingen 120x80x5
 lengte 1350 mm
 Sleüflengte 1090 "
 Sleuf breedte 5 "
 De sleuf is in de pijp gefreesd met een spieolfrees.



Apparatuur: Wringconstructie, om het moment aan te brengen met doodgewicht.

Rekstrookmeetbrug, type T 630.
 Code omzetter.
 Fridenponser PP 9 BF 2.
 2 Verdeelkasten, WE 430 en WE 431.

Rekstrookje

Type HPR 5
 Filament lengte 5 mm.
 Weerstand $120 \pm 0,3 \Omega$.
 K-factor 2,04.
 Fabr. Tokyo Sokki, Kenkyujo Co.

3. Het experiment

Op de pijp zijn 20 weerstandsrekstrookjes geplakt. Op blz. 6, zijn de plaatsen van de rekstrookjes aangegeven met de nummers 1 t/m 20. De doorsneden, waarin deze zijn aangebracht zijn aangegeven met de letters A, B, C, D en E. De filamenten van de rekstrookjes met 1, 2 en 3

Het proefstuk is onderaan met bouten (M20) vast gezet op een 10mm dikke plaat, die verbonden is met "de bok". Zie fig op blz 3, waar de opstelling schematisch is weergegeven. Op de bovenflens van de rechthoekige balk is een arm gemonteerd met een armlengte $L=1\text{m}$. De belasting is aangebracht door gewichten in bakken te plaatsen, die via staaldraden aan de wringarm zijn verbonden.

De belastingsvolgorde was: $M_w = 0, 10, 20, 30, 40, 30, 20, 10$ en 0 kgfm . In dit gebied geldt, dat de wrijving in de rollen samen ongeveer 5% is van het totale gewicht G . G is het gewicht van de in de bak aanwezige gewichten + het eigengewicht van de bak, dat 10kgf is. Het opgebrachte moment $M_w = G \cdot L = 0,95 G \cdot L$ (kgfm)

Er is tweemaal rechtsom en tweemaal linksom getorteed.

Gemeten is t.o.v. een centrale dummy. I.v.m. de capacatieve onbalans heeft de draad naar de dummy en naar een rekstrookje ongeveer dezelfde lengte.

De dummy is geplaatst op het vlak van de pijp, waar ook de sleuf in is gefreesd. Ze ligt tussen de vlakken C en D op ongeveer 370mm van het midden van de pijp. Ze is afgedekt met Philips afdekmiddel PR 9244/05. Dit in tegenstelling met de rekstrookjes, die met tape zijn afgeplakt.

4. Meetresultaten.

De gemeten waarden zijn direct ingeponst in de input band. Deze resultaten zijn met behulp van de „Dekodeur 386^D” en het programma 435E door de afd. Wiskunde in de I.B.M. rekenmachine verwerkt. Voor verdere gegevens hierover wordt verwezen naar het artikel „Drie computerprogramma's voor het verwerken van rekstrookmetingen”, WE 64/28 van Ir. J. D. Janssen.

Het nulpuntsverloop.

Bij torsie rechtsom is bij 3 van de 120 metingen het nulpuntsverloop, N ; $3 < N < 4$ μ rek. Het zijn de filamenten 5C, 13a en 14a. Bij filament 11a is $4 < N < 5$.

Bij torsie linksom zijn er eveneens 3 van de 120 metingen, waarbij $3 < N < 4$, t.w. 9a, 10a en 14a. Bij alle andere meting is $N < 2$ μ rek.

De standaarddeviatie.

Als maat voor de afwijkingen der meetresultaten van de „gemiddelde” lijn geldt de deviatie σ , gedefinieerd als

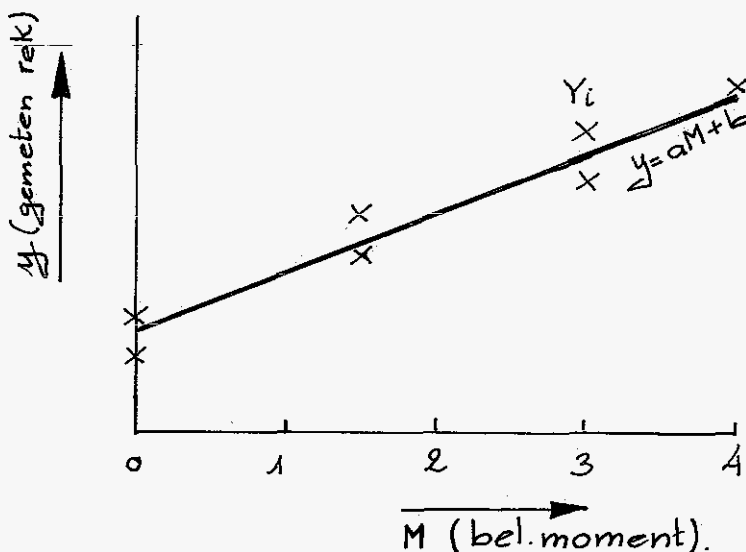
$$\sigma^2 = \frac{\sum (Y_i - y_i)^2}{n} = \frac{\sum (Y_i - y_i)^2}{g}$$


fig. 2.

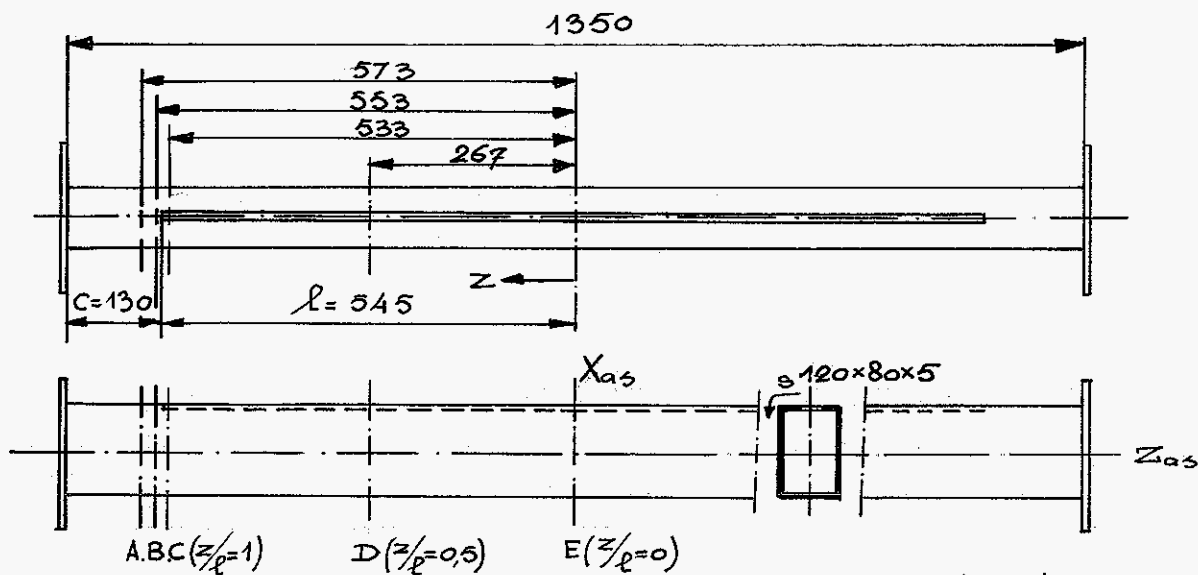
Voor ieder filament wordt de waarde σ berekend.

Om de betekenis van σ wat duidelijker te zien, bedenken we, dat als slechts een meetpunt een waarde δ van de gemiddelde lijn afluigt (alle andere punten liggen op de lijn) voor $\sigma = 1$ geldt dat $\delta = 3$ μ rek is.

Als alle meetpunten dezelfde afstand δ van de gemiddelde lijn afluigen geldt voor dat $\delta = 1$.

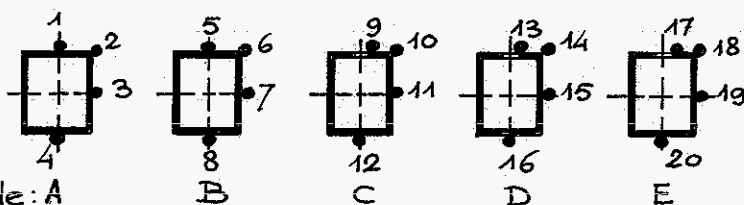
lijn
 $\sigma = 1$

Rechthoekige pijp met sleuf.



A, B, C ($z/l=1$) D ($z/l=0,5$) E ($z/l=0$)

Schaal 1:10



Doorsnede: A

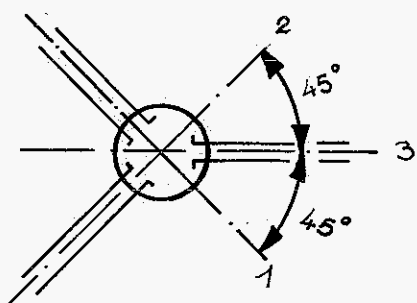
B

C

D

E

fig. 3.



Schema roset HPR 5 fig. 4.

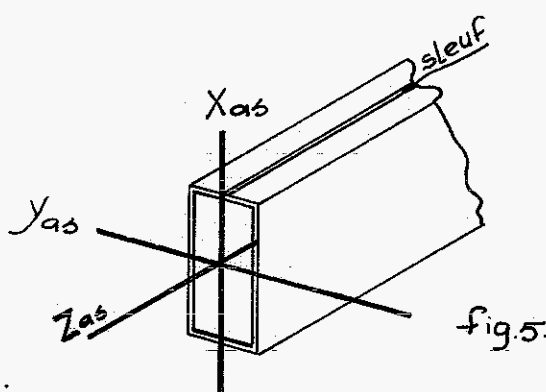
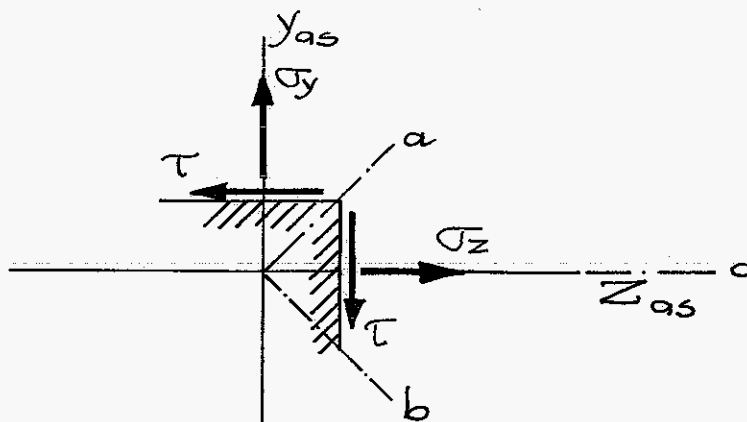


fig. 5.



Vlakken // zoy vlak fig. 6.

Bij deze meting is meestal de standaarddeviatie $\sigma < 2 \mu_{rek}$.
De volgende rekstrookjes leverden een grotere standaarddeviatie

<u>Torsie rechtsom</u>	Rekstrookje	Filament	Deviatie
	5	{ a	$\approx 5 \mu_{rek}$
		{ b	$= 5 "$
	9	{ a	$= 5 "$
		{ b	$= 4 "$
		{ c	$= 5 "$

Ongeveer dezelfde waarden vinden we bij torsie linksom.
De standaarddeviaties van de filamenten 5a, 5b, 9a, 9b en 9c zijn 5% of minder van de totaal gemeten rek.

Spanningen.

De experimenteel bepaalde spanningen, normaalspanningen σ_z en σ_y en de schuifspanning τ , bij een belasting $M_w = 10 \text{ kgfm}$, zijn opgenomen in tabellen op blz 9 en 10.

De meting blijkt zowel bij torsie linksom, als bij torsie rechtsom zeer goed te reproduceren.

De spanningen zijn uitgezet in de grafieken I, II, III en IV.

Een vergelijk met de theoretische lijnen leert, dat ~~theorie en experiment~~ niet goed overeenkomen. Vooral in de doorsnede C, $z = l$, zijn de verschillen bijzonder groot. De beste benadering wordt gevonden in doorsnedes D en E waar $z/l = 0,5$ en 0.

Open cilinder.

De normaalspanning σ_z .

Een vergelijk met de theoretische lijnen leert, dat de gemeten waarden in de doorsnedes D en E ongeveer 15% afwijken. In doorsnede C zijn de afwijkingen veel groter.

De schuifspanning τ

In de doorsneden D ($z/l=0,5$) en E ($z/l=0$) is het verschil tussen theorie en experiment ongeveer 15%. In de doorsnede C ($z/l=1$) is in het geheel geen overeenstemming.

Gesloten stuk van de cilinder

De normaalspanning σ_z .





Voor het gesloten stuk gelden de normaalspanningen, zoals ze op blz 28 zijn aangegeven voor $z/l=1$. Hierbij zijn de verschillen bijzonder groot.

De schuifspanning τ .

Deze is theoretisch $\tau = \frac{M_w}{2 \cdot t \cdot a \cdot b} = \frac{1000}{2 \cdot 0,5 \cdot 8 \cdot 12} = 10,4 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$





Ook in dit geval wijken de gemeten waarden zeer veel af.

Meetresultaten Tabel 1

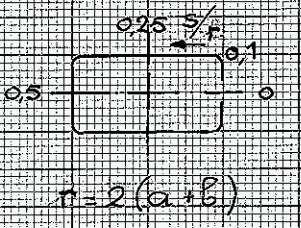
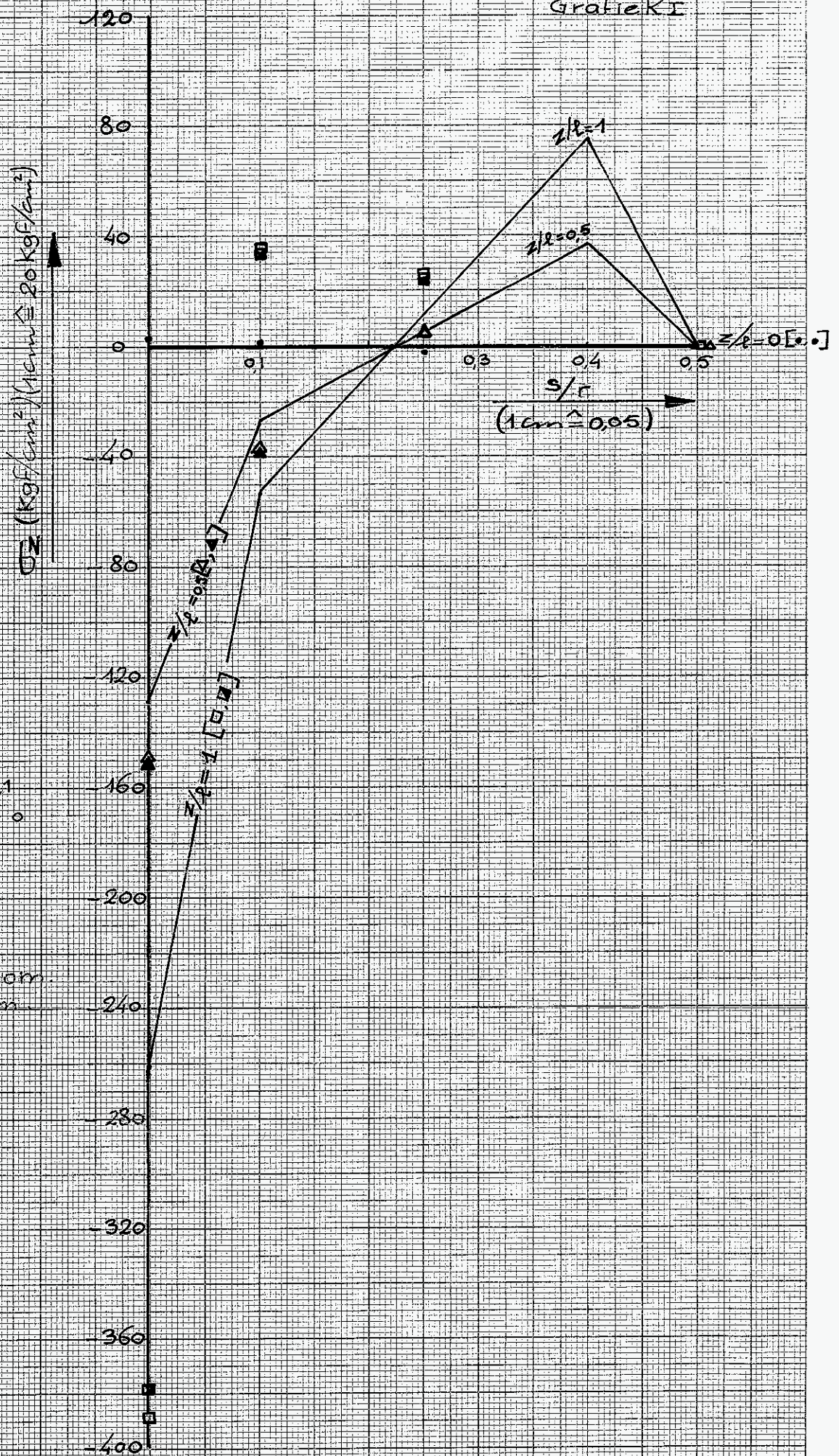
Torsie rechtson $M_w = 10 \text{ KgFm}$														
z/l	Doorsnede	$J_z (\text{KgF/cm}^2)$				$J_y (\text{KgF/cm}^2)$				$T (\text{KgF/cm}^2)$				
		s/r				s/r				s/r				
		0	0,1	0,25	0,5	0	0,1	0,25	0,5	0	0,1	0,25	0,5	
1° Serie		A	-5,8	-54,2	18,3	-3,0	2,1	26,7	-3,3	2,0	-83,7	12,4	-9,9	-27,3
		B	-41,7	1,5	24,7	-3,7	27,9	45,5	-3,9	4,2	-310,8	30,8	-4,6	-27,2
	1	C	-389,0	37,2	26,7	-9,9	-5,9	42,5	-6,7	-0,7	31,8	20,0	-9,9	-26,2
	0,5	D	-152,3	-39,8	4,5	-0,4	1,8	54,1	-21,4	2,0	-29,8	-24,8	-41,7	-26,2
	0	E	2,5	1,0	-2,7	0,6	2,9	0	2,2	3,9	-35,8	-40,3	-47,7	-29,8
2° Serie		A	-5,9	-54,9	17,8	-2,8	0,9	26,1	-3,9	2,1	-83,0	12,2	-1,0	-27,4
		B	-41,5	1,7	24,3	-3,6	27,6	44,6	-4,4	5,0	-30,8	30,7	-4,6	-27,2
	1	C	-385,2	36,6	27,2	-1,3	-6,5	43,0	-7,1	0,3	31,2	20,2	-9,7	-26,6
	0,5	D	-149,9	-39,1	5,5	0,2	2,5	52,5	-21,3	1,9	-30,1	-24,2	-41,5	-25,8
	0	E	2,9	1,6	-2,8	0,6	3,8	0,3	1,1	4,8	-35,4	-39,9	-47,2	-29,1

Meetresultaten.

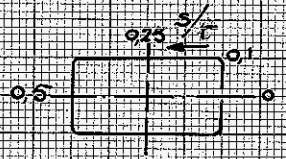
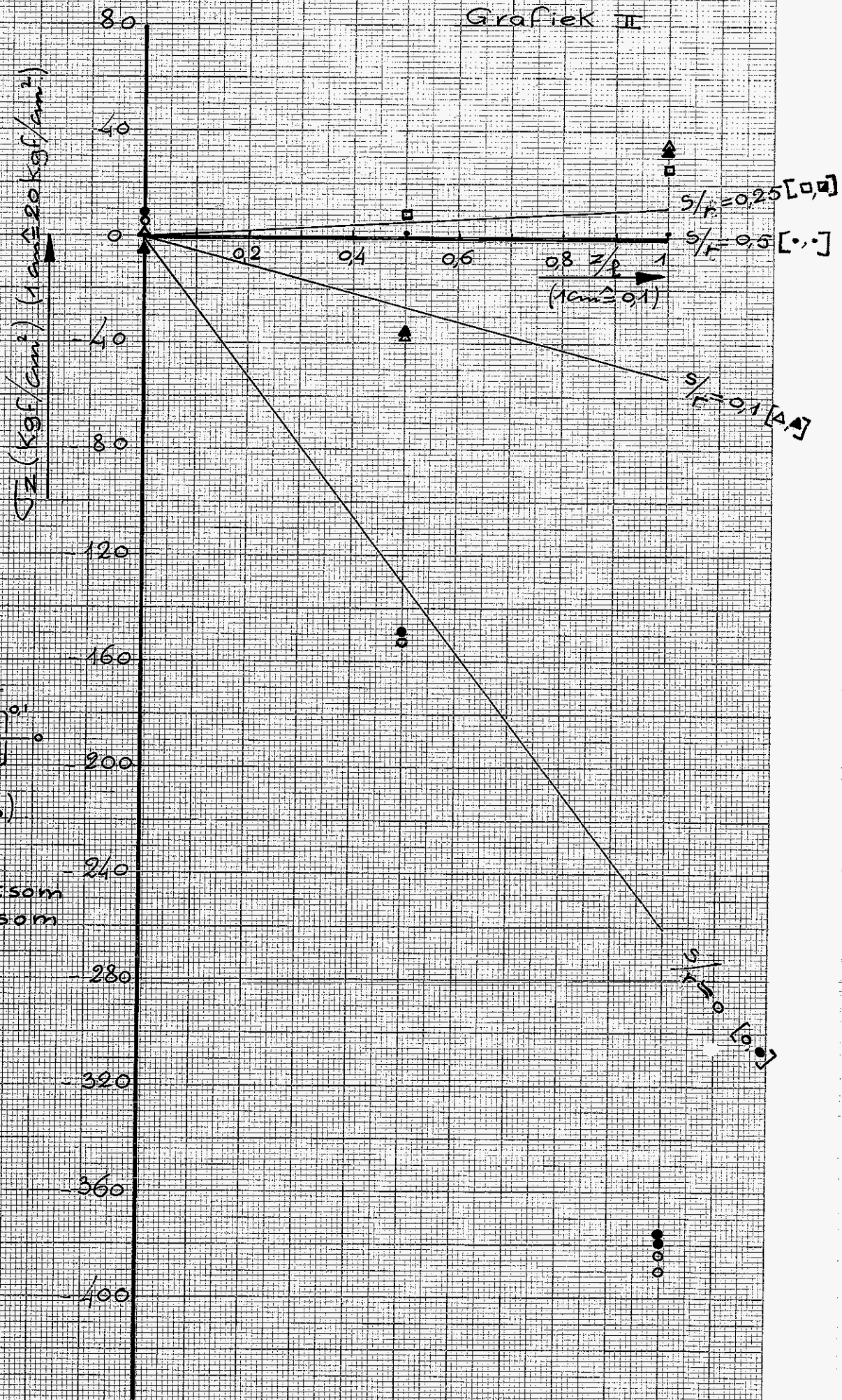
Tabel 2

Torsie linksom $M_w = 10 \text{ kgfm.}$														
z/l	Doorsnede	$\sigma_z (\text{kgf/cm}^2)$				$\sigma_y (\text{kgf/cm}^2)$				$\tau (\text{kgf/cm}^2)$				
		s/r				s/r				s/r				
		0	0,1	0,25	0,5	0	0,1	0,25	0,5	0	0,1	0,25	0,5	
3° Serie		A	2,9	52,3	-18,2	1,4	-7,9	-25,4	1,7	-4,3	81,7	-11,9	0,9	27,1
		B	33,8	-2,6	-24,0	2,4	-34,6	-44,0	2,8	-4,7	305,9	-28,8	4,3	26,4
	1	C	379,1	-36,1	-26,6	-1,2	5,8	-43,0	3,6	-1,2	-26,2	-16,7	9,1	25,9
	0,5	D	148,6	38,3	-7,3	1,8	-2,4	-47,6	19,6	1,5	29,0	24,5	39,8	25,4
	0	E	-1,9	4,3	0,5	3,2	4,6	-6,4	-2,6	3,6	34,9	39,3	47,0	28,8
4° Serie		A	1,8	52,6	-18,5	0,2	-9,1	-26,3	2,0	-4,6	82,4	-11,9	0,8	27,2
		B	32,5	-3,5	-25,9	0,9	-36,9	-46,6	1,1	-7,4	307,3	-29,0	4,2	26,6
	1	C	376,5	-39,6	-29,8	-3,8	1,7	-46,6	1,1	-2,7	-26,3	-17,6	9,2	26,0
	0,5	D	146,2	36,2	-9,8	0,3	-6,0	-50,7	16,3	0,6	28,5	25,0	40,0	25,8
	0	E	-4,8	2,0	-2,5	-0,2	2,0	-8,3	-5,3	3,2	34,9	39,2	47,1	28,8

Grafiek I



Grafiek II

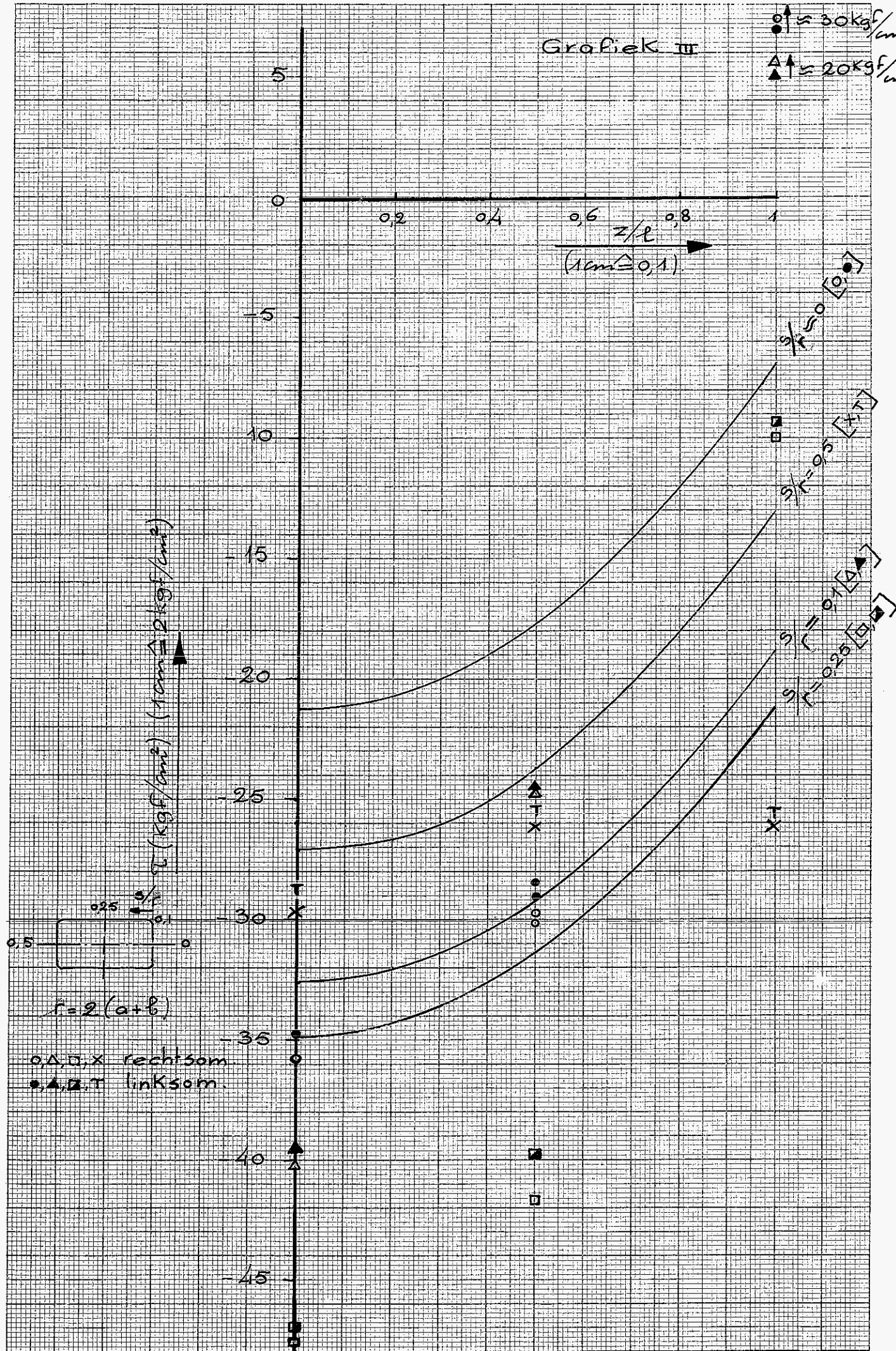


$r = 2(a+b)$

- , □, ● rechtsom
- , ▲, ● linksom

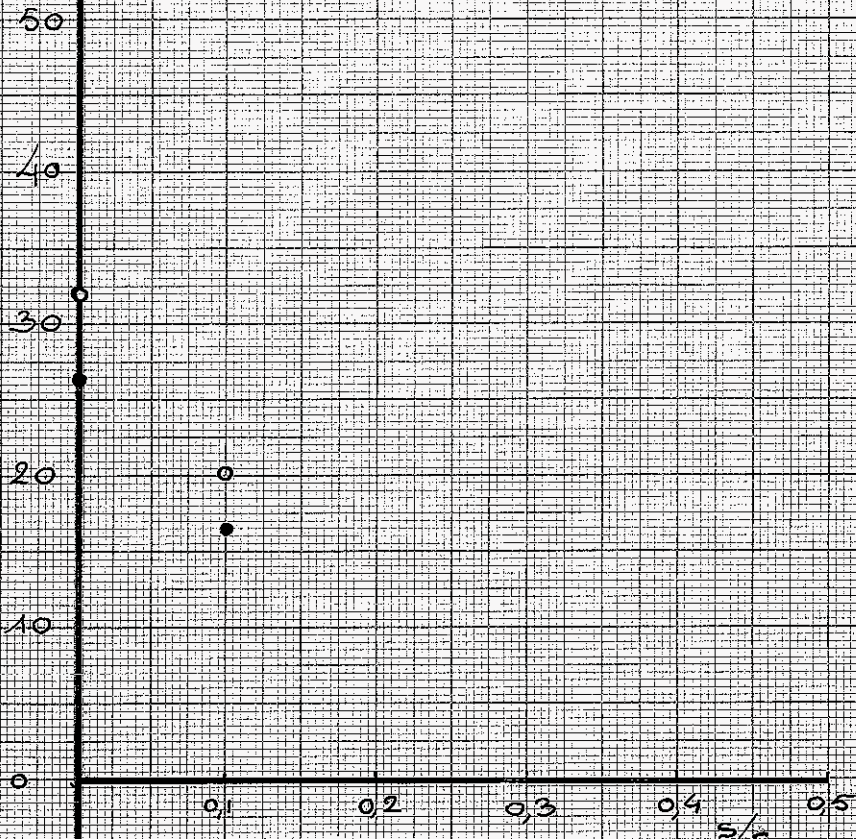
Grafiek III

$\bullet \uparrow \approx 30 \text{ kgf/cm}^2$
 $\blacktriangle \uparrow \approx 20 \text{ kgf/cm}^2$



Grafiek IV

σ (Kg/cm²) (norm Δ 5 Kg/cm²)



$r = z(a+b)$

o, Δ , \square rechtsom
 •, \blacktriangle , \blacksquare linksom

$z/r = 1$ [o, •]
 $z/r = 0,5$ [Δ , \blacktriangle]
 $z/r = 0$ [\square , \blacksquare]

Op de nu volgende pagina's wordt de berekening uitgevoerd van de in het experiment besproken proefstuk.

Bij deze berekeningen wordt er van uit gegaan, dat de formules bekend zijn.

Berekend zijn :

Het dwarskrachten middelpunt s .

De oppervlakte karakteristieken.

S_w als functie van s
(In grafiek VI uitgezet).

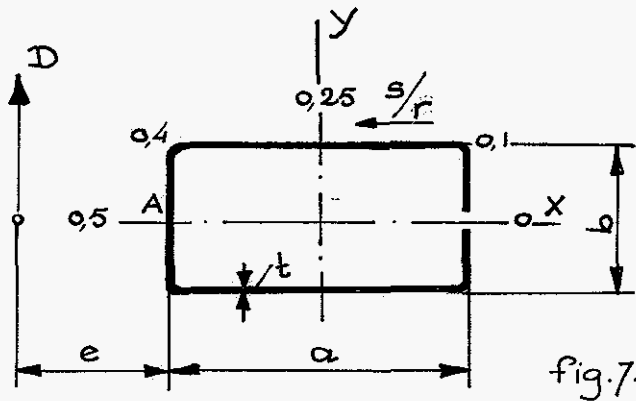
$\sinh z/l$ en $\cosh z/l$ voor verschillende waarden van z/l . [In grafiek VII en VIII uitgezet]

De waarden $v(z)$, $v'(z)$, $v''(z)$ en $v'''(z)$.

Verder zijn de vergelijkingen voor w bepaald, als functie van s .

Met behulp van deze waarden zijn de schuif- en normaalspanningen in verschillende punten van de pijp berekend en uitgezet in de grafieken I t/m IV.

Berekeningen betreffende de rechthoekige
pijp met sleuf.



$$\left. \begin{aligned} a &= 12 \text{ cm} \\ b &= 8 \text{ " } \\ t &= 0,5 \text{ " } \end{aligned} \right\} \text{fig.}$$

$\frac{1}{2}$ sleuflengte $L = 54,5 \text{ cm}$
 $c = 13 \text{ cm}$ (Zie fig.7.)
 $r = 2(a+b) = 40 \text{ cm}$.

Bepaling dwarskrachtenmiddelpunt.

$$I_x = \left(\frac{1}{6} b^3 + \frac{1}{2} a b^2 \right) t = \left(\frac{1}{6} \cdot 8^3 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8^2 \right) 0,5 = \underline{\underline{234,6 \text{ cm}^4}}$$

Bij de berekening van I_x zijn de afrondingen verwaarloosd.

Berekening van e (Zie fig.)

$$\tau_y = \frac{D \cdot s_x}{t \cdot I_x} = \frac{D \cdot y^2}{2 I_x} \quad (\tau_y \parallel Y\text{as}, 0 < s/r < 0,1)$$

$$\tau_x = \frac{D \cdot s_x}{t \cdot I_x} = \frac{D \left(\frac{1}{8} b^2 t + \frac{1}{2} b t u \right)}{t \cdot I_x} = \frac{D b \left(\frac{1}{4} b + u \right)}{2 I_x}$$

($\tau_x \parallel X\text{as}$, $0,1 < s/r < 0,4$)
en verder symmetrisch.

$$D \cdot e = 2 \int_0^{\frac{1}{2}b} \tau_y \cdot t \cdot a \cdot dy + 2 \int_0^a \tau_x \cdot t \cdot \frac{1}{2} b \cdot du$$

$$D \cdot e = \frac{D t}{I_x} \left\{ a \int_0^{\frac{1}{2}b} y^2 dy + \frac{1}{2} b^2 \int_0^a \left(\frac{1}{4} b + u \right) du \right\}$$

$$e = \frac{a b^2 t}{12 I_x} (2b + 3a) = \frac{a (2b + 3a)}{(2b + 6a)}$$

Hier is $e = \frac{12 (2 \cdot 8 + 3 \cdot 12)}{(2 \cdot 8 + 6 \cdot 12)} = \underline{\underline{7 \frac{1}{11} \text{ cm}}}$.

Berekening van $\omega(s)$

$$\omega_0 = -ab = -96 \text{ cm}^2.$$

$$\omega_{0,1} = +\frac{1}{2}eb - \frac{1}{2}ab = -19,6 \text{ cm}^2$$

$$\omega_{0,4} = +\frac{1}{2}eb = 28 \text{ cm}^2$$

$$\omega_{0,5} = 0 \text{ cm}^2.$$

ω_s	$\omega(s)/ab$
ω_0	-1
$\omega_{0,1}$	-0,2045
$\omega_{0,4}$	0,2954
$\omega_{0,5}$	0

Vergelijkingen voor ω als functie van s

$$0 \leq s/r \leq 0,1 \Rightarrow 0 \leq s \leq 4 \quad \omega = +19\frac{1}{11}s - 96 \text{ cm}^2$$

$$0,1 \leq s/r \leq 0,4 \Rightarrow 4 \leq s \leq 16 \quad \omega = +4s - 35\frac{7}{11} \text{ cm}^2$$

$$0,4 \leq s/r \leq 0,5 \Rightarrow 16 \leq s \leq 20 \quad \omega = -7\frac{1}{11}s + 141\frac{9}{11} \text{ cm}^2$$

Zie ook grafiek, waarin het verloop van $\omega(s)$ is getekend.

Oppervlakte karakteristieken.

$$I_d = \frac{2}{3}(a+b)t^3 = \frac{2}{3}(8+12)(0,5)^3 = \underline{\underline{\frac{5}{3} \text{ cm}^4}}.$$

$$I_\omega = \int_{s=0}^s \omega^2 t \, ds = 0,5 \int_{s=0}^s \omega^2 \, ds.$$

$$0 \leq s/r \leq 0,1 \quad I_\omega = 0,5 \int_{0,16}^4 (+19\frac{1}{11}s - 96)^2 \, ds = 7.658 \text{ cm}^6.$$

$$0,1 \leq s/r \leq 0,4 \quad I_\omega = 0,5 \int (+4s - 35\frac{7}{11})^2 \, ds = 1.266 "$$

$$0,4 \leq s/r \leq 0,5 \quad I_\omega = 0,5 \int_{16}^{20} (-7\frac{1}{11}s + 141\frac{9}{11})^2 \, ds = 536 "$$

$$\underline{\underline{9.460 \text{ cm}^6}}$$

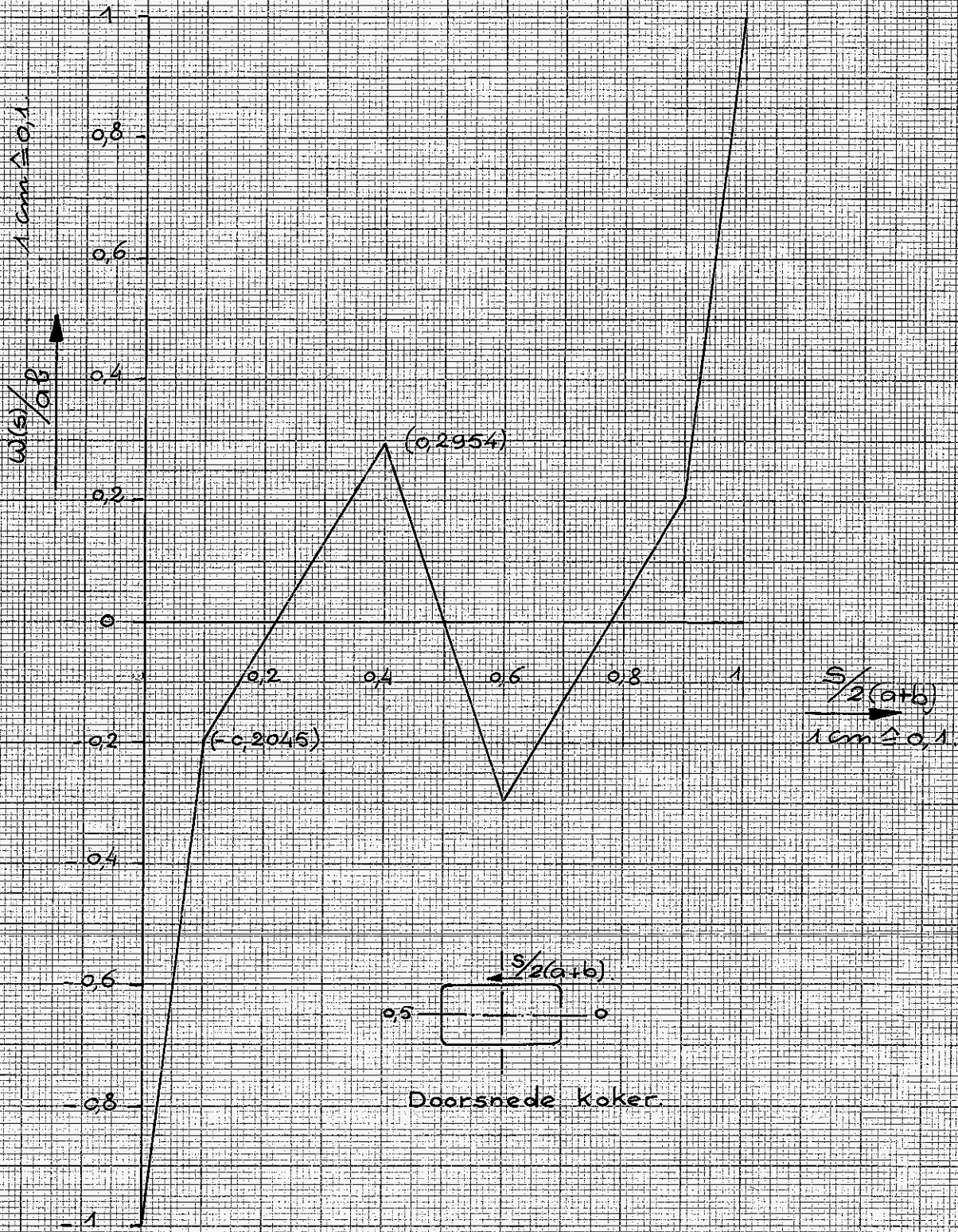
$$\underline{\underline{I_\omega = 2 \cdot 9460 = 18.920 \text{ cm}^6.}}$$

Expliciete uitdrukking voor I_ω .

(Onderstaande uitdrukking geldt voor $t = 0,5 \text{ cm}$ voor een willekeurige t , onderstaande uitdrukking vermenigvuldigen met $2t$).

$$I_\omega = \int_0^{\frac{b}{2}} [-ab + (e+a)s]^2 \, ds + \int_0^a \frac{1}{4} b^2 (s - a + e)^2 \, ds + \int_{-\frac{1}{2}b}^0 e^2 s^2 \, ds$$

Grafiek V



$$I_w = \frac{1}{3(e+a)} \left\{ \frac{b^3}{8} (e-a)^3 + (ab)^3 \right\} + \frac{1}{12} b^2 \left\{ e^3 + (a-e)^3 \right\} + \frac{1}{3} e^2 \frac{1}{8} b^3.$$

Contrôle. $I_w = 15315,6 + 2532,4 + 1072,6 = \underline{\underline{18920,6 \text{ cm}^6}}$.

Het bepalen van S_w als functie van s :

$$0 \leq s/r \leq 0,1 \quad S_w(s) = t \int_{s=0}^s w(s) ds = +0,5 \int_0^s (+19 \frac{1}{11} s - 96) ds$$

s (cm)	S_w (cm ⁴)	s/r	$S_w / (ab)^2$
0	0	0	0
1	-43,23	0,025	$-4,69 \cdot 10^{-3}$
2	-76,92	0,050	$-8,35 \cdot 10^{-3}$
3	-102,07	0,075	$-11,08 \cdot 10^{-3}$
4	-115,68	0,100	$-12,55 \cdot 10^{-3}$

tabel.3.

$$0,1 \leq s/r \leq 0,4 \quad S_w(s) = +0,5 \int_4^s (+4s - 35 \frac{7}{11}) ds$$

s (cm)	S_w (cm ⁴)	s/r	$S_w / (ab)^2$
8	-138,96	0,2	$-15,08 \cdot 10^{-3}$
8,91	-139,80	0,2227	$-15,17 \cdot 10^{-3}$
10	-138,60	0,25	$-15,04 \cdot 10^{-3}$
12	-130,24	0,3	$-14,13 \cdot 10^{-3}$
16	-89,52	0,4	$-9,71 \cdot 10^{-3}$

tabel.4.

$$0,4 \leq s/r \leq 0,5 \quad S_w(s) = +0,5 \int_{16}^s (-7\frac{1}{11}s + 141\frac{9}{11}) ds$$

s (cm)	S_w (cm ⁴)	s/r	$S_w / (ab)^2$
17	-77,02	0,425	$-8,36 \cdot 10^{-3}$
18	-68,06	0,450	$-7,38 \cdot 10^{-3}$
19	-62,64	0,475	$-6,80 \cdot 10^{-3}$
20	-60,76	0,500	$-6,59 \cdot 10^{-3}$

tabel. 5.

zie ook grafiek.

$$\frac{k}{l} = \sqrt{\frac{G}{E} \cdot \frac{J_d}{J_w}}$$

$$E = 21 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\frac{G}{E} = \frac{1}{2(1+\nu)} = \frac{1}{2(1+0,28)} = \frac{1}{2,56}$$

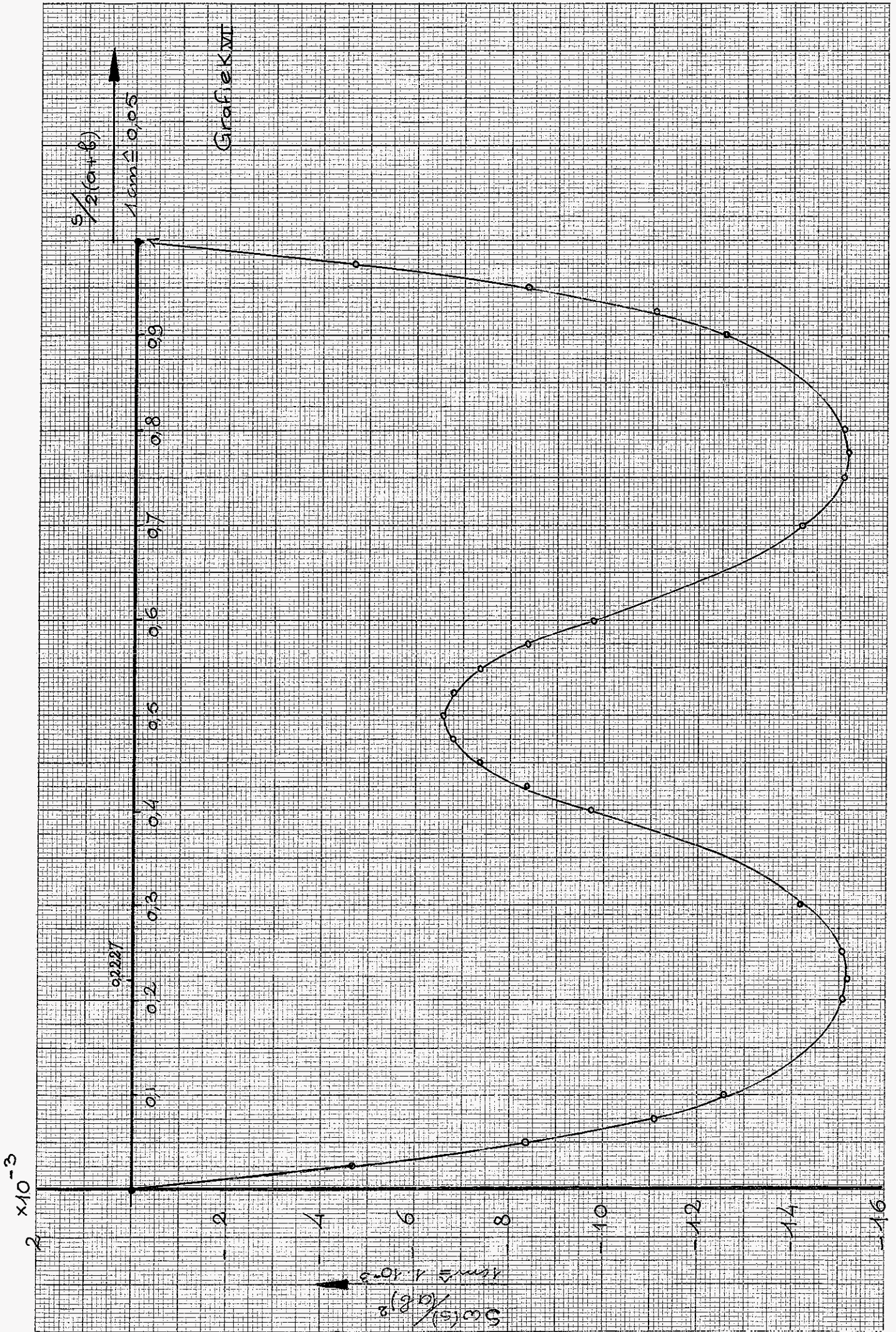
$$\frac{k}{l} = \sqrt{\frac{1}{2,56} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{18920}} = \frac{1}{170,47}$$

$$k = \frac{54,5}{170,47} = 0,319704 \text{ cm.}$$

$$\frac{M}{G \cdot I_d} = \frac{1000}{0,82 \cdot 10^6} \cdot \frac{3}{5} = 0,7317 \text{ cm}^{-1} \text{ voor } M = 10^3 \text{ kgfcm.}$$

Er wordt hier $M = 10^3 \text{ kgfcm}$ ingevuld, omdat dit de bij het experiment gekozen belastingsstap was.

$$\frac{M}{E \cdot I_w} = \frac{1000}{21 \cdot 10^6 \cdot 18920} = 2,5168 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-3}$$



Grafiek VII

In onderstaande tabel zijn opgenomen $\sinh \frac{k}{l}z$ en $\cosh \frac{k}{l}z$ voor verschillende waarden van $\frac{z}{l}$.

De in deze tabel verenigde waarden zijn uitgezet in grafiek en voor de betekenis van l en z zie eventueel de tekeningen op blz.

Tabel

$\frac{z}{l}$	$\frac{k}{l}z$	$\sinh \frac{k}{l}z$	$\cosh \frac{k}{l}z$
0	0	0	1
0,1	0,03197	0,03198	1,00051
0,2	0,06394	0,06398	1,00204
0,3	0,09591	0,09606	1,00460
0,4	0,12788	0,12823	1,00818
0,5	0,15985	0,16045	1,01280
0,6	0,19182	0,19299	1,01845
0,7	0,22379	0,22566	1,02514
0,8	0,25576	0,25846	1,03288
0,9	0,28773	0,29171	1,04168
1,0	0,31970	0,32517	1,05154

tabel. 6.

$$\sinh k = 0,32517$$

$$\cosh k = 1,05154$$

Opmerking.

hier dat,

Als goede benadering geldt

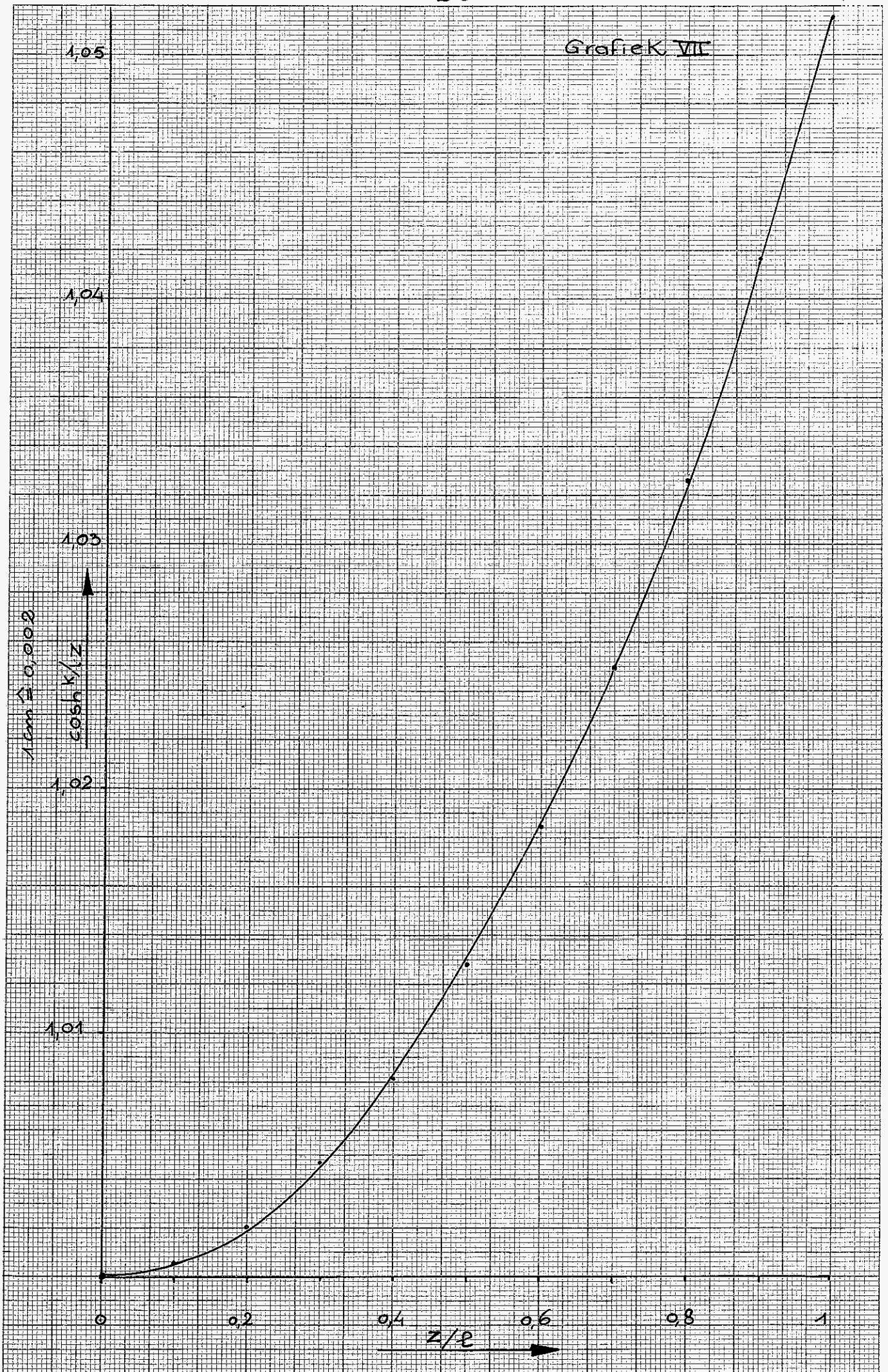
$$\sinh x \approx x + \frac{x^3}{6}$$

$$\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

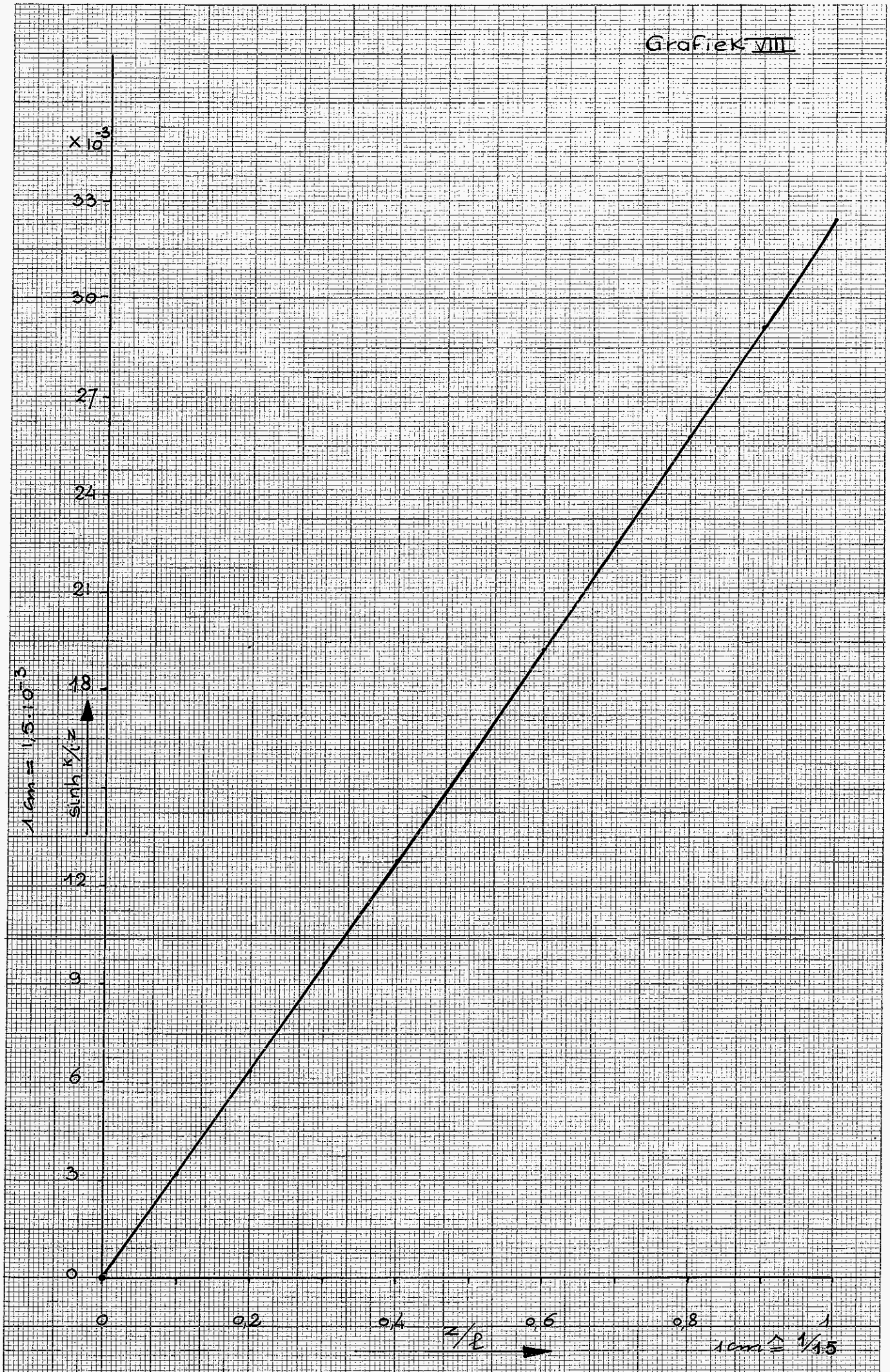
b.v. $\sinh 0,31970 \approx 0,32515$

$\cosh 0,31970 \approx 1,05154$

Grafiek VII



Grafiek VIII



Twee veelvuldig voorkomende termen zijn

$$\alpha = c \cdot \frac{k}{l} \left[\frac{k}{l} \sinh k + \frac{1}{c} \cosh k \right] \quad \text{en}$$

$$\beta = c \left[\frac{k}{l} \sinh k + \frac{1}{c} \cosh k \right]$$

De berekening van de grootte van α , $1/\alpha$ en $1/\beta$ volgt hieronder.

$$\alpha = 13 \cdot \frac{1}{170,47} \left[\frac{1}{170,47} \cdot 0,32517 + \frac{1}{13} \cdot 1,05154 \right] = 6,31394 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{10^3}{6,31394} = 158,3797 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{158,3797}{170,47} = 0,9290767$$

De hoekverdraaiing ν als functie van z is,

$$\nu(z) = \frac{M}{G \cdot I_d} \left[z - \frac{\sinh \frac{k}{l} \cdot z}{c \cdot \frac{k}{l} \left(\frac{k}{l} \sinh k + \frac{1}{c} \cosh k \right)} \right]$$

$$\nu(z) = 0,7317 \cdot 10^{-3} \left[z - 158,3797 \sinh \frac{k}{l} \cdot z \right]$$

z/l	z (cm)	$158,3797 \sinh \frac{k}{l} \cdot z$	$\frac{\nu(z)}{0,7317 \cdot 10^{-3}}$	$\nu(z)$
0	0	0	0	0
0,1	5,45	5,06498	0,38502	$0,28106 \cdot 10^{-3}$
0,2	10,90	10,13313	0,76687	$0,55982 \cdot 10^{-3}$
0,3	16,35	15,21395	1,13605	$0,82932 \cdot 10^{-3}$
0,4	21,80	20,30903	1,49097	$1,08840 \cdot 10^{-3}$
0,5	27,25	25,41202	1,83798	$1,34173 \cdot 10^{-3}$
0,6	32,70	30,5657	2,1343	$1,55804 \cdot 10^{-3}$
0,7	38,15	35,7400	2,4100	$1,75930 \cdot 10^{-3}$
0,8	43,60	40,9348	2,6652	$1,94560 \cdot 10^{-3}$
0,9	49,05	46,2009	2,8491	$2,07984 \cdot 10^{-3}$
1,0	54,50	51,5003	2,9997	$2,18978 \cdot 10^{-3}$

tabel.8.

Wanneer $v(z)$ éénmaal gedifferentieerd wordt naar z , krijgen we:

$$v'(z) = \frac{M}{G \cdot I_d} \left[1 - \frac{\cosh \frac{k}{l} \cdot z}{c \left(\frac{k}{l} \sinh k + \frac{1}{c} \cdot \cosh k \right)} \right]$$

$$v'(z) = 0,7317 \cdot 10^{-3} \left[1 - 0,9290767 \cosh \frac{k}{l} \cdot z \right]$$

z/l	$0,9290767 \cosh \frac{k}{l} z$	$1 - 0,9290767 \cosh \frac{k}{l} z$	$v'(z)$	tabel.g.
0	0,9290767	0,0709233	$5,189458 \cdot 10^{-5}$	
0,1	0,9295505	0,0704495	$5,154790 \cdot 10^{-5}$	
0,2	0,9309720	0,0690280	$5,050779 \cdot 10^{-5}$	
0,3	0,9333505	0,0666495	$4,876744 \cdot 10^{-5}$	
0,4	0,9366765	0,0633235	$4,633380 \cdot 10^{-5}$	
0,5	0,9409689	0,0590311	$4,319306 \cdot 10^{-5}$	
0,6	0,9462182	0,0537818	$3,935214 \cdot 10^{-5}$	
0,7	0,9524337	0,0475663	$3,480426 \cdot 10^{-5}$	
0,8	0,9596247	0,0403753	$2,954261 \cdot 10^{-5}$	
0,9	0,9678006	0,0321994	$2,356030 \cdot 10^{-5}$	
1	0,9769613	0,0230387	$1,685742 \cdot 10^{-5}$	

Na tweemaal differentiëren wordt

$$v''(z) = - \frac{\frac{M}{E \cdot J \omega} \sinh \frac{k}{l} z}{\frac{k}{l} \left[\frac{k}{l} \sinh k + \frac{1}{l} \cosh k \right]}$$

$$v''(z) = - 3,9861 \cdot 10^{-6} \sinh \frac{k}{l} z$$

z/l	$v''(z)$	$v'''(z)$
0	0	$-2,33831 \cdot 10^{-8}$
0,1	$-0,12748 \cdot 10^{-6}$	$-2,33949 \cdot 10^{-8}$
0,2	$-0,25503 \cdot 10^{-6}$	$-2,34307 \cdot 10^{-8}$
0,3	$-0,38290 \cdot 10^{-6}$	$-2,34906 \cdot 10^{-8}$
0,4	$-0,51114 \cdot 10^{-6}$	$-2,35743 \cdot 10^{-8}$
0,5	$-0,63957 \cdot 10^{-6}$	$-2,36823 \cdot 10^{-8}$
0,6	$-0,76928 \cdot 10^{-6}$	$-2,38144 \cdot 10^{-8}$
0,7	$-0,89950 \cdot 10^{-6}$	$-2,39708 \cdot 10^{-8}$
0,8	$-1,03025 \cdot 10^{-6}$	$-2,41518 \cdot 10^{-8}$
0,9	$-1,16279 \cdot 10^{-6}$	$-2,43576 \cdot 10^{-8}$
1	$-1,29616 \cdot 10^{-6}$	$-2,45882 \cdot 10^{-8}$

tabel.10.

$$v'''(z) = - \frac{\frac{M}{E \cdot J \omega} \cosh \frac{k}{l} z}{\frac{k}{l} \left[\frac{k}{l} \sinh k + \frac{1}{l} \cosh k \right]} \quad (\text{zie boven})$$

$$v'''(z) = - 2,338300 \cdot 10^{-8} \cosh \frac{k}{l} z$$

De normaalspanning σ_z (Kgf/cm²) in de
open cilinder
(Theoretisch.)

tabel.11.

$\sigma_{z,s} = -E \cdot v''(z) \cdot \omega(s) = -2,1 \cdot 10^6 \cdot v''(z) \cdot \omega(s) \text{ [Kgf/cm}^2\text{]}$						
z/l	ω_0 - 96 cm ²	$\omega_{0,1}$ - 19,63 cm ²	$\omega_{0,2227}$ 0 cm ²	$\omega_{0,25}$ 4,36 cm ²	$\omega_{0,4}$ 28,36 cm ²	$\omega_{0,5}$ 0 cm ²
0	0	0	0	0	0	0
0,1	- 25,70	- 5,26	0	1,17	7,59	0
0,2	- 51,41	- 10,52	0	2,34	15,19	0
0,3	- 77,19	- 15,79	0	3,51	22,80	0
0,4	- 103,05	- 21,08	0	4,68	30,45	0
0,5	- 128,94	- 26,37	0	5,86	38,10	0
0,6	- 155,09	- 31,72	0	7,05	45,82	0
0,7	- 181,34	- 37,09	0	8,24	53,58	0
0,8	- 207,70	- 42,48	0	9,44	61,37	0
0,9	- 234,41	- 47,95	0	10,65	69,26	0
1,0	- 261,31	- 53,45	0	11,88	77,21	0

De schuifspanning τ (Kgf/cm²) in de open cilinder.

(Theoretisch)

$$\tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$\tau_1 = \frac{E \cdot \nu''(z) S \omega(s)}{t} = 4,2 \cdot 10^6 \nu''(z) S \omega(s)$$

$$\tau_2 = g t \nu' = 0,41 \cdot 10^6 \nu'$$

tabel.12.

$0 \leq \frac{s}{r} \leq 0,1$							
$\frac{z}{l}$	τ_2	$S \omega_0 = 0$		$S \omega_{0,05} = 76,92$		$S \omega_{0,1} = 115,68$	
		τ_1	τ	τ_1	τ	τ_1	τ
0	21,28	0	21,28	7,55	28,83	11,35	32,63
0,1	21,13	0	21,13	7,56	28,69	11,37	32,50
0,2	20,71	0	20,71	7,57	28,28	11,38	32,09
0,3	19,99	0	19,99	7,59	27,58	11,41	31,40
0,4	19,00	0	19,00	7,61	26,61	11,44	30,44
0,5	17,71	0	17,71	7,65	25,36	11,50	29,21
0,6	16,13	0	16,13	7,69	23,82	11,56	27,69
0,7	14,27	0	14,27	7,74	22,01	11,64	25,91
0,8	12,11	0	12,11	7,80	19,91	11,73	23,84
0,9	9,66	0	9,66	7,87	17,53	11,84	21,50
1,0	6,91	0	6,91	7,94	14,85	11,94	18,85

De schuifspanning τ (kgf/cm^2) in de open cilinder (vervolg).

(Voor de berekende schuifspanningen geldt, dat deze met -1 vermenigvuldigd moeten worden bij torsie rechtsom en met $+1$ bij torsie linksom)

tabel.13.

z/R	$0,1 < s/r \leq 0,4$						$0,4 < s/r \leq 0,5$	
	$S_{\omega_{0,2227}} = 1398$		$S_{\omega_{0,3}} = 130,24$		$S_{\omega_{0,4}} = 89,52$		$S_{\omega_{0,5}} = 60,76$	
	τ_1	τ	τ_1	τ	τ_1	τ	τ_1	τ
0	13,72	35,00	12,78	34,06	8,79	30,07	5,96	27,24
0,1	13,74	34,87	12,80	33,93	8,80	29,93	5,97	27,10
0,2	13,76	34,47	12,82	33,53	8,81	29,52	5,98	26,69
0,3	13,79	33,78	12,85	32,84	8,83	28,82	6,00	25,99
0,4	13,83	32,83	12,89	31,89	8,86	27,86	6,01	25,01
0,5	13,90	31,61	12,95	30,66	8,90	26,61	6,04	23,75
0,6	13,98	30,11	13,02	29,15	8,95	25,08	6,07	22,20
0,7	14,07	28,34	13,11	27,38	9,01	23,28	6,11	20,38
0,8	14,18	26,29	13,21	25,32	9,08	21,19	6,16	18,28
0,9	14,30	23,96	13,33	22,99	9,16	18,82	6,22	15,88
1,0	14,43	21,33	13,44	20,45	9,24	16,15	6,27	13,18

De theoretische waarden voor normaal- en schuifspanningen zijn uitgezet in de grafieken I, II, III en IV.

In deze grafieken zijn ook getekend de waarden, die door metingen zijn gevonden.