

# Gebruik van numerieke proefopzetten bij het optimaliseren van konstrukties

**Citation for published version (APA):**

Schoofs, A. J. G. (1986). *Gebruik van numerieke proefopzetten bij het optimaliseren van konstrukties*. (DCT rapporten; Vol. 1986.045). Technische Universiteit Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1986

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

## GEBRUIK VAN NUMERIEKE PROEFOPZETTEN BIJ HET OPTIMALISEREN VAN KONSTRUKTIES.

Ir. A.J.G. Schoofs, universitair docent, Technische Universiteit, Eindhoven.

### 1. INLEIDING

Het numeriek optimaliseren van een mechanisch gedrag van constructies maakt i.h.a. gebruik van twee belangrijke methoden nl.: 1. de eindige elementenmethode (EEM) als flexibel en nauwkeurig modelerings- en analysegereedschap en 2. de mathematische programmering als gestructureerde werkwijze voor het zoeken van een gunstigere set van ontwerpvariabelen.

Bovengenoemde optimaliseringsproblemen zijn vrijwel steeds sterk niet-linear, hetgeen een iteratieve oplossingsmethode vereist: men analyseert de constructie en bepaalt vervolgens een schatting voor betere waarden van de ontwerpvariabelen. Dit proces wordt voortgezet totdat een, i.h.a. lokaal optimum is bereikt. Het eindresultaat van deze werkwijze is wat ons interesseert; de tussenliggende iteratiestappen zijn achteraf van weinig belang.

Indien men ervan uitgaat dat voor het oplossen van het optimaliseringsprobleem meerdere EEM-analyses nodig zijn, is ook een andere aanpak mogelijk. bij die aanpak worden de uit te voeren EEM-analyses vooraf gepland, zowel wat betreft hun aantal als de waarden van de ontwerpvariabelen welke een rol spelen. De resultaten van de uitgevoerde analyses worden m.b.v. regressie-analyse "gecondenseerd" tot een rekenmodel in de vorm van een of meer polynomen.

Voor het plannen en verwerken van de EEM-analyses kan met vrucht gebruik worden gemaakt van de zg. statistische theorie van proefopzetten, welke is ontwikkeld t.b.v. het plannen van omvangrijke fysische experimenten. EEM-analyses zijn te beschouwen als numerieke experimenten, welke kunnen dienen voor het formuleren van een numerieke proefopzet. Het resultaat van zo'n numerieke proefopzet is een efficiënt rekenmodel van de onderzochte constructie. Dergelijke rekenmodellen kunnen als zodanig gebruikt

worden, bijv. op een ontwerpafdeling. Voor ons is vooral van belang de toepassing als analysemoduul in optimaliseringsprogramma-tuur.

In dit artikel wordt kort ingegaan op zowel de iteratieve optimalisering als op de statistische theorie van proefopzetten. Vervolgens komen modificaties van deze theorie aan de orde welke nodig en nuttig zijn t.b.v. numerieke proefopzetten en worden argumenten gegeven voor de integratie ervan in optimaliserings-programmatuur. Tenslotte worden enkele toepassingen behandeld alsmede de daarbij bereikte resultaten.

## 2. DE ITERATIEVE OPTIMALISERINGSPROCEDURE

We beginnen dit hoofdstuk met een algemene formulering van het optimaliseringsprobleem en geven vervolgens enige kenmerken van algoritmen voor de oplossing ervan [1], [2]. Daarna worden de redenen voor het gebruik van de elementenmethode als analyse-module besproken, alsmede aspecten van de relatie tussen een elementenmodel en de ontwerpvariabelen. Tenslotte volgen enkele relaties voor het berekenen van gevoeligheden van de doelfunctie en de beperkingen.

### Algemene formulering

We veronderstellen dat de beschouwde konstruktie eenduidig beschreven kan worden door een kolommatrix  $\underline{x}$ :

$$\underline{x}^T = (x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

waarin  $x_i$ ,  $i=1, \dots, n$  de zogenaamde ontwerpvariabelen zijn. Een optimaliseringsprobleem met beperkingen kan dan als volgt worden geformuleerd:

Zoek een verzameling ontwerpvariabelen  $\underline{x}$  zodanig dat:

$$\text{de doelfunctie } F(\underline{x}) \text{ minimaal wordt} \quad (2)$$

onder de ongelijkheidsbeperkingen:

$$g_j(\underline{x}) \leq 0 \quad , \quad j=1, \dots, m, \quad (3)$$

onder de gelijkheidsbeperkingen:

$$h_k(\underline{x}) = 0 \quad , \quad k=1, \dots, l \quad (4)$$

en de ontwerpbeperkingen:

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u, \quad i=1, \dots, n \quad (5)$$

De ontwerpvariabelen  $\tilde{x}$  kunnen zeer verschillende parameters van de konstruktie omvatten zoals:

- mechanische en fysische materiaaleigenschappen;
- de topologie, dat is het geheel van verbindingen tussen de konstruktie-elementen onderling en tussen de konstruktie en de omgeving;
- gegevens m.b.t. de vorm en de afmetingen van de konstruktie.

De doelfunctie  $F(\tilde{x})$  is gerelateerd aan de meest belangrijke eigenschap van de konstruktie (vaak het gewicht), of zij kan gevormd worden door een gewogen som van meerdere eigenschappen. De keuze van de weegfactoren dient zorgvuldig te geschieden, daar die de uitkomst van het optimaliseringsprobleem in hoge mate beïnvloed. Een moeilijkheid daarbij is dat de te maken keuzen vaak afhankelijk zijn van waarde-oordelen.

De ongelijkheidsbeperkingen  $g_j(\tilde{x})$  omvatten begrenzungen m.b.t. het gedrag van de konstruktie zoals maximum toelaatbare spanningen, minimum kniklast, laagste eigenfrequentie enz.

De gelijkheidsbeperkingen  $h_k(\tilde{x})$  kunnen bestaan uit een set expliciet gegeven relaties tussen de ontwerpvariabelen (zij kunnen dan eventueel gebruikt worden voor het reduceren van het aantal ontwerpvariabelen); meestal worden de gelijkheidsbeperkingen gevormd door een impliciet stelsel van analyse-vergelijkingen, welke gebruikt worden voor het berekenen van het gedrag van de konstruktie.

De ontwerpbeperkingen  $x_i^l$  en  $x_i^u$  zijn expliciete begrenzungen van het gebied waarbinnen de ontwerpvariabelen kunnen variëren. Deze begrenzungen volgen bijvoorbeeld uit beschouwingen m.b.t. het kunnen functioneren, de maakbaarheid, en de esthetica van de konstruktie.

De doelfunctie  $F$  en de beperkingen  $g_j$  en  $h_k$  kunnen zowel lineaire als niet-lineaire functies zijn van de ontwerpvariabelen  $\tilde{x}$ .

### Oplossingsalgorithme

Bij de meeste optimaliseringsalgoritmen dient een startoplossing  $\tilde{x}^0$  te worden gegeven; dit hoeft niet altijd een toelaatbare oplossing te zijn, d.w.z. een oplossing welke geen der beperkingen (3), (4) of (5) geweld aandoet. Sommige oplossingsalgoritmen verlopen in twee fasen: in de eerste fase wordt een toelaatbare oplossing bepaald terwijl in de tweede fase de oplossing wordt geoptimaliseerd.

Eén iteratiestap in het optimaliseringsproces luidt in het algemeen:

$$\underline{x}^q = \underline{x}^{q-1} + \alpha^* \underline{s}^q \quad (6)$$

waarin  $q$  het iteratienummer is en  $\underline{s}^q$  is een zoekrichtingsvector in de ruimte welke opgespannen wordt door de ontwerpvariabelen  $\underline{x}$ . De scalar  $\alpha^*$  bepaalt de stapgrootte in de richting  $\underline{s}^q$ .

Het uitvoeren van de iteratiestap (6) bestaat uit twee gedeelten:

1. Het bepalen van een geschikte zoekrichting  $\underline{s}^q$ . Deze zoekrichting moet zodanig zijn dat, uitgaande van de geldende oplossing en gaande in de richting van  $\underline{s}^q$ , het ontwerp in eerste instantie toelaatbaar blijft en de doelfunctie  $F$  afneemt. Om dit te bereiken worden in de meest efficiënte optimaliseringsalgoritmen gevoeligheden berekend, d.w.z. partiële afgeleiden van de doelfunctie en de beperkingen naar de ontwerpvariabelen.
2. Het bepalen van de scalar  $\alpha^*$  zodanig dat, gaande in de zoekrichting  $\underline{s}^q$ , de doelfunctie  $F$  minimaal wordt.

Voor het uitvoeren van de iteratiestap (6) kan een groot aantal mathematische programmeringsmethoden worden gebruikt, zowel lineaire als niet-lineaire methoden. Diverse software bibliotheken bevatten subroutines welke als bouwstenen voor optimaliseringsmethoden kunnen dienen.

Een veel gebruikte methode voor het optimaliseren van constructies bestaat uit het oplossen van een reeks van lineaire programmeringsproblemen, de z.g. sequentiele lineaire programmeringsmethode (SLP). Bij die methode wordt het optimaliseringsprobleem gelineairiseerd om de geldende oplossing  $\underline{x}^{q-1}$  in een door z.g. "move limits" begrensd gebied. Binnen dat gebied wordt vervolgens via een lineair programmeringsalgoritme de beste oplossing bepaald. Deze werkwijze wordt herhaald totdat voldaan wordt aan een of ander stopkriterium.

#### De elementenmethode en de koppeling met ontwerpvariabelen.

De eindige elementenmethode heeft de volgende belangrijke voordelen om gebruikt te worden als analysemoduul in computer programma's voor numerieke optimalisering:

1. Door de grote variëteit aan elementtypen en verbindingen tussen elementen kunnen de meest uiteenlopende constructies op een flexibele wijze gemodelleerd worden. De grote commerciële EEM-programmapakketten bevatten voorts uitgebreide analyse-mogelijkheden zoals voor statische, dynamische en stabiliteitsproblemen.

2. De numerieke nauwkeurigheid van de verkregen oplossing kan eenvoudig worden beïnvloed door het wijzigen van het elementenmodel, in het bijzonder door het kiezen van geschikte elementafmetingen. In optimaliseringsproblemen is men, in elk geval per iteratiestap, geïntereseerd in slechts kleine verbeteringen van de konstruktie, hetgeen inhoudt dat realistische modellering en nauwkeurige analyse van het grootste belang zijn.

Een duidelijk nadeel van het gebruik van de elementenmethode t.o.v. een analytische aanpak is de in het algemeen vrij lange rekentijd, zeker als men bedenkt dat daarmee in een iteratief oplossingsproces wordt geopereerd. De bovengenoemde voordelen van de elementenmethode wegen echter meestal op tegen dit nadeel.

Een belangrijk probleem in de optimaliseringsprocedure wordt gevormd door de koppeling tussen de verzameling ontwerpvariabelen  $x$  en het eindige elementenmodel. De ontwerpvariabelen zijn gebruiker-gericht terwijl het elementenmodel computer-gericht is. Een bekende, maar weinig gebruikersvriendelijke, oplossing van dit probleem bestaat in het toepassen van door de gebruiker te verschaffen subroutines, waarin voor een bepaald probleem bovengenoemde koppeling is vastgelegd. In de grote commerciële EEM-pakketten begint het concept van ontwerpvariabelen een plaats te krijgen, zij het vooralsnog als eenvoudige variabelen in de vorm van elementparameters, zoals plaatdikten e.d.

Op het gebied van computer graphics vindt momenteel een snelle ontwikkeling plaats van z.g. "solid modelling" programma's. Deze ontwikkeling kan van groot belang zijn voor de verdere ontwikkeling van optimaliseringsprogrammatuur. Immers de invoergegevens voor "solid modellers" zijn veel meer gebruiker gericht dan een elementenmodel, terwijl de koppeling tussen een "solid models" en elementenmodellen reeds gerealiseerd is.

#### Berekenen van gevoeligheden.

Zoals reeds gezegd verstaan we onder gevoeligheden partiële afgeleiden van de doelfunctie  $F$  en/of de beperkingen naar de ontwerpvariabelen. Voor de doelfunctie kunnen deze gradiënten vaak rechtstreeks numeriek benaderd worden d.m.v. een kleine variatie (perturbatie) van elk der ontwerpvariabelen. Met  $x^q$  als de huidige verzameling ontwerpvariabelen geldt voor  $i=1, \dots, n$ :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_q \approx \frac{F(x_1^q, \dots, x_i^q + \delta x_i, \dots, x_n^q) - F(x^q)}{\delta x_i} \quad (7)$$

waarin  $\delta x_i$  een kleine variatie is van  $x_i$ .

Voor het bepalen van de gevoeligheden van de beperkingen is het meestal nodig eerst gevoeligheden van de verplaatsingen te berekenen, aangezien de meeste beperkingen direct gerelateerd zijn aan de verplaatsingen. Als voorbeeld beschouwen we eerst een statisch lineair EEM-probleem beschreven door de matrix vergelijking

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{P} \quad (8)$$

waarin  $\underline{K}$ : de stijfheidsmatrix van de constructie  
 $\underline{u}$ : een kolommatrix met de onbekende verplaatsingen  
 $\underline{P}$ : een kolommatrix met belastingsgrootheden

Differentiëren van (8) naar de ontwerpvariabelen geeft:

$$\frac{\partial \underline{K}}{\partial x_i} \underline{u} + \underline{K} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial \underline{P}}{\partial x_i} \quad , \quad i=1, \dots, n \quad (9)$$

Vermenigvuldiging met  $\underline{K}^{-1}$  en een andere rangschikking geeft:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} = \underline{K}^{-1} \left[ \frac{\partial \underline{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial \underline{K}}{\partial x_i} \underline{u} \right] \quad , \quad i=1, \dots, n \quad (10)$$

De gevoeligheden in het rechterlid van (10) kunnen eenvoudig d.m.v. een perturbatiemethode (zoals in (7)) worden berekend. Als we aannemen dat in een voorafgaande analyse  $\underline{K}^{-1}$ , of liever: de gedecomposeerde van  $\underline{K}$  is berekend, dan kunnen derhalve via (10) de gevoeligheden van de verplaatsingen op een efficiënte wijze worden berekend. Voor een lineair elastische, dynamisch belaste constructie kan voor de gevoeligheden van de eigenfrequenties  $\omega_j$  de volgende relatie worden afgeleid:

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = \frac{\underline{v}_j^T \left[ \frac{\partial \underline{K}}{\partial x_i} - \omega_j^2 \frac{\partial \underline{M}}{\partial x_i} \right] \underline{v}_j}{2\omega_j \underline{v}_j^T \underline{M} \underline{v}_j} \quad (11)$$

waarin  $\underline{K}$  de stijfheidsmatrix en  $\underline{M}$  de massamatrix is;  $\underline{v}_j$  is de met de eigenfrequentie  $\omega_j$  gekoppelde eigenvector. Ook hier kunnen de gevoeligheden van  $\underline{K}$  en  $\underline{M}$  d.m.v. de perturbatiemethode berekend worden en wordt gebruik gemaakt van de resultaten ( $\omega_j$  en  $\underline{v}_j$ ) van de voorafgaande EEM-analyse.

Indien de koppeling tussen de ontwerpvariabelen en het EEM-model in de betreffende programmatuur gerealiseerd is, is het nog slechts een kleine stap om gevoeligheden zoals in (7), (10) en (11) als standaard uitvoer uit EEM-analyses te verkrijgen. Dit

zal het optimaliseren van konstrukties, d.m.v. het efficiënt uitvoeren van gevoeligheidsanalyses, binnen het bereik brengen van een grote groep ontwerpers.

### 3. DE STATISTISCHE THEORIE VAN PROEFOPZETTEN

De ontwikkeling van de statistische theorie van proefopzetten (STPO) is rond 1960 gestart als een methode voor het plannen van fysische experimenten alsmede het analyseren van de meetresultaten, [3], [4], [5], [6], [7]. Wij gebruiken werkwijzen uit deze theorie, tezamen met de iteratieve optimaliseringsprocedure. Deze toepassing kan gezien worden als planning en evaluatie van numerieke experimenten in de vorm van EEM-analyses. In afwijking van de in de literatuur gebruikelijke terminologie, zullen wij STPO beschrijven in notaties zoals gebruikt bij de iteratieve optimaliseringsprocedure. Ook wordt een nuttige uitbreiding van STPO aangestipt, nl. het gebruik van gevoeligheden.

#### Probleemformulering

Voor een konstruktie welke eenduidig kan worden beschreven door  $n$  ontwerpvariabelen volgens (1), zoeken we relaties voor bepaalde eigenschappen van die konstruktie in de vorm

$$y_j = y_j(\underline{x}) \quad j=1, \dots, m \quad (12)$$

in een begrensde gebied

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad i=1, \dots, n \quad (13)$$

De betreffende eigenschappen kunnen betrekking hebben op het gewicht van de konstruktie, spanningen en verplaatsingen in bepaalde punten enz., kortom zij kunnen bestaan uit de doelfunctie en de beperkingen in een optimaliseringsprobleem. In het hierna volgende zullen wij ons beperken tot slechts één eigenschap en we laten de index  $j$  in (12) weg.

#### Lineair model

Voor het bepalen van de relatie

$$y = y(\underline{x}) \quad (14)$$

formuleren we een zg. lineair model

$$y = \beta_1 f_1(\underline{x}) + \beta_2 f_2(\underline{x}) + \dots + \beta_k f_k(\underline{x}) + e \quad (15)$$

waarin



- $\beta_i$ ,  $i=1, \dots, k$ , onbekende parameters zijn waarvoor schattingen gemaakt zullen worden; het model is lineair in de  $\beta$ 's.  
 $f_i$ ,  $i=1, \dots, k$ , bekende gekozen functies zijn van  $x$ ; we kunnen zowel lineaire als niet-lineaire functies kiezen.  
 $e$  : een variabele welke in het geval van fysische experimenten een stochastische afwijking voorstelt; in het geval van deterministische EEM-berekeningen stelt  $e$  een modelfout voor.

### Proefopzet

De formulering van een proefopzet houdt het maken in van een numeriek "meetprogramma", dat bestaat uit een aantal uit te voeren EEM-analyses. Het formuleren van de proefopzet houdt concreet in:

1. de keuze van discrete waarden (niveau's) voor alle ontwerpvariabelen  $x_i$ ,  $i=1, \dots, n$ .
2. de keuze van bepaalde combinaties van niveau's van verschillende  $x_i$ 's: elke combinatie vormt één specifiek ontwerp punt en vereist één uit te voeren EEM-analyse.

### Schatten van de parameters $\beta$

Indien we in de door de ontwerpvariabelen opgespannen ruimte  $p$  punten nemen gespecificeerd door de kolommatrices

$$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_p \quad (16)$$

en we analyseren de konstruktie in deze punten, dan volgt uit (15)

$$y(\underline{x}_j) = \beta_1 f_1(\underline{x}_j) + \dots + \beta_k f_k(\underline{x}_j) + e_j, \quad j=1, \dots, p \quad (17)$$

Ofwel in matrixvorm

$$\underline{y} = X\beta + \underline{e} \quad (18)$$

waarin:

$X$  : een  $p \times k$  zg. ontwerpmatrix is met als componenten:

$$X_{ti} = f_i(\underline{x}_t), \quad t=1, \dots, p; \quad i=1, \dots, k$$

$\underline{y}$  : kolommatrix met  $p$  waarnemingen van  $y$

$\beta$  : kolommatrix met  $k$  te bepalen parameters

$\underline{e}$  : kolommatrix met  $p$  afwijkingen

In het algemeen is het aantal waarnemingen  $p$  groter dan het aantal parameters  $k$ . Voor het bepalen van de onbekende parameters kan dan gebruik worden gemaakt van de kleinste-kwadraten-methode, waarbij de restkwadratensom  $KS_r$  wordt geminimaliseerd volgens:

$$KS_r = (\underline{y} - X\hat{\underline{\beta}})^T (\underline{y} - X\hat{\underline{\beta}}) \rightarrow \min. \quad (19)$$

N.B. met  $\hat{\quad}$  duiden we een schatting van een bepaalde grootheid aan; derhalve is  $\hat{\underline{\beta}}$  de schatting van  $\underline{\beta}$ .

Nul stellen van  $\frac{\partial KS_r}{\partial \beta_i}$ ,  $i=1, \dots, k$  geeft een stelsel van  $k$  lineaire

vergelijkingen in  $\hat{\underline{\beta}}$ :

$$(X^T X) \hat{\underline{\beta}} = X^T \underline{y} \quad (20)$$

waaruit de schatters  $\hat{\underline{\beta}}$  kunnen worden bepaald indien  $(X^T X)$  regulier is. Een reguliere matrix  $(X^T X)$  kan worden verkregen door een geschikte keuze van de proefopzet. Indien we aannemen dat  $(X^T X)$  regulier is, volgt uit (20)

$$\hat{\underline{\beta}} = (X^T X)^{-1} X^T \underline{y} \quad (21)$$

Substitutie van (18) in (21) geeft:

$$\hat{\underline{\beta}} = \underline{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T \underline{e} \quad (22)$$

In het geval van fysische experimenten waar de verwachte waarde van  $\underline{e}$

$$E[\underline{e}] = \underline{0} \quad (23)$$

zijn de schatters  $\hat{\underline{\beta}}$  zuiver, want uit (22) en (23) volgt:

$$E[\hat{\underline{\beta}}] = \underline{\beta} \quad (24)$$

Voor deterministische EEM-analyses is echter

$$E[\underline{e}] \neq 0 \quad (25)$$

en zijn de geschatte parameters  $\hat{\underline{\beta}}$  met een systematische fout behept. Desalniettemin is het gebleken dat het op deze wijze schatten van  $\underline{\beta}$  voor het bepalen van een bruikbare relatie  $y=y(x)$  zeer wel mogelijk is. Gebruik makend van de geschatte parameters  $\hat{\underline{\beta}}$  kan een schatting  $\hat{y}$  van de eigenschap  $y$  berekend worden uit:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_1 f_1(\underline{x}) + \dots + \hat{\beta}_k f_k(\underline{x}) \quad (26)$$

Rekenmodellen zoals in (26) zullen wij aanduiden als "regressie-modellen".

### Gebruik van gevoeligheden voor het schatten van $\beta$

Differentiëren van het lineaire model (15) naar de ontwerpvariabelen geeft

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \beta_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \beta_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial e}{\partial x_i} \quad i=1, \dots, n \quad (27)$$

In het voorgaande zagen we dat in de EEM gevoeligheden relatief eenvoudig kunnen worden berekend. Onze ervaring is dat het aldus berekenen van n gevoeligheden van een bepaalde grootte, slechts een deel kost van de rekentijd voor het berekenen van die grootte zelf. Derhalve kan (27) samen met (15) met voordeel gebruikt worden voor het schatten van de parameters  $\beta$ .

Daartoe wordt het stelsel (18) uitgebreid met de volgende p\*n vergelijkingen

$$\frac{\partial y(x_j)}{\partial x_i} = \beta_1 \frac{\partial f(x_j)}{\partial x_i} + \dots + \beta_k \frac{\partial f_k(x_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial e}{\partial x_i} \quad (28)$$

$$i=1, \dots, n \quad ; \quad j=1, \dots, p$$

Doordat er nu veel meer gegevens ter beschikking staan voor het schatten van  $\beta$ , maakt het gebruik van (28) het mogelijk om een aantal in een numerieke proefopzet uit te voeren EEM-analyses drastisch te reduceren.

Er is nog een belangrijk tweede voordeel van het mede gebruiken van gevoeligheden voor het schatten van het regressiemodel. De partiële afgeleiden van het regressiemodel blijken dan op hun beurt van "goede kwaliteit" te zijn en als zodanig bruikbaar in bijvoorbeeld efficiënte optimaliseringsalgoritmen zoals gradiënmethoden. Anders gezegd: indien geen gevoeligheden worden gebruikt voor het schatten van het regressiemodel, zijn de partiële afgeleiden van het regressiemodel meestal onbruikbaar.

### Keuze van het model

De functies  $f_i(\underline{x})$  welke in (14) voorkomen zijn meestal van de vorm

$$f_i(\underline{x}) = \prod_{j=1}^n x_j^{\exp_j} \quad (29)$$

waarin  $\exp_j$  elke waarde kan hebben in de reeks

$$\text{EXP}_j = 0, 1, \dots, m \quad (30)$$

vooropgesteld dat alle functies  $f_i(x)$  verschillend zijn. Het model (15) wordt dan een polynoom van de orde  $m$ . In het algemeen is de hoogste exponent niet dezelfde voor alle ontwerpvariabelen in het model.

Deze exponenten worden afgestemd op het verwachte gedrag van de konstruktie, waarbij gebruik gemaakt wordt van ervaring en/of van oriënterende berekeingen.

#### Formulering van de proefopzet

Zoals reeds gezegd houdt het formuleren van de proefopzet in het doen van keuzes voor niveau's van ontwerpvariabelen en keuzen voor combinaties van die niveau's. We gaan als volgt te werk. Eerst wordt het gebied geschat dat voor elk der ontwerpvariabelen van belang is. Ook hier wordt gebruik gemaakt van ervaring en/of van oriënterende berekeningen. De range van elk der ontwerpvariabelen wordt verdeeld in een aantal intervallen van meestal gelijke lengte, resulterend in een aantal niveau's van de betreffende ontwerpvariabele. Dat aantal dient uiteraard afgestemd te worden op de orde van die ontwerpvariabele in het model en op het feit of wel of geen gebruik wordt gemaakt van gevoeligheden voor het schatten van de parameters  $\beta$ .

Bekend zijn de zg.  $2^n$ -proefopzetten, waarbij voor alle variabelen het aantal niveau's gevormd wordt door machten van 2.

In een volledige proefopzet komen alle mogelijke combinaties van niveau's voor. Dit leidt meestal tot een zeer groot aantal uit te voeren EEM-analyses. In een zg. fractionele  $2^n$ -proefopzet kan volstaan worden met slechts een fractie van bovengenoemd aantal analyses bijvoorbeeld  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$  enz. waarbij slechts weinig aan nauwkeurigheid van het resulterende model behoeft te worden ingeleverd. Voor het geval geen gevoeligheden worden gebruikt in de proefopzet, kunnen in de literatuur tabellen gevonden worden voor fractionele proefopzetten [6].

Een andere werkwijze voor het formuleren van de proefopzet, bestaat uit het definiëren van een ruim aantal mogelijke ontwerp-punten. Door middel van speciale algoritmen is het mogelijk om uit deze kandidaatpunten een beperkte, geoptimaliseerde keuze te doen, en daarmee de proefopzet te vormen [7]. Daarbij dient een lineair model van een bepaalde orde als uitgangspunt. De keuze van de proefopzet kan naar verschillende criteria m.b.t. de geschatte parameters  $\beta$  en/of de te voorspellen functie  $y(x)$  worden

geoptimaliseerd, al naargelang van het doel waarvoor het regressiemodel afgeleid wordt.

Ook hierbij is het gebruik van gevoeligheden in de proefopzet mogelijk en effectief voor het reduceren van het aantal te analyseren ontwerppunten alsmede voor het verkrijgen van een regressiemodel met nauwkeurige partiële afgeleiden.

#### Reduceren van het regressie-model

Nadat volgens (21) de parameters  $\beta$  geschat zijn, trachten we het aantal parameters in het aldus verkregen regressiemodel te verminderen door te kijken naar de relatieve invloed van de afzonderlijke termen in het model. Daartoe wordt de variantie-covariantiematrix  $V(\hat{\beta})$  berekend, waarin:

$$\begin{aligned} V_{ii} & : \text{variantie van } \hat{\beta}_i \\ V_{ij} \quad i \neq j & : \text{covariantie tussen } \hat{\beta}_i \text{ en } \hat{\beta}_j \end{aligned}$$

voor  $V(\hat{\beta})$  kan worden afgeleid:

$$V(\hat{\beta}) = (X^T X)^{-1} * \frac{KS_r}{dof} \quad (31)$$

waarin:

$$\begin{aligned} KS_r & : \text{restkwadratensom, zie (19)} \\ dof & : \text{aantal graden van vrijheid (= het aantal waarnemingen} \\ & \quad \text{minus het aantal te schatten parameters)} \end{aligned}$$

Een mogelijke werkwijze om het aantal termen in het regressiemodel te reduceren gaat als volgt. De termen in het model worden gerangschikt volgens afnemende waarde van:

$$\frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{V_{ii}}} \quad , \quad i=1, \dots, k \quad (32)$$

De term in het model met de laagste waarde voor (32) wordt als de minst belangrijke beschouwd. We laten achtereenvolgens een of meer van de minder belangrijke termen weg en doen telkens nieuwe schattingen voor de in aantal gereduceerde parameters  $\beta$ . De reductie van het model kan gestuurd worden door te kijken naar het verloop van de restkwadratensom  $KS_r$  als functie van het aantal parameters in het model, zie fig. 1.

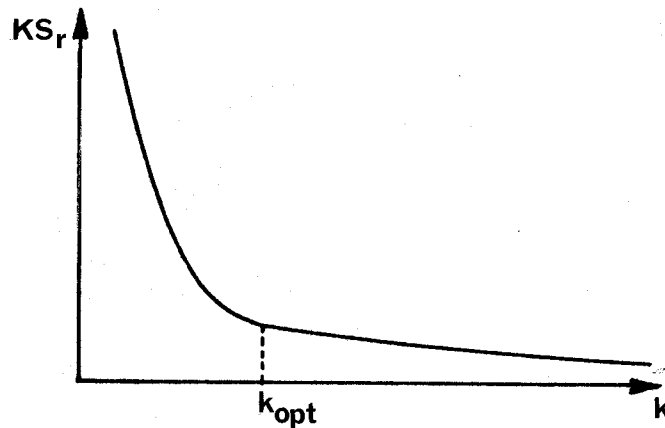


fig. 1. Restkwadratensom als functie van het aantal parameters  $\beta$

Bovengenoemde procedure voor het reduceren van het regressiemodel wordt voortgezet totdat een snelle toename van  $KS_r$  gaat optreden. Juist vóór dit punt heeft het model zo weinig mogelijk termen bij een nog acceptabele voorspellingskracht.

#### 4. TOEPASSINGSMOGELIJKHEDEN VAN REGRESSIE MODELLEN; INTEGRATIE MET ITERATIEVE OPTIMALISERING.

Volgens de in het vorige hoofdstuk beschreven methode kunnen regressiemodellen worden afgeleid o.a. voor het mechanisch gedrag van constructies. De modellen, die in het algemeen gebaseerd zullen zijn op een verzameling EEM-analyses, kunnen op verschillende manieren worden toegepast, zoals:

1. Direct gebruik als een eenvoudig en snel te evalueren en bovendien nauwkeurig analyse model van de constructie. Deze modellen kunnen worden geïmplementeerd op een microcomputer voor gebruik op bijvoorbeeld een tekenkamer. Er kan een bibliotheek opgebouwd worden van modellen welke interessant zijn voor een bepaalde ontwerpafdeling.
2. Vaak worden op basis van EEM-analyses parameterstudies uitgevoerd aan fysische problemen. Volgens de methode voor het afleiden van regressiemodellen kunnen de benodigde parametervariëaties op een gestructureerde manier worden gekozen en kan het aantal uit te voeren EEM-analyses worden beperkt.
3. In een iteratieve optimaliseringsprocedure (zie H.2) kan zo'n regressiemodel worden gebruikt als snelle analyses-module. Het resulterende optimum kan worden gebruikt als eindoplossing of kan anderzijds dienen als een goed startpunt voor de iteratieve optimaliseringsprocedure (zie H.2), waarin een EEM-pakket als analyse-module gebruikt wordt. Daar directe EEM-analyses nauwkeuriger zijn dan uitkomsten van regressiemodellen, kan een verdere verbetering van de te optimaliseren constructie worden bereikt.

4. Regressiemodellen kunnen ook worden gebruikt als snelle analyse module in computer programma's voor de "real time" simulatie van het gedrag van systemen. Deze toepassing kan nuttig zijn bij het ontwerpen van regelsystemen.

De iteratieve optimaliseringsprocedure volgens H.2 en de werkwijze met numerieke proefopzetten volgens H.3 kunnen met vrucht worden geïntegreerd, daar beide werkwijzen belangrijke soortgelijke aspecten bezitten en eisen stellen zoals:

- in het algemeen een vrij groot aantal uit te voeren EEM-analyses aan in kleine stappen te variëren konstrukties
- het concept van de ontwerpvariabelen; beide werkwijzen vereisen een hanteerbare koppeling tussen de ontwerpvariabelen en het eindige-elementenmodel.
- het berekenen van gevoeligheden; in beide werkwijzen is het gebruikt van gevoeligheden van groot voordeel.

Anderzijds vullen beide werkwijzen elkaar uitstekend aan. Zoals reeds gezegd kan een via een regressiemodel verkregen oplossing dienen als een goed gekozen startpunt voor de iteratieve procedure en kan een regressiemodel dienen als snelle analysemodule in zo'n iteratieve procedure.

## 5. TOEPASSINGEN

De volgende toepassingen van numerieke regressiemodellen zullen beknopt worden besproken:

1. De vlaktedruk in glijlagers [8]
2. Parameterstudie aan een vlies van de aorta hartklep [9]
3. Gewichtminimalisatie van aluminium profielen [10]
4. Het ontwerp van een grote texts-klok [13].

### De vlaktedruk en glijlagers [8]

Drooglopende en grensgesmeerde glijlagers zijn belangrijke verbindingselementen in werktuigbouwkundige konstrukties. Fig. 2 toont, geschematiseerd, een veel voorkomende situatie.

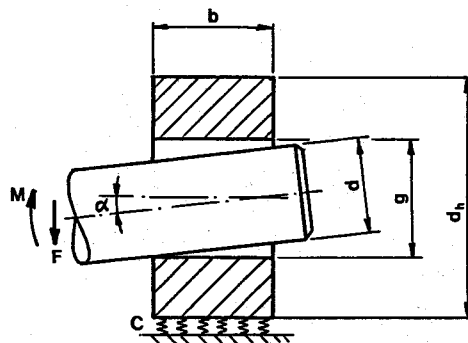


fig. 2. Geschematiseerde lagerkonstruktie.

De in dit probleem gehanteerde ontwerpvariabelen zijn:

- F : de radiale belasting van het lager
- E : elasticiteitsmodulus van het lagerhuis
- b : lagerbreedte
- d : asdiameter
- s : speling tussen as en lagerhuis (= g-d)
- $\alpha$  : scheefstand van de as
- $d_h$  : buitenafmeting van het lagerhuis
- C : stijfheid van de ondersteuning van het lagerhuis

De doelstelling bij het ontwikkelen van het regressiemodel was het verkrijgen van een handzaam en nauwkeurig rekenmodel voor de vlaktedruk tussen de as en het lagerhuis.

De scheefstand van de as laat de schematisering tot een 2-dimensionaal vlakspannings- of vlakvervormingsprobleem niet toe. Bovendien mag bij de gebruikelijk kleine spelings geen gebruik meer worden gemaakt van de theorie van Hertz voor het berekenen van de vlaktedruk. Een en ander leidde ertoe dat voor voldoende nauwkeurige resultaten het lager als 3D-elementenprobleem geanalyseerd diende te worden; fig. 3 toont de gebruikte elementenverdeling.

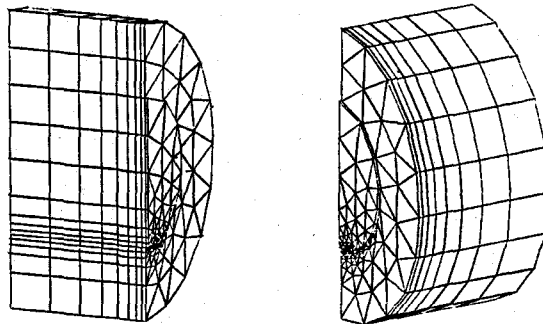


fig. 3. Elementverdeling voor glijlager.

Na oriënterende analyses werd besloten om een regressiemodel af te leiden voor de volgende dimensieloos gemaakte relatie:

$$\frac{\sigma_v}{E} = f \left( \frac{s}{d}, \alpha, \frac{F}{Ed^2} \right) \quad (33)$$

waarin  $\sigma_v$  de vlaktedruk is tussen de as en het lagerhuis. De drie parameters  $\frac{s}{d}$ ,  $\alpha$  en  $\frac{F}{Ed^2}$  werden elk op 4 niveau's gevarieerd en er werd een volledige proefopzet uitgevoerd hetgeen inhoudt dat er aantal van  $4^3=64$  EEM-analyses werden uitgevoerd. Daarbij werd gebruik gemaakt van het IDEAS-pakket van SDRC. Bij de afleiding van het regressiemodel werd geen gebruik gemaakt van gevoeligheden voor het schatten van modelparameters. Fig. 4 geeft een kwalitatief beeld van met het regressiemodel berekende vlaktedrukken voor 2 verschillende scheefstandhoeken.



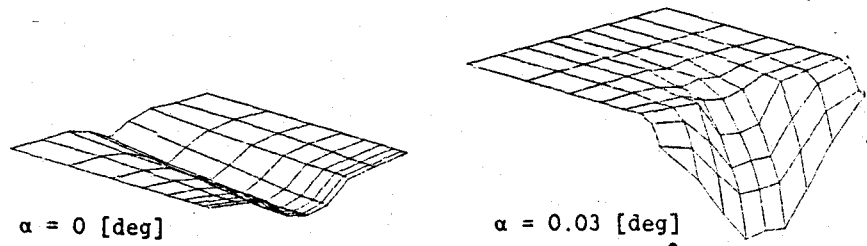


fig. 4. Vlaktedruk tussen as en lagerhuis.

Fig. 5 laat voor het symmetrievlak van het lager het verloop van de vlaktedruk zien zoals die met het regressiemodel werd berekend (getrokken lijn) en zoals die volgen uit directe EEM-analyses (de cirkels). De resultaten van beide berekeningsmethoden komen goed met elkaar overeen.

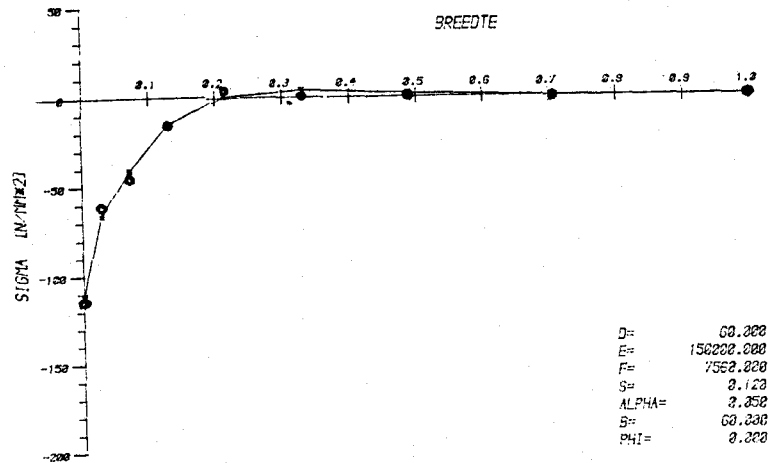


fig. 5. Vlaktedruk in het symmetrievlak van het lager.

Parameterstudie aan vlies van een aorta hartklep

Teneinde ontwerpparameters te vinden voor een kunstmatige vliesklep als vervanging voor de menselijke aortaklep, is een parameterstudie uitgevoerd aan spanningen en vervormingen in een geschematiseerd vezelversterkt vlies van zo'n klep en zijn verbinding met de omgeving. [9], fig. 6.

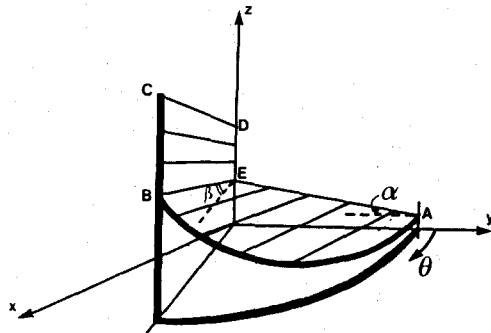


fig. 6.

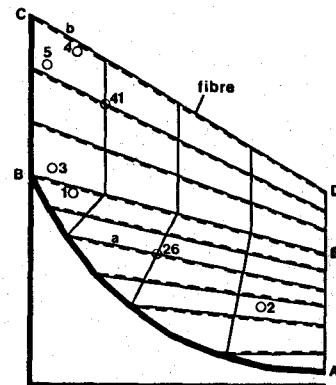


fig. 7.

Fig. 7. toont de gebruikte elementverdeling. De EEM-berekeningen zijn uitgevoerd met het MARC-pakket. Fig. 8. toont enige resultaten van het afgeleide regressiemodel.

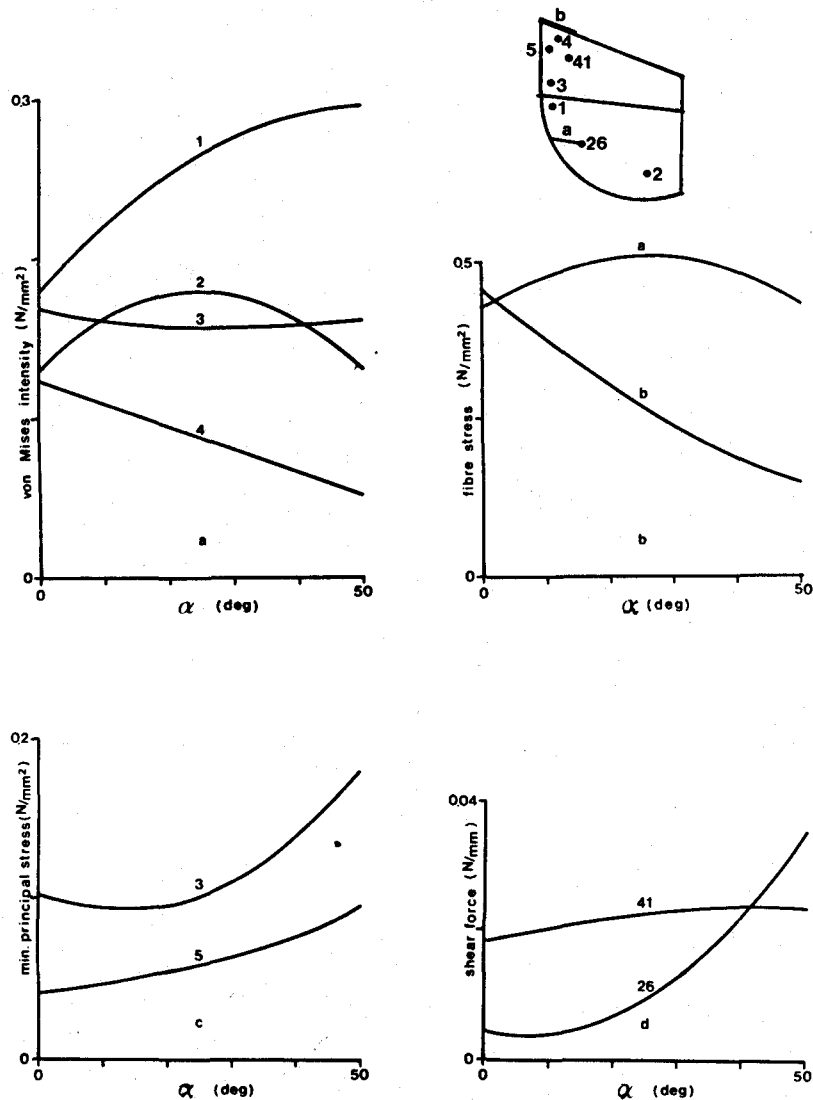


fig. 8. Resultaten uit het regressiemodel voor het vlies van een aortaklep.

Gewichtsmimalisatie van aluminium profielen [10]

Aluminium profielen zoals die gebruikt worden in de kassenbouw hebben vaak een vrij complexe dwarsdoorsnede. De belangrijkste bezwijkcriteria voor dergelijke profielen worden gevormd door de maximaal toelaatbare doorbuiging en de minimum kiplast in een bepaalde belastingssituatie. Fig. 9. toont een typerende belastingssituatie alsmede de dwarsdoorsnede voor een bepaald profiel.

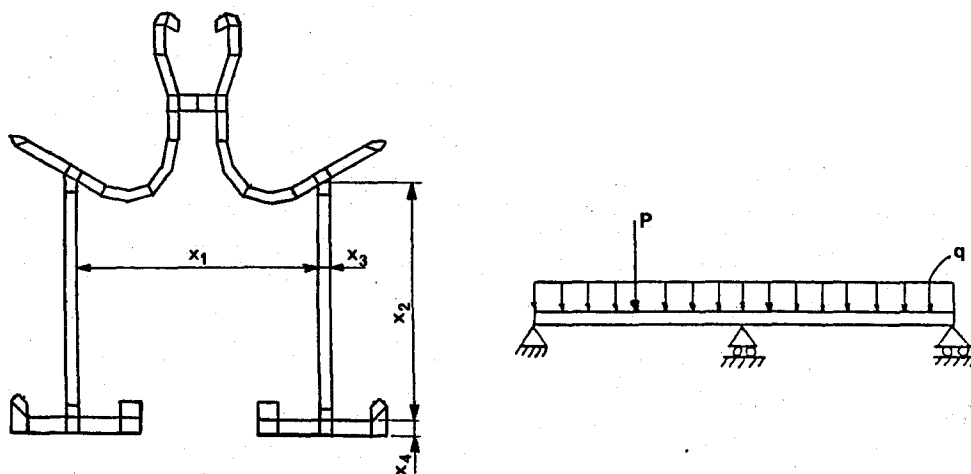


fig. 9. Dwarsdoorsnede en belastingsituatie voor profiel.

Voor dit en andere soortgelijke problemen zijn regressiemodellen ontwikkeld teneinde daarmee, gebruik makend van een micro-computer op een ontwerpafdeling, de dwarsdoorsnede te optimaliseren.

In fig. 9. zijn de voor dit profiel van belang zijnde ontwerpvariabelen  $x_1$  t/m  $x_4$  aangegeven. Tevens is de verdeling in elementen aangegeven welke diende voor de berekening van de geometrische eigenschappen van de dwarsdoorsnede en de minimum kiplast van het profiel. Deze berekeningen, welke als basis dienden voor het regressiemodel, werden uitgevoerd met een aan de TUE ontwikkeld EEM-programma en werden uitgevoerd op een Burroughs B6700 mainframe computer.

Bij de optimalisering werd uitgegaan van waarden van de ontwerpvariabelen  $x_1$  t/m  $x_4$  zoals die op de conventionele manier bepaald werden. Bij gelijkblijvende maximum doorzakking en minimum kiplast kon, gebruik makend van het ontwikkelde regressiemodel, het gewicht van het profiel met 6% verminderd worden. Daar dergelijke profielen in zeer grote hoeveelheden geproduceerd worden, is deze gewichtvermindering meer dan de moeite waard.

#### Ontwerp van een grote terts-klok.

Nederland heeft een grote traditie in het gieten van luid- en carillonklokken [11]. Vooral voor carillons moet de reeks van boventonen van de afzonderlijke klokken aan strenge regels voldoen, teneinde de klokken harmonisch te kunnen laten samenklinken. Reeds omstreeks 1644 bouwden de gebroeders Francois en Pieter Hemony te Zutphen de eerste werkelijk zuivere beiaard. De vorm van de klokken van deze beiaard was zodanig dat de reeks van boventonen een uitgesproken kleine terts accoord vormden, en dat is sindsdien in de Westerse Wereld eeuwenlang de meest gebruikte

klokvorm geweest voor de bouw van carillons.

Fig. 10 toont het profiel van de gebruikelijke kleine tertsklokken. De reeks van de 5 belangrijkste boventonen op basis van de c als grondtoon luidt:

$$c - c^1 - es^1 - g^1 - c^2$$

of in frekwentieverhoudingen t.o.v. de grondtoon:

$$1 : 2 : 2,4 : 3 : 4$$

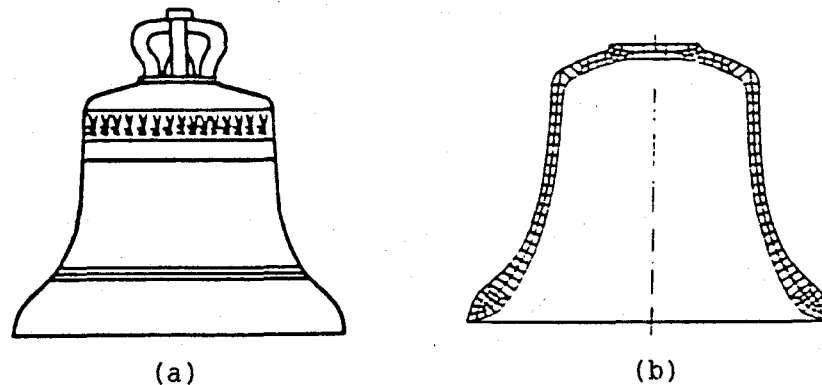


fig. 10. Klokvorm (a) en een in elementen verdeeld klokprofiel (b) voor een kleine tertsklok.

Uit muzikale overwegingen rees echter regelmatig de vraag of het niet mogelijk was om ook klokken te gieten met een grote terts accoord in hun reeks van boventonen, dus:

$$c - c^1 - e^1 - g^1 - c^2$$

of in frekwentieverhoudingen:

$$1 : 2 : 2,5 : 3 : 4$$

In het verleden, en vooral sinds het begin van deze eeuw, zijn vele pogingen ondernomen om het profiel voor een grote tertsklok te vinden. Deze "trial and error" aanpak, waarbij telkens weer andere klokken werden gegoten, soms met de meest extreme profielvormen, bleef echter zonder succes. De verhouding 2,4 wilde soms wel opschuiven naar 2,5, maar dan raakten andere boventonen uit de pas.

Dit probleem werd op de TUE, vakgroep WFW, opgelost door gebruik te maken van daar ontwikkelde programmatuur voor numerieke vormoptimalisering. [12], [13]. Het probleem is als volgt aangepakt.

Het klokprofiel werd vastgelegd door het opgeven van een aantal punten op het middenvlak van de klokwand tezamen met wanddikte in die punten (fig. 11a). Vervolgens werden de zo gedefiniëerde punten verbonden door splinefuncties (fig. 11b).

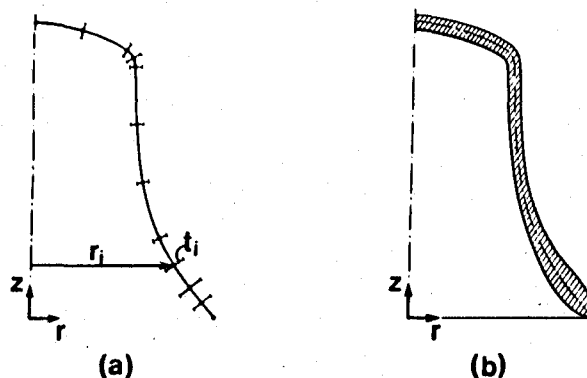


fig. 11. Vastleggen van het klokprofiel t.b.v. vormoptimalisering.

Een aantal van de opgegeven stralen en wanddikten ( $r_i$ ,  $t_i$ , zie fig. 11a) werden aangemerkt als ontwerpvariabelen. Door middel van iteratieve optimalisering en door gebruik te maken van ervaringsgegevens van de klokkengieter werd een eerste prototype voor de grote terts-klok ontworpen (fig. 12b). Opmerkelijk is de uitstulping halverwege de hoogte van de klok. Fig. 12a toont de gebruikte verdeling in elementen. De berekeingen werden uitgevoerd m.b.v. het programma DYNOPT [12] op een PRIME 750 computer.

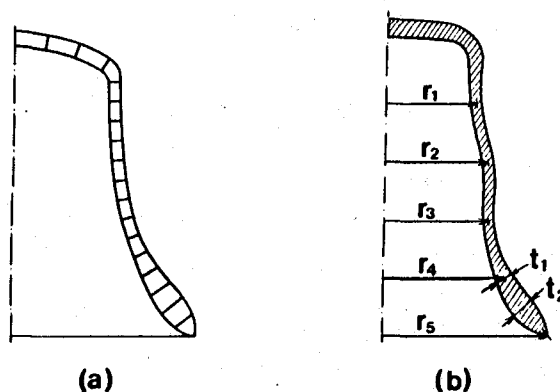


fig. 12. Elementverdeling en prototype voor grote terts-klok.

M.b.v. de iteratieve optimaliseringsprocedure lukte het niet de gevonden geometrie (fig. 12b) zover te verbeteren dat de te gieten klok stembaar zou zijn. Het optimaliseringsalgoritme convergeerde telkens naar een lokaal minimum wat te ver van het einddoel verwijderd lag.

Teneinde toch een oplossing te vinden werd een regressiemodel voor de reeks van boventonen ontwikkeld. De in fig. 12b aangegeven stralen en dikten fungeerden als ontwerpvariabelen; zij werden alle op 2 niveau's gevarieerd nl. 5% groter en 5% kleiner

dan de maten in het prototype. Door weer gebruik te maken van DYNOPT werd een volledige  $2^7$  proefopzet uitgevoerd. Dit hield in het uitvoeren van  $2^7 = 128$  EEM-analyses voor het bepalen van de eigenfrequenties. Bij de bepaling van het regressiemodel werd, naast berekende eigenfrequenties, tevens gebruik gemaakt van gevoeligheden van de frequentie m.b.t. variaties van de ontwerpvariabelen. Gebruik makend van het afgeleide regressiemodel in combinatie met een eenvoudig zoekalgoritme zijn tenslotte meerdere geometrieën gevonden welke de vereiste reeks van boventonen opleverden. Uit deze geometrieën heeft de klokkengieterij, op bijkomende argumenten, de meest geschikte vorm gekozen. Na het gieten van een proefklok bleek dat deze exact gestemd kon worden op de reeks van boventonen zoals die vereist is voor een grote tertsklok. De inmiddels uit grote tertsklokken opgebouwde carillons blijken een succes te zijn.

Fig. 13 toont het uiteindelijke profiel voor de grote tertsklok, tezamen met het profiel van de conventionele kleine tertsklok. De "bult" halverwege de hoogte van de klok valt weer op, alsmede de aanmerkelijk grotere verhouding van hoogte/diameter bij de grote tertsklok.

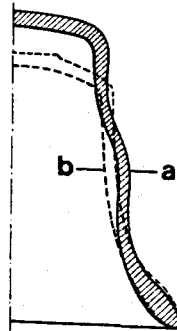


fig. 13. Profiel van (a) grote en (b) kleine tertsklok.

LITERATUUR

- [ 1 ] Kirsch, U.: Optimum Structural Design. Mc Graw-Hill, 1981.
- [ 2 ] Vanderplaats, G.H.: Numerical Optimization Techniques for Engineering Design. Mc Graw-Hill, 1984.
- [ 3 ] Cox, D.R.: Planning of Experiments, John Wiley & sons, 1958.
- [ 4 ] Doornbos, R.: Statistische theorie van proefopzetten, collegediktaat nr. 222 TU Eindhoven.
- [ 5 ] Heck, J. v.: On the dynamic characteristics of slideways. Dissertatie TU Eindhoven, 1984.
- [ 6 ] Box, G.E.P., Hunter, W.G., Hunter J.S.: Statistics for experimenters. John Wiley & Sons, 1978.
- [ 7 ] Nagtegaal, R.: CADE, een programma voor proefopzetten en modelvorming. Afstudeerverslag TU Eindhoven, vakgroep WFW, 1986.
- [ 8 ] Wouters, H.: De spanningsverdeling in drooglopende glijlagers. Afstudeerverslag TU Eindhoven, nr. WFW 86.012, 1986.
- [ 9 ] Rousseau, E.: Mechanical specifications for a closed leaflet valve prosthesis. Dissertatie TU Eindhoven, 1985.
- [10] Pasch, J. v.d.: Het ontwikkelen van gereedschap voor het optimaliseren van profielen met complexe dwarsdoorsnede. Afstudeerverslag TU Eindhoven, nr. WFW 85.002, 1985.
- [11] Lehr, A.: Van Paardebel tot Speelklok. Europese Bibliotheek Zaltbommel, 2e druk, 1981.
- [12] Asperen, F. v.: Het optimaliseren van de eigenfrequenties van axiaalsymmetrische constructies, toegepast op een luid- of carillon-klok. Afstudeerverslag TU Eindhoven, nr. WFW 84.012, 1984.
- [13] Maas, P.J.J.: Onderzoek naar de geometrie van een grote terts-klok. Afstudeerverslag TU Eindhoven, nr. WFW 85.027, 1985.