

# Coördinatentransformaties : de kinematische beschouwing van een robot

**Citation for published version (APA):**

Verbaarschot, B. J. (1986). *Coördinatentransformaties : de kinematische beschouwing van een robot*. (TH Eindhoven. Afd. Werktuigbouwkunde, Vakgroep Produktietechnologie : WPB; Vol. WPA0348). Technische Universiteit Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1986

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

Afdeling der Werktuigbouwkunde  
Technische Universiteit Eindhoven

Vakgroep Productietechniek en Automatisering (WPA)

Coördinatentransformaties:  
de kinematische beschouwing  
van een robot.

door B.J. Verbaarschot  
rapport nr. WPA 0348

verslag van een I1-opdracht  
uitgevoerd in opdracht van

ir. R. Bijl  
hoofd Engineering  
Walker-Hagpu B.V.  
Bladel / Holland

en

prof. ir. J.M. van Bragt

onder begeleiding van

ir. P.W. Koumans  
medewerker vakgroep WPA

# Inhoudsopgave

hst 1	<u>Inleiding</u>	1.
hst 2	<u>Probleemstelling en fundamentele oplossingswijzen</u>	3.
	2.1 Wiskundige formulering	3.
	2.2 Fundamentele oplossingswijzen.	4.
hst 3	<u>De homogene transformatie</u>	10.
	3.1 De homogene transformatiematrix	10.
	3.1.a De rotatiematrix $R$	11.
	3.1.b De translatievector $t$	12.
	3.1.c Het opstellen van de homogene transformatie- matrix	13.
	3.2. De h.t.m. van een robot	14.
	3.3 Orientatie m.b.v. Eulerhoeken.	17.
hst 4	<u>De iteratieve / gelineariseerde methode</u>	19.
	4.1 Geometrische beschrijving	19.
	4.2 De homogene transformatiematrix	20.
	4.3 De Jacobiaanmatrix.	21.
hst 5	<u>De analytisch-geometrische berekeningmethode</u>	26.
	5.1 De robotgeometrie	26.
	5.2 Orientatie en coördinatenberekening	27.
	5.3 De gegeneraliseerde hoeken.	31.

## Hst. 1 Inleiding.

Onder coördinatentransformatie bij industriële robots verstaan we de omrekening van de coördinaten die de gewenste positie en oriëntatie van een voorwerp, vastgehouden door de robot, uitdrukken in een referentiesysteem van de omgeving, naar de coördinaten die de bijbehorende stand van de robot beschrijven in het robotassenstelsel.

Met robotassenstelsel bedoelen we het geheel van "gegeneraliseerde coördinaten" die de ingenomen robotstand volledig bepalen, zoals hoeken rondom de assen bij rotatievrijheidsgraden of lengtes bij translatievrijheidsgraden.

Deze coördinatentransformatie moet voldoende snel gebeuren zodat de rekentijd geen beperking oplegt aan de robotsnelheid. We noemen dit "real-time coördinatentransformatie".

Realttime coördinatentransformatieroutines zijn een essentieel onderdeel van het zgn. off-line-programmeren. Off-line-programmering leent zich tot een meer systematische aanpak en verhoogt in aanzienlijke mate de flexibiliteit. Dit laat toe de robot op te nemen in een CAD-CAM-organisatie.

De real-time transformatie is een zuiver kinematisch probleem. Een volledige controle van de positie, de snelheid en versnelling van het gemanipuleerde voorwerp vraagt om het specificeren van de te volgen weg als functie van de tijd. Het kinematisch omrekenen van deze tijdfunctie tot overeenkomstige tijd-

functies voor elke robotas zal normaal gesproken niet volstaan om te komen tot een perfecte controle vanwege het niet ideaal zijn van de sturingen van de assen. Een optimale controle vraagt om het in rekening brengen van het dynamisch gedrag van de robotconfiguratie. Dit aspect wordt in dit werk niet behandeld.

## Hst. 2 Probleemstelling en fundamentele oplossingswijzen.

Om de positie van een voorwerp in de ruimte mathematisch te beschrijven zijn zes onafhankelijke parameters nodig, drie voor de positie en drie voor de orientatie. Een robot die een voorwerp in alle mogelijke posities moet kunnen brengen moet theoretisch over zes onafhankelijk controleerbare "assen" of vrijheidsgraden beschikken. Het probleem bestaat essentieel uit het formuleren van een verband tussen de parameters die de positie beschrijven enerzijds, en de parameters die de vrijheidsgraden karakteriseren anderzijds.

### 2.1 Wiskundige formulering

We nemen een vast assenstelsel in de ruimte met oorsprong  $s_0$  en assen  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ . De parameters die de positie van een voorwerp in deze ruimte beschrijven, plaatsen we in een vector  $\bar{x}$

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T \quad (2.1)$$

Ook definiëren we een stel coördinaten, verbonden aan de vrijheidsgraden van de robot. We kennen aan de  $i$ -de vrijheidsgraad de coördinaat  $q_i$  toe, en plaatsen deze in de vector  $\bar{q}$

$$\bar{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)^T \quad (2.2)$$

Algemeen kunnen we dan het probleem als volgt stellen: een baan of beweging wordt opgegeven als functie van de tijd in de coördinaten van de vaste wereld. Er wordt gevraagd naar het verloop van de  $n$  vrijheidsgraden als functie van de tijd die hiermee overeenstemmen wanneer de robot de opgegeven beweging uitvoert. Of wiskundig:

$$\text{gegeven: } \bar{x} = \bar{f}(t) \quad (2.3)$$

$$\text{gevraagd: } \bar{q} = \bar{g}(t)$$

## 2.2 Fundamentele oplossingswijzen.

De oplossing van (2.3) vraagt om het neerschrijven van de relatie tussen de robotcoördinaten en de carthesische coördinaten:

$$\bar{q} = G(\bar{x}) \quad (2.4)$$

Dit verband  $G$  is voor de meeste robots niet onmiddellijk expliciet schrijfbaar. Het omgekeerde verband:

$$\bar{x} = F(\bar{q}) \quad (2.5)$$

is dit echter wel. Uitdrukking (2.5) is een stelsel van 6 vergelijkingen, die sterk worden bepaald door de kinematische opbouw van de robot.

Omdat het in het algemeen niet mogelijk is uit  $\bar{x} = F(\bar{q})$  de gezochte betrekking  $\bar{q} = G(\bar{x})$  te destileren, dwingt de noodzaak tot benaderen zich op. In plaats van het gestelde probleem in een eenmalige transformatie op te lossen, trachten we de oplossing te vinden op discrete tijdstippen. Via een

interpolatieprogramma wordt de theoretisch te volgen baan  $\bar{x} = \bar{f}(t)$  benaderd door een verzameling discrete punten  $\bar{x}_i$ . Voor elke  $\bar{x}_i$  dienen de ggeneraliseerde coördinaten  $\bar{q}_i$  berekend te worden als een benadering van  $\bar{q} = \bar{g}(t)$ . Deze formulering laat nu toe het verband  $\bar{x}_i = F(\bar{q}_i)$  voor elk tijdstip algebraïsch op te stellen en naar  $\bar{q}_i$  op te lossen.

Afhankelijk van de robotconfiguratie kunnen soms methodes ontwikkeld worden die het verband  $\bar{q}_i = G(\bar{x}_i)$  impliciet verwezelijken in de vorm van een berekeningsalgoritme. Analytisch-geometrische beschouwingen kunnen de basis vormen voor een dergelijke oplossingswijze.

In het algemeen zullen iteratieve methodes moeten worden toegepast omdat de vergelijking  $\bar{x}_i = F(\bar{q}_i)$  meestal niet-lineair van aard is. De aanwezigheid van rotatievrijheidsgraden speelt hierin een grote rol omdat deze er de oorzaak van zijn dat producten van goniometrische functies in de vergelijkingen voorkomen. Voor robots met drie of meer vrijheidsgraden wordt een real-time verwerking van dergelijke iteratieve methodes problematisch.

Om de iteraties te vermijden lineariseren we het transformatieprobleem rond het werkpunt. Dit doen we door relatie (2.5) te ontwikkelen volgens een Taylorreeks:

$$\bar{x}_i + d\bar{x}_i = F(\bar{q}_i) + \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \right)_i \cdot d\bar{q}_i + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{x}^2} \right)_i \cdot d\bar{q}_i + \dots \quad (2.6)$$



De eerste-orde-benadering geeft ons:

$$d\bar{x}_i = \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \right)_i \cdot d\bar{q}_i = J(\bar{q}_i) \cdot d\bar{q}_i \quad (2.7)$$

$J(\bar{q}_i)$  is de zgn. "Jacobiaanmatrix" met als elementen:

$$J_{k,l} = \frac{\partial x_k}{\partial q_l} \quad k=1,2,\dots,6 \quad l=1,\dots,n \quad (2.8)$$

Vergelijking (2.7) is een lineair stelsel, op te lossen naar  $d\bar{q}_i$ , met de bekende coëfficiëntenmatrix  $J(\bar{q}_i)$

Bij praktische toepassing van deze formules maken we gebruik van een interpolator die de baan  $\bar{x} = \bar{f}(t)$  benadert door een reeks opeenvolgende incrementen  $\Delta \bar{x}_i$ . Vertrekken we uit de beginstand van de robot, waarvan we  $\bar{x}_0$  en  $\bar{q}_0$  kennen, dan stellen we eerst de Jacobiaan  $J(\bar{q}_0)$  op. Dan lossen we het stelsel

$$\Delta \bar{x}_0 = J(\bar{q}_0) \cdot \Delta \bar{q}_0 \quad (2.9)$$

op naar  $\Delta \bar{q}_0$  voor het increment  $\Delta \bar{x}_0$ . Hierdoor zijn de gegeneraliseerde robotcoördinaten na het eerste increment bekend:

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_0 + \Delta \bar{q}_0 \quad (2.10)$$

Voor deze stand kunnen we opnieuw de coëfficiëntenmatrix  $J(\bar{q}_1)$  berekenen en met het increment  $\Delta \bar{x}_1$  het stelsel oplossen naar  $\bar{q}_1$ . Zo genereren we op recursieve wijze de opeen-

volgende vectoren  $\bar{q}_0, \bar{q}_1, \dots$  die een benadering vormen voor de gevraagde functie  $\bar{q} = \bar{q}(t)$ . Er moet opgemerkt worden dat een belangrijk deel van de rekentijd in elke methode gaat naar het opstellen van de matrix  $J(\bar{q}_i)$ .

Een andere formulering ontstaat door vgl. (2.7) te delen door een tijddifferentiaal  $dt$ :

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = J(\bar{q}_i) \frac{dq_i}{dt} \quad \text{of} \quad \bar{x}_i = J(\bar{q}_i) \bar{q}_i \quad (2.11)$$

We werken nu dus met snelheden. De gebruikte interpolator moet dan ook uitgaande van  $\bar{x} = \bar{f}(t)$  een benadering van de baan uitwerken, gebaseerd op segmentjes die met een constante snelheid gedurende een bepaalde incrementduur  $\Delta t$  worden doorlopen. De eigenlijke verwerking verloopt analoog aan die van de incrementenmethode: vertrekken in  $\bar{x}_0$  met bekende  $\bar{q}_0$ , en nadat  $J(\bar{q}_0)$  is berekend valt met de oplossing van het stelsel:

$$\bar{x}_0 = J(\bar{q}_0) \bar{q}_0 \quad (2.12)$$

de volgende stand  $\bar{q}_1$  te berekenen:

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_0 + \bar{q}_0 \cdot \Delta t \quad (2.13)$$

waariut weer de rij  $\bar{q}_0, \bar{q}_1, \dots$  ontstaat als benadering voor de gevraagde functie  $\bar{q} = \bar{q}(t)$ . Deze methode noemen we de snelheidsmethode.

De incrementen- en snelheidsmethodes zijn dus principieel

gebaseerd op dezelfde benadering: door het weglaten van de hogere orde termen van de Taylormreeksontwikkeling lineariseren we het transformatieprobleem; het wordt een eerste-orde-benadering. De oplosbaarheid van de stelsels hangt in sterke mate af van het aantal vrijheidsgraden. Indien  $n < 6$  is het stelsel overbepaald: er zijn teveel vergelijkingen voor de  $n$  te sturen vrijheidsgraden. Indien  $n > 6$  hebben we te maken met redundante robots: er zijn te weinig vergelijkingen. Indien  $n = 6$  is het stelsel algebraïsch oplosbaar als de vierkante matrix  $J(\bar{q}_i)$  niet singulier is. De oplossing is mathematisch schrijfbaar als:

$$\bar{q}_i = J(\bar{q}_i)^{-1} \cdot \bar{x}_i \quad \text{of} \quad \bar{q}_i = J(\bar{q}_i)^{-1} \cdot \bar{x}_i \quad (2.14)$$

Het singulier zijn of worden van  $J(\bar{q}_i)$  is een belangrijk probleem.

We kunnen twee gevallen onderscheiden:

- het geval waarbij de opgave niet alleen wiskundig maar ook fysisch onuitvoerbaar is voor de bereikte robotstand: bijvoorbeeld doordat de realisatie van verschillende componenten van  $\bar{x}$  of  $\dot{\bar{x}}$  tegenstrijdige eisen stelt aan bepaalde robotcoördinaten.
- het geval waarbij fysisch sommige bewegingen wel mogelijk zijn, maar wiskundig onmogelijk lijken.

In het eerste geval kunnen we de singulariteit slechts oplossen door bijkomende assen in te schakelen wanneer de oorspronkelijke ontoereikend lijken (dit komt tot uiting doordat bepaalde  $q_i$ 's grote waarden aannemen). In het tweede

geval kunnen we de singulariteit oplossen door uit de vector  $\vec{x}$  of  $\vec{y}$  de nodige componenten te schrappen en aldus het resterende stelsel oplosbaar te maken.

Een robotarm bestaat uit een aantal elementen, die onderling verbonden zijn door roterende of translaterende verbindingen. De studie van de robot manipulatie bestaat uit het tot stand brengen van het verband tussen de manipulator en het te verplaatsen voorwerp. De verplaatsingsvergelijkingen en de geometrie van de robot kunnen worden beschreven dmv. de homogene-transformatie-matrix.

Hierbij wordt gebruik gemaakt van vector- en matrixalgebra om te komen tot een algemene benadering voor het weergeven van de plaats en de oriëntatie van de schakels tov. een referentie assenstelsel. Daartoe wordt aan elke schakel een (lokaal) assenstelsel bevestigd.

### 3.1 De homogene transformatie matrix.

De homogene transformatie matrix heeft de volgende gedaante

$$T = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbb{R} & \underline{t} \\ \hline (3 \times 3) & (3 \times 1) \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right]_{(4 \times 4)}$$

We kunnen de h.t.m. dus opgebouwd denken uit een rotatie-matrix  $\mathbb{R}$  en een translatie vector  $\underline{t}$ .

### 3.1.a De rotatiematrix $\mathbb{R}$ .

De rotatiematrix  $\mathbb{R}$  komt als volgt tot stand: stel we hebben een vastliggend assenstelsel  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ . Nu verdraaien we een hiermee in het begin samen vallend assenstelsel  $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1$  over een hoek  $\theta$  rond de  $\bar{x}_0$ -as. (fig 3.1) Het is mogelijk om

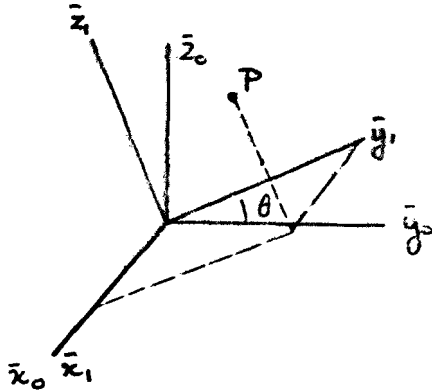


fig 3.1

de positie van punt  $P$  wanneer deze gegeven is tov. het  $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1$ -assenstelsel, uit te drukken tov. het  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ -assenstelsel, want:

$$\bar{x}_0^P = \bar{x}_1^P$$

$$\bar{y}_0^P = \bar{y}_1^P \cos \theta - \bar{z}_1^P \sin \theta$$

$$\bar{z}_0^P = \bar{y}_1^P \sin \theta + \bar{z}_1^P \cos \theta$$

of in matrixnotatie:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_0^P \\ \bar{y}_0^P \\ \bar{z}_0^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1^P \\ \bar{y}_1^P \\ \bar{z}_1^P \end{bmatrix} \rightarrow \underline{X}_0^P = \mathbb{R} \cdot \underline{X}_1^P$$

We vinden dus dat de rotatiematrix bij een rotatie om de X-as over een hoek  $\theta$  gegeven wordt door :

$$TR(\text{Rot}(X, \theta)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

analoog vinden we :

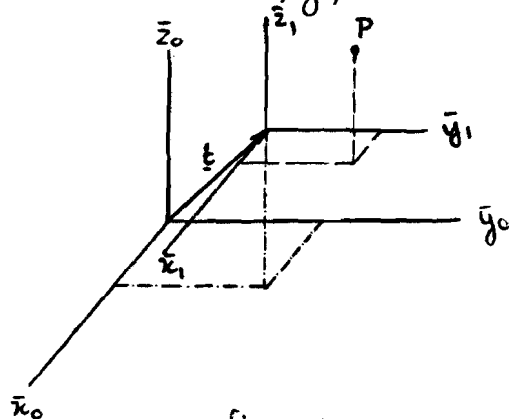
$$TR(\text{Rot}(Y, \theta)) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

en:

$$TR(\text{Rot}(Z, \theta)) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.1. b. De translatievector

Verschuiven we het  $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1$ -assenstelsel uit de vorige paragraaf tov. het  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ -assenstelsel, dan vinden we : (fig. 3.2)



$$\underline{t} = (a, b, c)^T$$

fig 3.2

$$x_0^P = x_1^P + a$$

$$y_0^P = y_1^P + b \quad \rightarrow \quad \underline{x}_0^P = \underline{x}_1^P + \underline{t}$$

$$z_0^P = z_1^P + c$$

### 3.1.c. het opstellen van de homogene transformatiematrix

Het opstellen van de h.t.m. is nu simpelweg het invullen van de juiste rotatiematrix  $\mathbb{R}$  en translatievector  $\underline{t}$  in de h.t.m.

Voor enkel een rotatie (bv. om de  $x_0$ -as) wordt  $T$ :

$$T = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Voor enkel een translatie (bv.  $\underline{t} = (a, b, c)^T$ ) wordt  $T$ :

$$T = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Een combinatie van een rotatie en translatie geeft de volgende  $T$ :



(bijv.)  $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & b \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

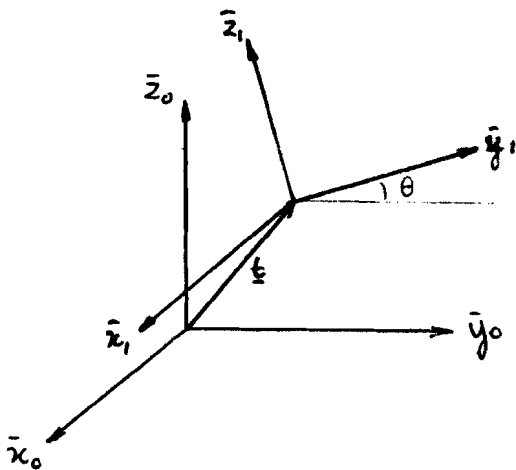


fig 3.3

### 3.2 De homogene transformatiematrix van een robot

Een robot bestaat uit een aantal onderling beweegbaar verbonden schakels. We voorzien elk knooppunt van een assenstelsel en wel op de volgende wijze:

- alle  $x_i$ -assen wijzen in dezelfde richting als de  $x_0$ -as
- roterende knooppunten roteren om de  $Z_i$ -as
- translaterende knooppunten translateren langs de  $Z_i$ -as

We onderscheiden verder de volgende parameters:

- $\theta_i$  : een rotatie  $\theta_i$  om de  $Z_{i-1}$ -as
- $d_i$  : een translatie  $d_i$  langs de  $Z_{i-1}$ -as
- $a_i$  : een translatie  $a_i$  langs de  $X_i$ -as
- $\alpha_i$  : een rotatie  $\alpha_i$  om de  $X_i$ -as, kloksgewijs tussen de  $Z_i$  en de  $Z_{i-1}$ -as.

Het is gebruikelijk dat de geometrische configuratie van een schakel wordt gegeven door de vaste parameters, de schakel-lengte  $a_i$  en de hoek  $\alpha_i$ , en dat de veranderlijke variabelen worden gegeven door de rotatievariabele  $\theta_i$  en de translatie-variabele  $d_i$ .

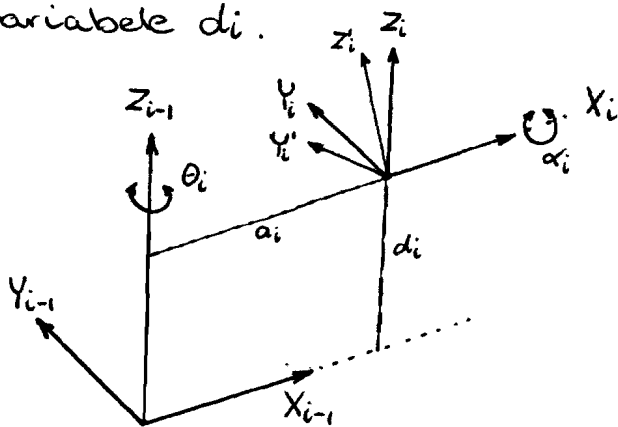


fig 3.4

De h.t.m  $A_i$  geeft nu het verband tussen het  $X_i$ -coördinatenstelsel en het  $X_{i-1}$ -coördinatenstelsel. Zij is :

$$A_i = \text{Rot}(Z_{i-1}, \theta_i) \text{Trans}(0, 0, d_i) \text{Trans}(a_i, 0, 0) \text{Rot}(X_i, \alpha_i)$$

We vinden dan :

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 & \parallel & 1 & 0 & 0 & 0 & \parallel & 1 & 0 & 0 & a_i & \parallel & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 & \parallel & 0 & 1 & 0 & 0 & \parallel & 0 & 1 & 0 & 0 & \parallel & 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \parallel & 0 & 0 & 0 & d_i & \parallel & 0 & 0 & 1 & 0 & \parallel & 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \parallel & 0 & 0 & 1 & 1 & \parallel & 0 & 0 & 0 & 0 & \parallel & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ofwel:

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Het opstellen van de h.t.m.T betekent het uitvermenigvuldigen van de diverse matrices  $A_i$ . Een manipulator met  $N$  graden van vrijheid wordt geheel beschreven door de matrix:

$$T_N = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_N$$

Dit matrixproduct beschrijft de plaats en de orientatie van het aan het werkpunt opgehangen coördinatensysteem, bij gegeven  $q_1, \dots, q_N$

De beschrijving van de oriëntatie van een voorwerp in de ruimte gebeurt door het aanbrengen van een aan het voorwerp verbonden assenstelsel. Een veel gebruikte beschrijvingswijze is die met Eulerhoeken. Het principe is als volgt: vanuit het vaste assenstelsel  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$  roteert men over een hoek rond één van de assen waardoor een nieuw stelsel ontstaat  $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ . Een tweede rotatie wordt nu uitgevoerd rond één van de nieuwe assen waardoor het stelsel  $(\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}'')$  ontstaat. De derde rotatie tenslotte wordt uitgevoerd rond één van deze nieuwe assen totdat dit assenstelsel samenvalt met dat van het voorwerp.

De Eulerhoeken worden als volgt gedefinieerd:

$\alpha$  rond  $\bar{z}_0$

$\beta$  rond  $\bar{x}'$

$\gamma$  rond  $\bar{z}''$

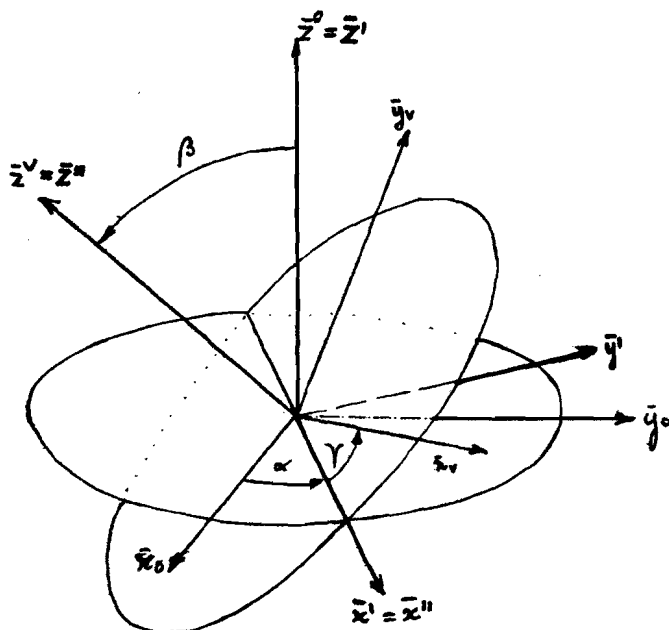


fig. 3.5

De overeenstemmende rotatiematrix  $R$  vinden we als product van de matrices  $R^\alpha$ ,  $R^\beta$  en  $R^\gamma$ , die de overgangsmatrices zijn tussen de opeenvolgende assenstelsels. Het resultaat hiervan is:

$$R = \begin{bmatrix} -\cos\alpha \sin\beta \sin\gamma + \cos\beta \cos\gamma & \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma - \cos\beta \sin\gamma & -\sin\beta \sin\alpha \\ \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma + \sin\beta \cos\gamma & \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - \sin\beta \sin\gamma & -\cos\beta \sin\alpha \\ \sin\alpha \sin\gamma & \sin\alpha \cos\gamma & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

## Hst 4 De iteratieve / gelineariseerde methode.

In dit hoofdstuk bekijken we de mogelijkheid om met behulp van deze methode tot een oplossing te komen voor een bij de firma Walker-Hagou ontwikkelde robot, bijgenaamd "Robbie".

### 4.1 Geometrische beschrijving.

Een geometrische beschrijving van Robbie vindt u in fig. 4.1.

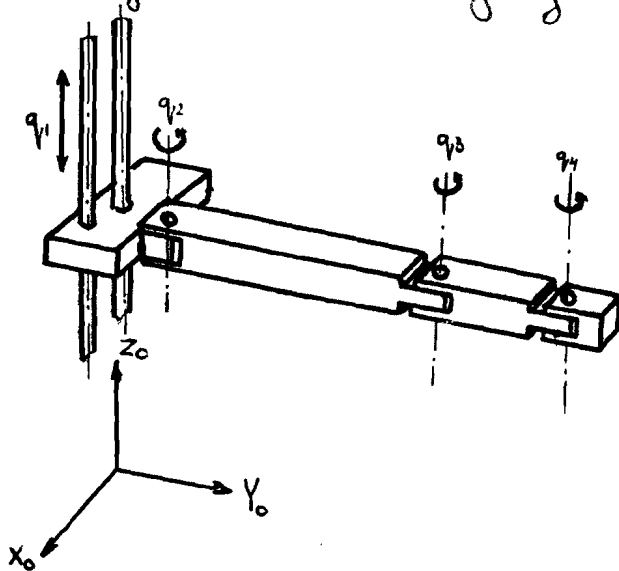


fig. 4.1 schematische beschrijving "Robbie"

Robbie heeft 4 vrijheidsgraden, te weten:

- een translatie langs de  $Z_0$ -as
- een rotatie van de 'schouder' rond de  $Z_0$ -as
- een elleboogrotatie rond een as evenwijdig aan de  $Z_0$ -as
- een polsrotatie rond een as evenwijdig aan de  $Z_0$ -as.

## 4.2 De homogene transformatie matrix

Voor de beschrijving van positie en orientatie van de diverse assenstelsels m.b.v. homogene  $4 \times 4$ -matrices plaatsen we deze zoals in hst. 3 is afgesproken. (fig. 4.2)

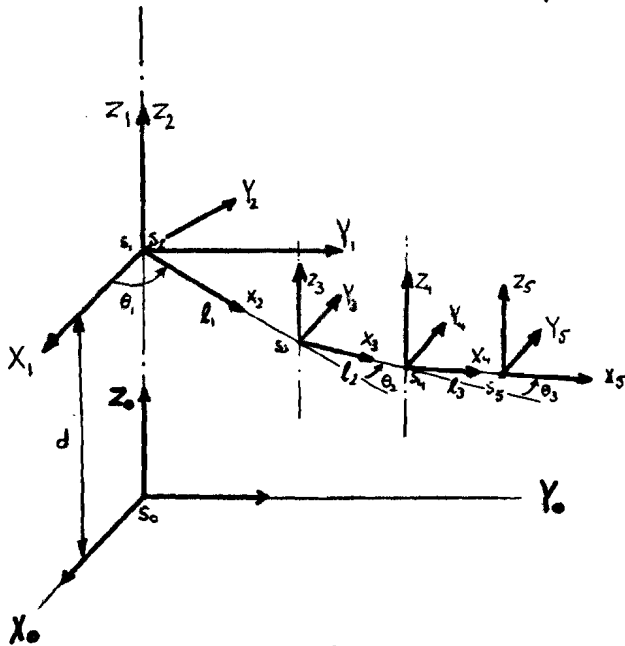


fig. 4.2

We beschouwen punt  $s_5$  als het robotpunt dat volgens een baan moet worden gestuurd. Het assenstelsel van  $s_5$  heeft dezelfde orientatie als dat van  $s_4$ , dit omdat ze deel uitmaken van dezelfde schakel.

Het opstellen van de h.t.m.  $T_0^5$  gebeurt door het opstellen van de diverse matrices  $A_i$  en het uitvermenigvuldigen van deze matrices. Op deze wijze vinden we :

$$T_0^5 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5$$

of uitgeschreven:

$$T_0^5 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} C\theta_{123} & -S\theta_{123} & 0 & l_1 * C\theta_1 + l_2 * C\theta_{12} + l_3 C\theta_{123} & & \\ S\theta_{123} & C\theta_{123} & 0 & l_1 * S\theta_1 + l_2 * S\theta_{12} + l_3 S\theta_{123} & & \\ 0 & 0 & 1 & & d & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & 1 \end{array} \right]$$

met  $C\psi = \cos \psi$ ,  $S\psi = \sin \psi$ ,  $\theta_{123} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ ,  $\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2$ .

### 4.3 De Jacobiaanmatrix.

We vinden nu voor de positie van  $s_5$  tov van het  $X_0$ -stelsel

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4(s_5) \\ y_4(s_5) \\ z_4(s_5) \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{met } T_0^4 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$$

$$\underline{x}_4(s_5) = (l_3 \cos \theta_3, l_3 \sin \theta_3, z_4(s_5))^T$$

waaruit volgt:

$$X_0 = l_1 * C\theta_1 + l_2 * C\theta_{12} + l_3 C\theta_{123}$$

$$Y_0 = l_1 * S\theta_1 + l_2 * S\theta_{12} + l_3 S\theta_{123}$$

$$Z_0 = z_4(s_5) = d$$

Dit hadden we ook uit  $T_0^5$  kunnen halen. Voor de orientatie van de pols gebruiken we de (Euler-)hoek  $\psi$ .



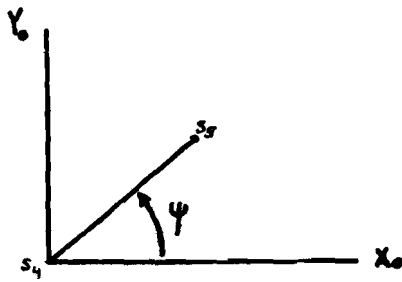


fig. 4.3

Dit is de hoek tussen de lijn door  $s_4$  en  $s_5$  en de positieve  $x_0$ -as, gemeten over de kleinste hoek. Hieruit volgt de relatie:

$$\Psi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

We hebben nu voor de beschrijving van een punt  $s_5$  de parameters

$\underline{x} = (x_0, y_0, z_0, \Psi)^T$  en als generaliseerde coördinaten

$\underline{q} = (d, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . We stellen nu de Jacobiaanmatrix  $J(\underline{q})$

op om zo te komen tot de relatie:

$$\Delta \underline{x} = J(\underline{q}) \cdot \Delta \underline{q}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} & \frac{\partial x_1}{\partial q_4} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial x_4}{\partial q_1} & \dots & \dots & \frac{\partial x_4}{\partial q_4} \end{bmatrix}$$

bv:  $\frac{\partial x_1}{\partial q_1} = \frac{\partial x_0}{\partial d} = 0$

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_2} = \frac{\partial x_0}{\partial \theta_1} = -l_1 * s\theta_1 - l_2 * s\theta_{12} - l_3 * s\theta_{123}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -l_1 \cdot s\theta_1 - l_2 \cdot s\theta_{12} - l_3 \cdot s\theta_{123} & -l_2 \cdot s\theta_{12} - l_3 \cdot s\theta_{123} & -l_3 \cdot s\theta_{123} \\ 0 & l_1 \cdot c\theta_1 + l_2 \cdot c\theta_{12} + l_3 \cdot c\theta_{123} & +l_2 \cdot c\theta_{12} + l_3 \cdot c\theta_{123} & l_3 \cdot c\theta_{123} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Over het algemeen is het onmogelijk om analytisch tot  $J^{-1}$  te komen om zodoende rechtstreeks  $\Delta q = J^{-1}(q) \cdot \Delta X$  op te lossen, terwijl het numeriek bepalen van de inverse enorm veel rekentijd vraagt. Een systematische aanpak voor dit probleem is gegeven door Renaud.

Een andere mogelijkheid is het stelsel vergelijkingen numeriek op te lossen, maar in het algemeen vraagt dit veel te veel wiskundige bewerkingen en de procedure wordt extra ingewikkeld wanneer singulariteiten optreden wanneer het stelsel vergelijkingen door een bepaalde robotstand degenerereert.

In dit geval kunnen we omdat  $q_1$  rechtstreeks gegeven is, omdat dit de enige beweging in het verticale vlak is, de Jacobiaanmatrix versimpelen:

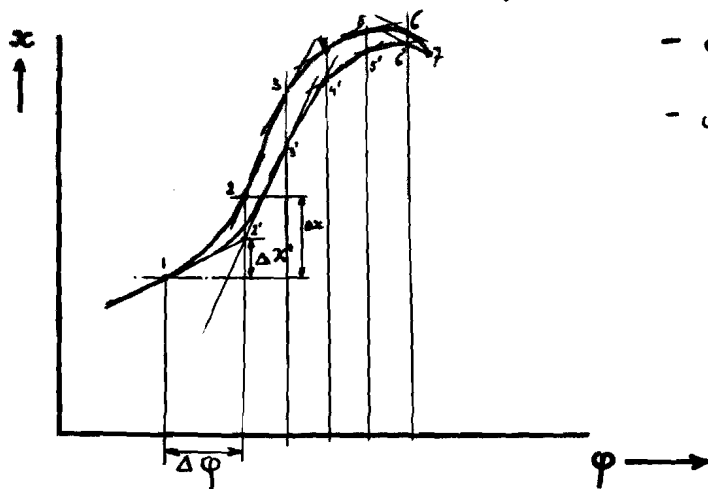
$$\Delta \underline{X} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \cdot s\theta_1 - l_2 \cdot s\theta_{12} - l_3 \cdot s\theta_{123} & -l_2 \cdot s\theta_{12} - l_3 \cdot s\theta_{123} & -l_3 \cdot s\theta_{123} \\ +l_1 \cdot c\theta_1 + l_2 \cdot c\theta_{12} + l_3 \cdot c\theta_{123} & l_2 \cdot c\theta_{12} + l_3 \cdot c\theta_{123} & l_3 \cdot c\theta_{123} \\ & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \end{bmatrix} = J \cdot \Delta$$

waardoor het op te lossen stelsel eenvoudiger wordt; het probleem van singulariteiten blijft bestaan.

Het zal duidelijk zijn dat, ondanks het feit dat we hier te maken hebben met een relatief eenvoudige en kleine Jacobiaanmatrix, er veel rekenwerk verricht moet worden.

Voor elk stapje  $\Delta x$  moet matrix  $J$  gevuld worden en het stelsel opgelost. Singulariteiten moeten onderkend en onderzocht worden, wat een uitgebreider programma vraagt.

Ten aanzien van de nauwkeurigheid kunnen we het volgende opmerken. De Jacobiaanmethode geeft een <sup>lineaire</sup> benadering in het werkpunt m.a.w. er wordt als het ware een raaklijn getrokken aan de baan in het werkpunt.



- gewenste baan (1, 2, ..., 7)
- doorlopen baan (1, 2', ..., 6', 7)

fig. 4.4

Stel we vertrekken vanuit punt 1. Voor een verplaatsing  $\Delta x$  wordt m.b.v. de benadering een bijbehorende  $\Delta \phi$  gevonden. Maar omdat het hier een benadering betreft is de bereikte positie 2' niet gelijk aan de gevraagde positie 2. Er treedt een baanfout op. ( $\epsilon = \Delta x - \Delta x'$ ). Door nu te itereren kan deze baanfout  $\epsilon$  zeer klein worden gemaakt, maar dit betekent het opnieuw opstellen en oplossen van het stelsel vergelijkin-

gen totdat  $\epsilon$  kleiner is dan een gestelde waarde. Dit vraagt natuurlijk zéér veel rekentijd.

Vertrekkend vanuit punt 2' wordt opnieuw een fout gemaakt zodat niet 3 maar 3' wordt bereikt. Wanneer nu bv. punt 6 het te bereiken eindpunt is, dan zien we dat dit punt niet bereikt zal worden. Er ontstaat een zgn. "statische fout".

Voorts zien we ook dat de gevraagde baan niet doorlopen wordt.

Het zal duidelijk zijn dat vergroting van het aantal tussentiggende baanpunten, dus verkleining van de incrementen, de nauwkeurigheid ten goede zal komen. Maar hoe meer punten er berekend moeten worden, hoe harder dat het rekentijdprobleem voelbaar wordt.

## hst 5 De analytisch-geometrische berekeningsmethode

Bepaalde robotconfiguraties laten het toe het transformatieprobleem volledig langs analytisch-geometrische weg op te lossen. In dit hoofdstuk doen we dit voor "Robbie".

### 5.1 De robotgeometrie

Deze is al in paragraaf 4.1 behandeld. Alle daar gehanteerde afspraken blijven ook hier van kracht, evenals de afspraken zoals deze zijn gegeven in fig. 4.2.

## 5.2 Oriëntatie en coördinatenberekening

De pols van "Robbie" heeft slechts één vrijheidsgraad, een rotatie om een as evenwijdig aan de  $Z_0$ -as. We zullen voor de oriëntatie de (Euler)hoek  $\Psi$  gebruiken, dit is de hoek tussen de  $X_0$ -as en de lijn door  $s_4$  en  $s_5$ . Hoek  $\Psi$  wordt over de kleinste hoek gegeven en is positief bij antikloksgewijs draaien.

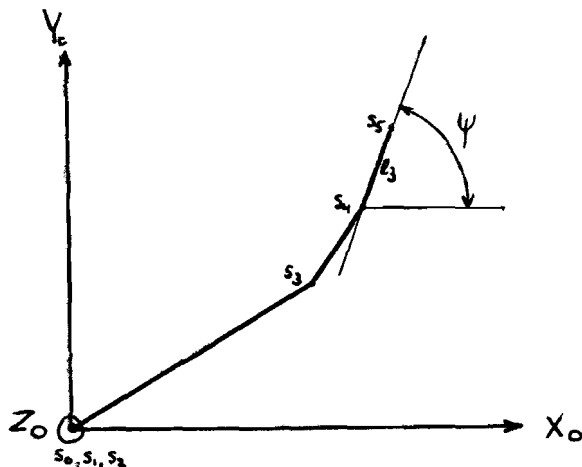


fig 5.1

Wanneer nu de gewenste positie van  $s_5$  is opgegeven, evenals de waarde van hoek  $\Psi$ , dan kan punt  $s_4$  worden uitgerekend:

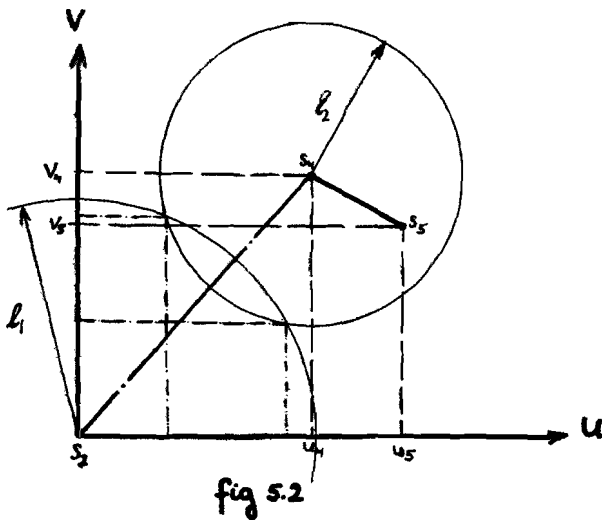
$$x_4 = x_5 - l_3 \cdot \cos \Psi$$

$$y_4 = y_5 - l_3 \cdot \sin \Psi$$

$$z_4 = z_5$$

Hoek  $\Psi$  is begrensd tussen  $-180^\circ \leq \Psi \leq 180^\circ$ .

Nu de positie van  $s_4$  bekend is, kunnen we de positie van  $s_3$  berekenen. We weten dat  $s_2, s_3, s_4$  en  $s_5$  in een horizontaal vlak liggen. Hierdoor herleidt het probleem zich tot een vlak probleem, nl. het zoeken van het snijpunt van een cirkel met middelpunt  $s_4$  en lengte  $l_2$ , en een cirkel met middelpunt  $s_2$  en straal  $l_1$ .



De vergelijking van de cirkel met middelpunt  $s_2$  is :

$$u^2 + v^2 = l_1^2 \quad (1)$$

De vergelijking van de cirkel met middelpunt  $s_4$  is :

$$(u - u_4)^2 + (v - v_4)^2 = l_2^2 \quad (2)$$

Substitutie van (1) in (2) geeft :

$$l_1^2 - 2u \cdot u_4 + u_4^2 - 2v \cdot v_4 + v_4^2 = l_2^2$$

ofwel:  $Au + Bv = C$  met  $A = 2u_4$  (3)

$$B = 2v_4$$

$$C = l_1^2 - l_2^2 + u_4^2 + v_4^2$$

Substitutie van (3) in (1) geeft :

$$u^2 + \left\{ \frac{C - Au}{B} \right\}^2 = l_1^2$$

$$(A^2 + B^2)u^2 - 2ACu + (C^2 - B^2l_1^2) = 0$$

ofwel:  $A'u^2 - B'u + C' = 0$  met  $A' = A^2 + B^2$   
 $B' = 2AC$   
 $C' = C^2 - B^2l_1^2$

Deze vierkantsvergelijking heeft als oplossingen :

$$u_{(1)}^3 = \frac{B' + \sqrt{B'^2 - 4A'C'}}{2A'}$$

$$u_{(2)}^3 = \frac{B' - \sqrt{B'^2 - 4A'C'}}{2A'}$$

Hieruit volgen twee waarden voor  $v$  :

$$v_{(i)}^3 = \frac{C - Au_{(i)}^3}{B} \quad ; \quad i = 1, 2$$

Een geometrische beperking is dat  $v^3 \geq 0$  omdat  $\theta_1$  begrensd is :

$$0 \leq \theta_1 \leq 180^\circ$$



Voor het speciale geval dat  $v_4$  nul is, dus  $B=0$ , is het probleem nog eenvoudiger oplosbaar. Punt  $s_4$  ligt dan op de  $u$ -as en we vinden:

$$u^2 + v^2 = l_1^2 \quad (1')$$

$$(u - u_4)^2 + v^2 = l_2^2 \quad (2')$$

Substitueer (1') in (2'):

$$u_3 = \frac{l_1^2 - l_2^2 + u_4^2}{2u_4}$$

$$\text{uit (1')}: v_3 = \pm \sqrt{l_1^2 - u_3^2}$$

Rekening houdend met de begrenzing van  $\theta_1$ , vinden we:

$$u_3 = \frac{l_1^2 - l_2^2 + u_4^2}{2u_4} \quad \text{en} \quad v_3 = \sqrt{l_1^2 - u_3^2}$$

## 5.3

De gegeneraliseerde hoeken

Nu de coördinaten van de diverse draaipunten bekend zijn, kunnen de gegeneraliseerde coördinaten worden uitgerekend.

De verplaatsing  $d_1$ , een translatie langs de  $Z_0$ -as wordt rechtstreeks gevonden uit de gewenste positie van het eindpunt:

$$\underline{x}_{G_i} = (x_{g_i}, y_{g_i}, z_{g_i})^T$$

waaruit volgt:

$$\Delta q_1 = d_1 = z_{g_i} - z_{g_{i-1}} \quad ; \quad q_1 = z_{g_i}$$

De overige bewegingen vinden namelijk alleen in het horizontale vlak plaats.

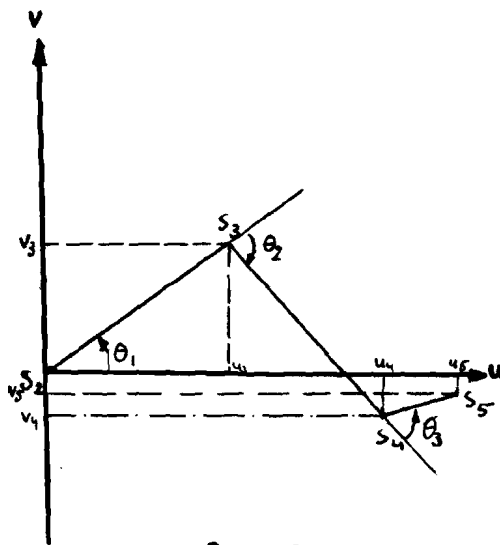


fig. 5.3

De gegeneraliseerde robotcoördinaten  $q_2$ ,  $q_3$  en  $q_4$  welke gerelateerd zijn aan de hoeken  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  en  $\theta_3$  vinden we als volgt:

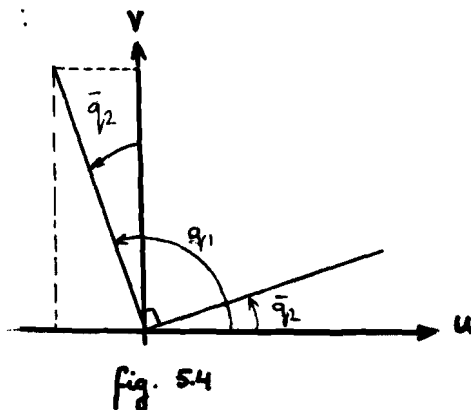
$$q_2 = \arctan \frac{v_3}{u_3} \quad \text{als } u_3 > 0$$

$$q_2 = \arctan \frac{v_3}{u_3} + \pi \quad \text{als } u_3 < 0$$

$$q_2 = \frac{\pi}{2} \quad \text{als } u_3 = 0$$

De hoek  $q_1$  is door de robot begrensd :  $0 \leq q_2 \leq 180^\circ$

De verschillende formules voor de verschillende gevallen zijn een gevolg van het feit dat de arctan-functie steeds hoekwaarden geeft tussen  $-90^\circ$  en  $90^\circ$ . Een mogelijkheid om dit te omzeilen voor  $q_2$  is een hoek  $\bar{q}_2$  te definiëren op de volgende wijze :



$$\bar{q}_2 = \arctan \frac{u_3}{v_3}$$

Nu wordt gebruik gemaakt van de begrenzing van de arctan-functie:

$$q_2 = \frac{1}{2} (1 - \text{sign}(u_3)) \cdot \pi \quad \text{als } v_3 = 0$$

$$q_2 = -\bar{q}_2 + \frac{\pi}{2} \quad \text{als } v_3 > 0$$

Nu berekenen we  $q_3$ :

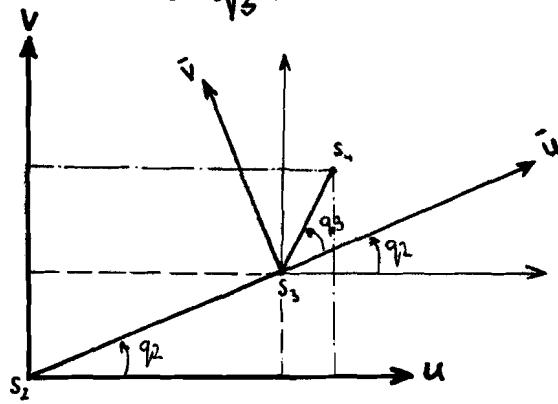


fig. 5.5

Hiertoe berekenen we de coördinaten van punt  $s_4$  t.o.v. het  $\bar{u}$ - $\bar{v}$ -assenstelsel. We vinden:

$$\bar{s}_4 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & \sin q_1 \\ -\sin q_1 & \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 - u_3 \\ v_4 - v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_4 \\ \bar{v}_4 \end{bmatrix}$$

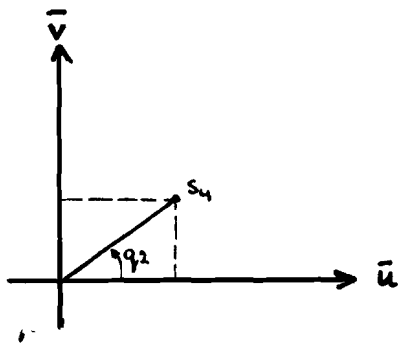


fig. 5.6

Voor  $q_3$  vinden we:

1.  $q_3 = \text{sign}(\bar{v}_4) \cdot \frac{\pi}{2}$  als  $\bar{u}_4 = 0$

2.  $q_3 = \arctan \frac{\bar{v}_4}{\bar{u}_4}$  als  $\bar{u}_4 > 0$

3. Voor  $\bar{u}_4 < 0$  zijn er twee mogelijkheden, nl:

$$a) \bar{v}_4 > 0 : q_3 = \arctan \frac{\bar{v}_4}{\bar{u}_4} + \pi$$

$$b) \bar{v}_4 < 0 : q_3 = \arctan \frac{\bar{v}_4}{\bar{u}_4} - \pi$$

a) en b) zijn samen te vatten als :

$$q_3 = \arctan \frac{\bar{v}_4}{\bar{u}_4} + \text{sign}(\bar{v}_4) * \pi$$

Mogelijkheid 2 en 3. zijn weer samen te vatten als :

$$q_3 = \arctan \frac{\bar{v}_4}{\bar{u}_4} + \frac{1}{2} * (1 - \text{sign}(\bar{u}_4)) * \text{sign}(\bar{v}_4) * \pi$$

Het berekenen van  $q_4$  is wel zeer eenvoudig. Omdat  $q_2, q_3$  en  $\psi$  bekend zijn, volgt  $q_4$  eenvoudigweg uit de relatie :

$$\psi = q_2 + q_3 + q_4$$

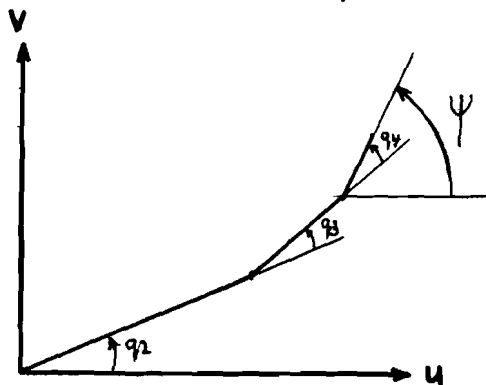


fig 5.7

Er dient nog opgemerkt te worden dat zowel  $q_3$  als  $q_4$  door de robot begrensd zijn :

$$-135^\circ \leq q_3 \leq 135^\circ \quad \text{en} \quad -45^\circ \leq q_4 \leq 45^\circ$$

We hebben nu een aantal betrekkelijk eenvoudige formules verkregen waarmee op een simpele en snelle wijze, gegeven de positie van  $S_5$ , de standen van de diverse robotassen kunnen worden bepaald. Vergelijking van de gewenste standen met de momentane standen geeft de grootte en richting van de noodzakelijke rotaties en/of translaties.

## Literatuurlijst

van Aken, Coördinatentransformaties bij robots.

Dorf, R.C. Robotics and automated manufacturing

Hartley, J. Robots at work

Young, J.F. Robotics

Koren, Y. Robotics for engineers

Paul, R.P. Robot manipulators.

Esmeijer, W.L. Transformatieberekeningen bij robotmanipulators  
(collegedictaat THE)