Generalisatie van de ster-driehoek-transformatie

AFDELING DER ELEKTROTECHNIEK

Groep Theoretische Elektrotechniek B

Generalisatie van de ster-driehoek-transformatie

door

L. Versfeld

ETB-05-1969 maart 1969

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

INHOUD

o-o-o-o-o-o

1. SAMENVATTING

De ster-driehoek (resp. driehoek-ster) -transformatie voor netwerken met impedanties, maar zonder bronnen wordt in twee opzichten gegeneraliseerd. Op de eerste plaats wordt het aantal klemmen uitgebreid van 3 tot n (≥3). De formule voor de transformatie van een n-ster naar een volledige n-hoek is bekend en hieruit blijkt dat deze transformatie altijd mogelijk is. In dit rapport wordt de formule voor transformatie in de omgekeerde richting afgeleid en hiermee wordt dan tevens duidelijk aan welke voorwaarden een volledige n-hoek moet voldoen opdat hij getransformeerd kan worden naar een n-ster.
Op de tweede plaats worden in de takken van de n-ster resp. volledige n-hoek ook bronnen toegelaten. Ook voor deze situatie wordt aangegeven hoe de transformatie (in beide richtingen) verloopt. Hieruit blijkt dat voor een netwerk met bronnen transformatie mogelijk is als voor het basisnetwerk (dat is het netwerk dat men verkrijgt door in het oorspronkelijke netwerk alle bronsterkten nul te stellen) transformatie mogelijk is. Bovendien wordt aangetoond dat in het na transformatie verkregen netwerk maximaal (n-1) bronnen nodig zijn.

2. INLEIDING

Transformatie van een gegeven n-pool (d.w.z. een netwerk met n klemmen) naar een andere n-pool betekent dat uitgaande van de gegeven n-pool een andere n-pool wordt gevormd die, gezien vanuit de klemmen, equivalent is met de oorspronkelijke n-pool.
Twee n-polen zijn equivalent als voor hen dezelfde betrekkingen tussen de klempotentialen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ en de klemstromen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ bestaan. Deze betrekkingen kunnen (in matrixnotatie) op twee manieren worden weergegeven, nl.

$$I = YU \tag{2.1}$$

of

$$U = ZI \tag{2.2}$$

Hierin zijn I en U kolomvectoren met ieder n componenten en Y en Z n x n matrices.
In dit rapport wordt uitsluitend de eerstgenoemde beschrijvingsmethode gebruikt; bovendien wordt in plaats van de admittantiematrix Y de geleidingsmatrix G ingevoerd omdat we ons, althans voorlopig, beperken tot weerstandsnetwerken. (2.1) gaat dan over in:

$$I = GU \tag{2.3}$$

Berekent men het vergelijkingenstelsel (2.3) zowel voor een n-ster-netwerk (fig. 2.1) als voor een volledig n-hoek-netwerk (fig. 2.2) en eist men equivalentie (hetgeen inhoudt dat de overeenkomstige coëfficiënten van G_{ster} en $G_{veelhoek}$ aan elkaar gelijk moeten zijn), dan moet voldaan worden aan:

$$G_{ik} = \frac{G_i G_k}{G_o} \tag{2.4}$$

waarin

$$G_o = \sum_{h=1}^{n} G_h$$

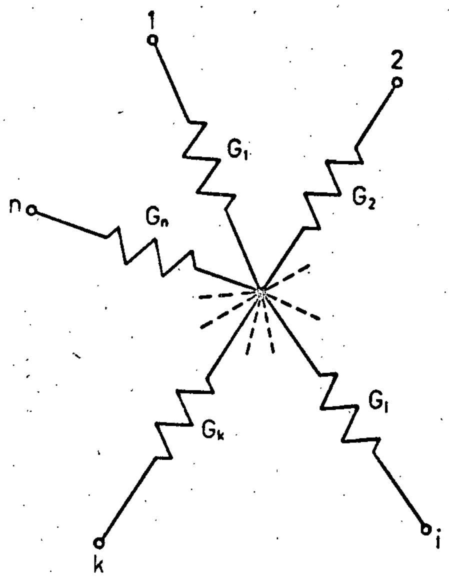


Fig. 2.1

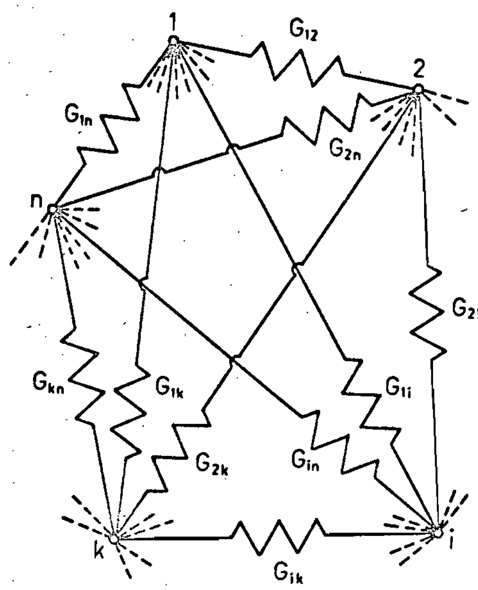


Fig. 2.2

(De betekenis van de symbolen blijkt uit de figuren 2.1 en 2.2; merk op dat $G_{ik} = G_{ki}$ en dat een symbool met twee gelijke indices zoals bijvoorbeeld G_{ii} niet voorkomt).
Formule (2.4) geeft iedere geleiding van de n-hoek als functie van de geleidingen van de n-ster en kan dus geïnterpreteerd worden als een voorschrift voor de transformatie van n-ster naar n-hoek. De geleidingen van de aldus verkregen n-hoek voldoen aan de betrekkingen:

$$\frac{G_{ik}}{G_{jk}} = \frac{G_{il}}{G_{jl}} \tag{2.5}$$

De afleiding van (2.4) en (2.5) is o.a. gegeven in [1].

---

[1] Prof.Dr.-Ing.H.J.Butterweck: collegediktaat "Theoretische Elektrotechniek I".

3. TRANSFORMATIE VAN n-HOEK NAAR n-STER

3.1.

Uit (2.4) blijkt dat de transformatie van n-ster naar n-hoek slechts één n-hoek oplevert. Evenzo zal transformatie van n-hoek naar n-ster slechts één n-ster opleveren, omdat eventuele verschillende n-sterren equivalent met de oorspronkelijke n-hoek en dus onderling equivalent zouden moeten zijn, hetgeen onmogelijk is (dit is in te zien door (2.3) uit te rekenen voor twee verschillende n-sterren en vervolgens equivalentie te eisen). Uit deze één-één-duidigheid volgt dat we van de geleidingen van een n-hoek, die we willen transformeren naar een n-ster, minstens moeten eisen dat ze voldoen aan (2.5). Betrekking (2.5) vormt dus een noodzakelijke voorwaarde; dat (2.5) ook een voldoende voorwaarde is zal in § 3.3 blijken.

3.2.

Uit de equivalentievoorwaarde (2.4) kan een uitdrukking afgeleid worden die iedere geleiding van de n-ster geeft als funktie van de geleidingen van de n-hoek en wel als volgt:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} G_{ik} = \frac{G_i}{G_o} \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} G_k = \frac{G_i}{G_o}(G_o - G_i) = G_i - \frac{G_i^2}{G_o}$$

$$G_i = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} G_{ik} + \frac{G_i^2}{G_o} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} G_{ik} + \frac{G_i G_x}{G_o} \cdot \frac{G_i G_y}{G_o} \cdot \frac{G_o}{G_x G_y}$$

$$G_i = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} G_{ik} + \frac{G_{ix} G_{iy}}{G_{xy}} \tag{3.1}$$

Formule (3.1) geeft dus het voorschrift voor transformatie van n-hoek naar n-ster.

Aangezien deze transformatie eenduidig moet zijn moeten de geleidingen van de n-hoek voldoen aan de voorwaarde dat de uitdrukking

$$\frac{G_{ix} G_{iy}}{G_{xy}}$$

onafhankelijk is van x en y, en dit voor iedere i.

Anders geformuleerd:

$$\frac{G_{ix}G_{iy}}{G_{xy}} = \frac{G_{iu}G_{iv}}{G_{uv}} \tag{3.2}$$

Omdat formule (3.1) pas na enige manipulaties uit de equivalentievoorwaarde (2.4) volgde kan men zich nog afvragen of de n-ster die we met (3.1) verkrijgen wel equivalent zal zijn met de gegeven n-hoek, m.a.w. of voorwaarde (3.2) inderdaad voldoende is.
Dat dit zo is bewijzen we door uitsluitend met behulp van formule (3.1) en voorwaarde (3.2) af te leiden dat

$$\frac{G_i G_x}{\sum_{k=1}^{n} G_k} = G_{ix}.$$

Dan laten we immers zien dat de n-ster, die met (3.1) uit een n-hoek verkregen is, na terugtransformatie (die equivalentie inhield!) weer de oorspronkelijke n-hoek oplevert.
Omdat (3.2) moet gelden voor willekeurige x,y,u en v kunnen we schrijven:

$$\frac{G_{ix}G_{iy}}{G_{xy}} = \frac{G_{ix}G_{iv}}{G_{xv}}$$

dus:

$$\frac{G_{iy}}{G_{xy}} = \frac{G_{iv}}{G_{xv}} \quad \text{en ook} \quad \frac{G_{iy}}{G_{iv}} = \frac{G_{xy}}{G_{xv}} \tag{3.3}$$

Uit (3.1) volgt:

$$G_i = G_{ix}\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \frac{G_{ik}}{G_{ix}} + \frac{G_{iy}}{G_{xy}}\right] \tag{3.4}$$

$$= G_{ix}\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,l}}^{n} \frac{G_{ik}}{G_{ix}} + \frac{G_{il}}{G_{ix}} + \frac{G_{iy}}{G_{xy}}\right] \tag{3.5}$$

Evenzo volgt uit (3.1) door i te vervangen door 1:

$$G_1 = G_{1x}\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^{n} \frac{G_{1k}}{G_{1x}} + \frac{G_{1y}}{G_{xy}}\right]$$

$$= G_{1x}\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq 1,i}}^{n} \frac{G_{1k}}{G_{1x}} + \frac{G_{1i}}{G_{1x}} + \frac{G_{1y}}{G_{xy}}\right]$$

$$= G_{1x}\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq 1,i}}^{n} \frac{G_{1k}}{G_{1x}} + \frac{G_{y1}}{G_{yx}} + \frac{G_{i1}}{G_{x1}}\right]$$

Met behulp van (3.3) kunnen we dit schrijven als:

$$G_1 = G_{1x}\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq 1,i}}^{n} \frac{G_{ik}}{G_{ix}} + \frac{G_{i1}}{G_{ix}} + \frac{G_{iy}}{G_{xy}}\right] \tag{3.6}$$

Uit (3.5) en (3.6) volgt nu:

$$\frac{G_i}{G_1} = \frac{G_{ix}}{G_{1x}} \tag{3.7}$$

Toepassing van (3.7) op (3.4) leidt tot:

$$G_i = G_{ix}\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \frac{G_k}{G_x} + \frac{G_i}{G_x}\right]$$

$$= \frac{G_{ix}}{G_x} \sum_{k=1}^{n} G_k$$

Dus:

$$\frac{G_i G_x}{\sum_{k=1}^{n} G_k} = G_{ix}$$

3.3.

De noodzakelijke voorwaarde (2.5) en de voldoende voorwaarde (3.2) zijn identiek, Immers: enerzijds is (3.3), die in feite hetzelfde is als (2.5) afgeleid uit (3.2), anderzijds kunnen we (3.2) afleiden uit (2.5) door te schrijven:

$$\frac{G_{ix}}{G_{ux}} \cdot \frac{G_{iy}}{G_{xy}} \cdot \frac{G_{iu}G_{iv}}{G_{uv}} = \frac{G_{iy}}{G_{uy}} \cdot \frac{G_{iy}}{G_{xy}} \cdot \frac{G_{iu}G_{iv}}{G_{uv}} \tag{3.8}$$

Volgens (2.5) geldt:

$$\frac{G_{iv}}{G_{uv}} = \frac{G_{iy}}{G_{uy}} \quad \text{en} \quad \frac{G_{iu}}{G_{xu}} = \frac{G_{iy}}{G_{xy}},$$

zodat (3.8) overgaat in:

$$\frac{G_{ix}G_{iy}}{G_{xy}} = \frac{G_{iu}G_{iv}}{G_{uv}} \tag{3.2}$$

Hiermee is dan aangetoond dat de bij transformatie van n-ster naar n-hoek gevonden noodzakelijke voorwaarde (2.5) tevens voldoende voorwaarde is voor transformatie in omgekeerde richting.

3.4.

Om bij een gegeven n-hoek na te gaan of aan (2.5) voldaan is voor alle i, j, k en l hoeft slechts te worden nagegaan of aan (2.5) voldaan is voor:

$i = 1$

$j = 2, 3, \ldots, n-1;$

$k = 2$ of 3 ($k = 2$ als $j \neq 2$ en $k = 3$ als $j = 2$)

$l = 4, 5, \ldots, n;$

Uitgewerkt geeft dit:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\dfrac{G_{13}}{G_{23}} & = & \dfrac{G_{14}}{G_{24}} & = & \dfrac{G_{15}}{G_{25}} & = & \dfrac{G_{16}}{G_{26}} & = & \dfrac{G_{17}}{G_{27}} & = & \cdots\cdots & = & \dfrac{G_{1n}}{G_{2n}} \\[2ex]
\dfrac{G_{12}}{G_{32}} & = & \dfrac{G_{14}}{G_{34}} & = & \dfrac{G_{15}}{G_{35}} & = & \dfrac{G_{16}}{G_{36}} & = & \dfrac{G_{17}}{G_{37}} & = & \cdots\cdots & = & \dfrac{G_{1n}}{G_{3n}} \\[2ex]
\dfrac{G_{12}}{G_{42}} & = & & = & \dfrac{G_{15}}{G_{45}} & = & \dfrac{G_{16}}{G_{46}} & = & \dfrac{G_{17}}{G_{47}} & = & \cdots\cdots & = & \dfrac{G_{1n}}{G_{4n}} \\[2ex]
\dfrac{G_{12}}{G_{52}} & = & & & & & \dfrac{G_{16}}{G_{56}} & = & \dfrac{G_{17}}{G_{57}} & = & \cdots\cdots & = & \dfrac{G_{1n}}{G_{5n}} \\[2ex]
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\[2ex]
\dfrac{G_{12}}{G_{n-1,2}} & = & & & & & & & & & & = & \dfrac{G_{1n}}{G_{n-1,n}}
\end{array}
$$

Dit zijn $\frac{1}{2}n(n-3)$ vergelijkingen, dus juist het verschil tussen het aantal elementen van de n-hoek, nl. $\frac{1}{2}n(n-1)$ en het aantal elementen van de n-ster.

3.5.

Als we een n-hoek hebben waarvan de geleidingen niet aan alle onder § 3.4 genoemde vergelijkingen voldoen kunnen we, door op geschikte wijze een aantal geleidingen in twee parallele geleidingen te splitsen, een transformeerbare n-hoek plus een resterend aantal geleidingen vormen. Na transformatie krijgen we dan een n-ster met bovendien nog het resterend aantal geleidingen rechtstreeks tussen de klemmen.

4. REDUCTIE VAN HET AANTAL BRONNEN IN EEN n-STER EN IN EEN n-HOEK

4.1.

De meest algemene n-ster met bronnen is die waarbij in iedere tak een bron aanwezig is; dit kan een spanningsbron in serie met de geleiding of een stroombron parallel met de geleiding zijn, maar door brontransformatie kan men altijd van de ene situatie overgaan naar de andere.

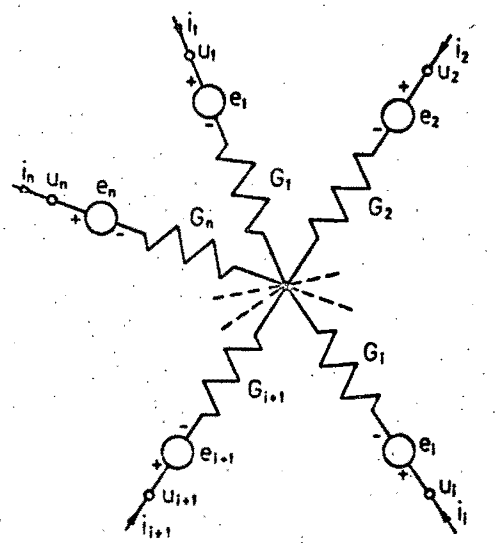


Fig. 4.1

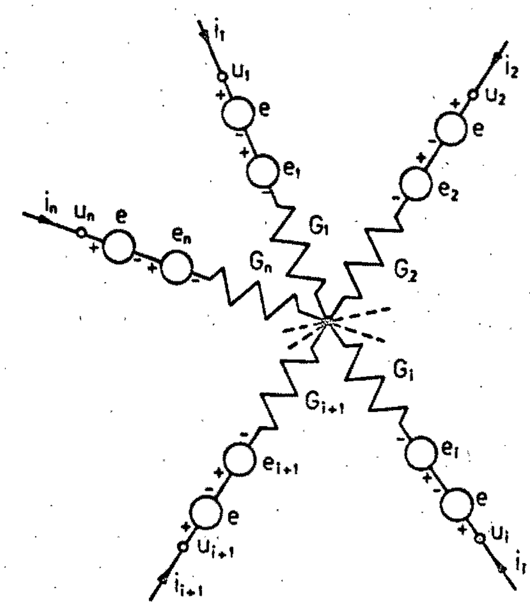


Fig. 4.2

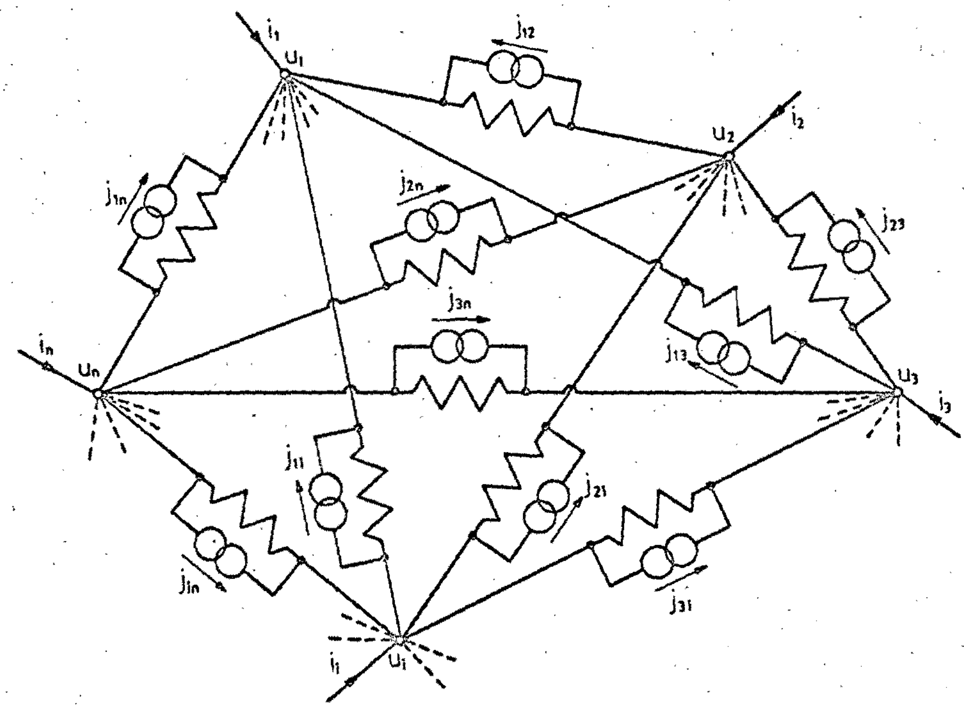
In fig. 4.1 is een n-ster met in iedere tak een spanningsbron getekend. Plaatsen we in serie met iedere tak een spanningsbron met telkens dezelfde sterkte en dezelfde polariteit, kan krijgen we het in fig. 4.2 weergegeven netwerk. De spanningsvergelijkingen van Kirchhoff, toegepast op de elementaire mazen zijn voor beide netwerken hetzelfde omdat de toegevoegde spanningsbronnen elkaar compenseren, bijvoorbeeld:

$$u_i - u_{i+1} = (+e) + e_i + \frac{1}{G_i}\, i_i - \frac{1}{G_{i+1}}\, i_{i+1} - e_{i+1} + (-e)$$

Dit impliceert dat voor beide netwerken de betrekkingen tussen de klempotentialen en de klemstromen hetzelfde zijn, zodat deze netwerken (aan de klemmen gezien) equivalent zijn.
In het bijzonder kunnen we $e = -e_i$ nemen, waardoor we een n-ster met bronnen krijgen die equivalent is aan de meest algemene, maar slechts (n-1) bronnen bevat.
Bij een tak met een stroombron, bijvoorbeeld tak k, is het toevoegen van een spanningsbron e op de in fig. 4.2 aangegeven manier equivalent met het vervangen van j_k door $j_k + e\,G_k$ (waarbij de positieve stroomrichting steeds naar de klem toe is genomen). Door $e = -\frac{j_k}{G_k}$ te nemen kunnen we tak k bronloos maken.

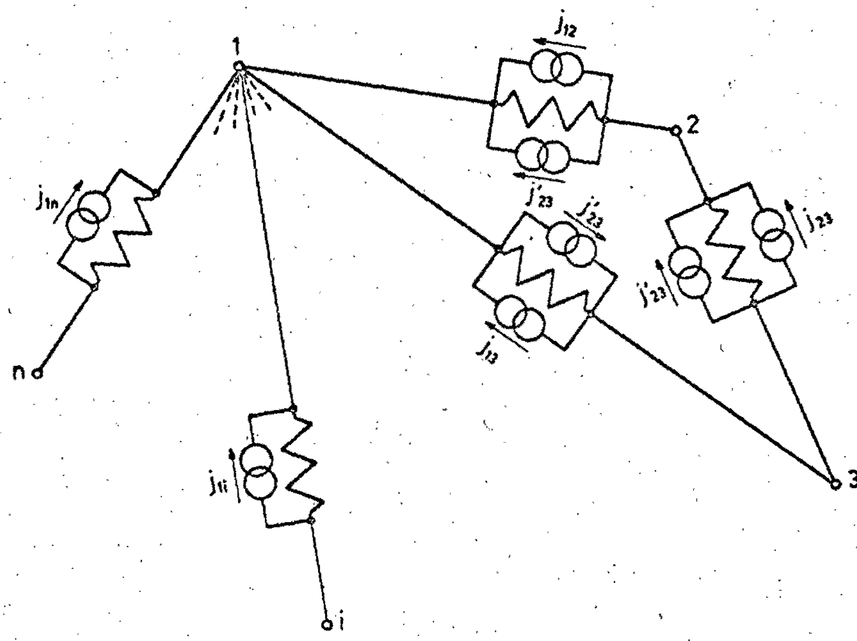
4.2.

De meest algemene volledige n-hoek met bronnen is die waarbij iedere tak een bron bevat. In fig. 4.3 is een n-hoek met in iedere tak een stroombron getekend. Beschouw deze n-hoek als een (willekeurig te kiezen) boom met bijbehorende links, b.v. de boom bestaande uit alle takken die van klem 1 uitgaan (hierbij wordt de parallelschakeling van geleiding en stroombron als één geheel, dus als één tak beschouwd). Iedere link bepaalt een gesloten circuit. Parallel aan iedere tak van zo'n gesloten circuit schakelen we nu een stroombron met telkens dezelfde sterkte en met een bij een bepaalde omloopszin behorende positieve richting (b.v. stroombronnen j_{23}' in het bij link 2-3 behorende circuit; zie fig. 4.4). Dit doen we bij alle via de links gesloten circuits (dus stroombronnen j_{24}' in het bij link 2-4 behorende circuit, enz.).
Voor de aldus verkregen volledige n-hoek en de oorspronkelijke van fig. 4.3 zijn de stroomvergelijkingen van Kirchhoff, toegepast op de klemmen, hetzelfde omdat de toegevoegde stroombronnen elkaar twee aan twee compenseren; b.v. voor klem i en de bovengenoemde keuze van de boom:



i_1
u_1
j_{12}
u_2
i_2
j_{1n}
j_{2n}
j_{23}
j_{3n}
i_n
u_n
j_{13}
u_3
i_3
j_{1i}
j_{2i}
j_{in}
j_{3i}
i_i
u_i

Fig. 4.3



1
j_{12}
2
j_{1n}
j'_{23}
j'_{23}
j_{23}
j'_{23}
j_{13}
n
j_{1i}
3
i

Fig. 4.4

$$
\begin{aligned}
i_i = {} & (u_i-u_1)G_{1i}+j_{1i}+(-j'_{2i}-j'_{3i}\ldots\ldots\ldots-j'_{i-1,i}+j'_{i,i+1}+\ldots\ldots+j'_{in}) \\
& + (u_i-u_2)G_{2i}+j_{2i}+(+j'_{2i}) \\
& + (u_i-u_3)G_{3i}+j_{3i}+(+j'_{3i}) \\
& \vdots \\
& + (u_i-u_{i-1})G_{i-1,i}+j_{i-1,i}+(+j'_{i-1,i}) \\
& + (u_i-u_{i+1})G_{i,i+1}-j_{i,i+1}+(-j'_{i,i+1}) \\
& \vdots \\
& + (u_i-u_n)G_{in}-j_{in}+(-j'_{in})
\end{aligned}
$$

Hieruit blijkt dat voor beide netwerken de betrekkingen tussen de klempotentialen en de klemstromen hetzelfde zijn, zodat deze netwerken (aan de klemmen gezien) equivalent zijn.
In het bijzonder kunnen we, omdat in elke link slechts één toegevoegde stroombron optreedt, deze tegengesteld nemen aan de oorspronkelijke stroombron (dus b.v. in fig. 4.4 $j'_{23} = -j_{23}$, enz.) waardoor alle links bronloos worden. We hebben dan een n-hoek met bronnen verkregen die equivalent is aan de meest algemene, maar slechts (n-1) bronnen bevat (en wel in de takken van de gekozen boom).
Bij een tak met een spanningsbron, b.v. tak kl is het toevoegen van een stroombron j'_{kl} (met positieve stroomrichting van l naar k) op de in fig. 4.4 aangegeven wijze equivalent met het vervangen van e_{kl} door

$$e_{kl} + \frac{j'_{kl}}{G_{kl}}$$

(waarbij de positieve zijde van de bronspanning steeds met k verbonden is).

5. TRANSFORMATIE VAN EEN n-STER MET BRONNEN NAAR EEN n-HOEK MET BRONNEN EN OMGEKEERD

5.1.

Bij transformatie van ster naar veelhoek gaan we uit van een n-ster met in iedere tak een spanningsbron, zoals reeds in fig. 4.1 is weergegeven.
We kunnen dit netwerk beschouwen als een n-ster zonder bronnen waaraan uitwendig in serie met iedere tak een spanningsbron is toegevoegd. Deze n-ster zonder bronnen transformeren we met (2.4) naar een n-hoek zonder bronnen, zodat we het netwerk van fig. 5.1 krijgen. Daarna brengen we de spanningsbronnen weer in de n-hoek op de in fig. 5.2 aangegeven manier.

De spanningsvergelijkingen van Kirchhoff, toegepast op de "uitwendige" lussen zijn voor beide netwerken hetzelfde, nl.:

$$u_i - u_k = e_i + \frac{1}{G_{ik}} i_{ik} - e_k$$

De betrekkingen tussen de klempotentialen en de takstromen en daarmee de betrekkingen tussen de klempotentialen en de klemstromen zijn dus voor beide netwerken hetzelfde, zodat ze equivalent zijn.
Vervangen we nu in elke tak de twee spanningsbronnen door één spanningsbron, dan hebben we een n-hoek met in iedere tak een spanningsbron verkregen die equivalent is met de n-ster met bronnen van fig. 4.1. Desgewenst kunnen we nog overgaan naar stroombronnen en op de in § 4.2 aangegeven manier het aantal bronnen reduceren tot (n-1).

5.2.

Bij transformatie van veelhoek naar ster gaan we uit van een volledige n-hoek met in iedere tak een stroombron, zoals reeds in fig. 4.3 is weergegeven. We reduceren eerst het aantal stroombronnen tot (n-1) en nemen hierbij b.v. de boom bestaande uit de takken 1-2, 2-3, 3-4, ..., (n-1)-n. Dit leidt tot de in fig. 5.3 getekende n-hoek, waarin:

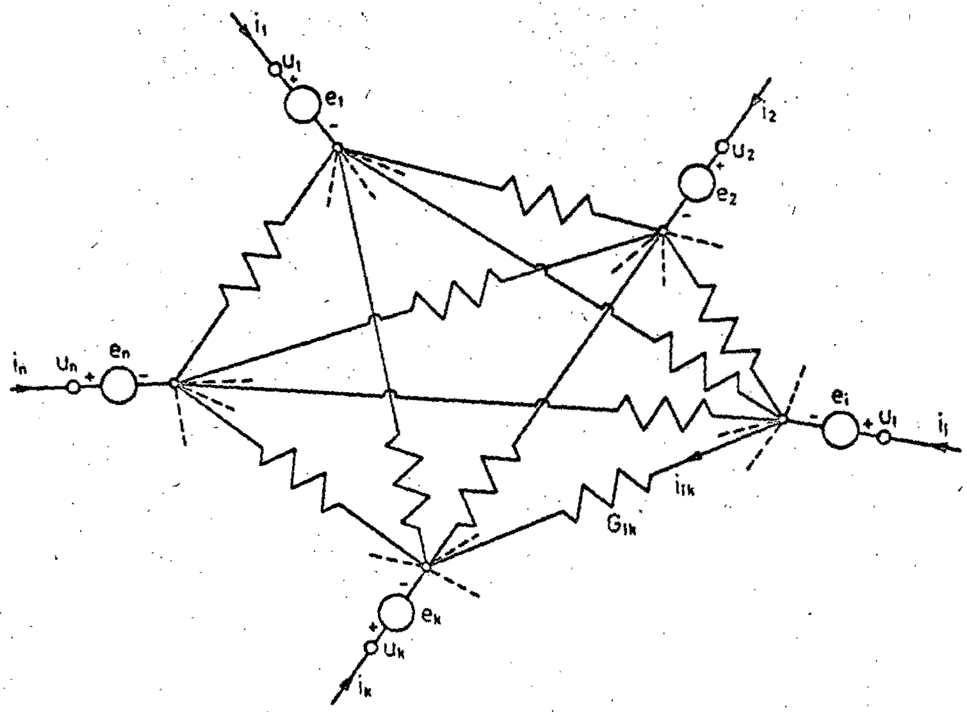

i1
u1
e1
i2
u2
e2
in
un
en
ei
ui
ii
iik
Gik
ek
uk
ik

Fig. 5.1

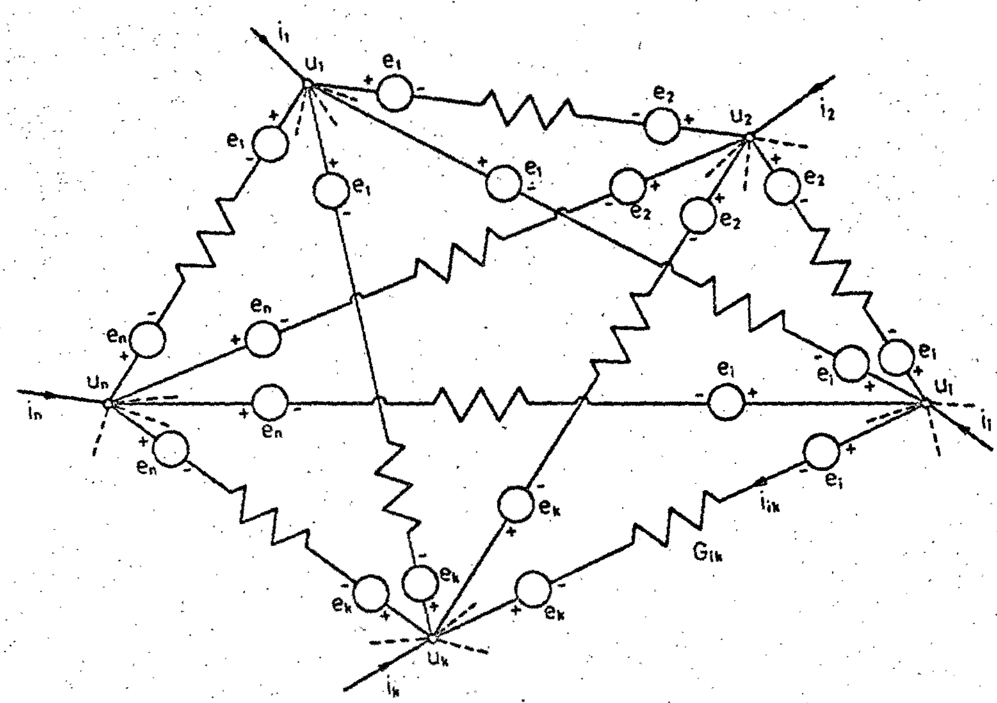

i1
u1
e1
e2
u2
i2
en
un
in
ei
ui
ii
iik
Gik
ek
uk
ik

Fig. 5.2

$$
\begin{aligned}
\tilde{j}_{12} &= \sum_{i=2}^{n} j_{1i} \\
\tilde{j}_{23} &= \sum_{i=3}^{n} j_{1i} + \sum_{i=3}^{n} j_{2i} \\
&\vdots \\
\tilde{j}_{k,k+1} &= \sum_{l=1}^{k} \sum_{i=k+1}^{n} j_{li} \\
&\vdots \\
\tilde{j}_{n-1,n} &= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=n}^{n} j_{li} = \sum_{l=1}^{n-1} j_{ln}
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

We beschouwen dit netwerk nu als een n-hoek zonder bronnen, waarop "uitwendig" de stroombronnen $\tilde{j}_{12}$, $\tilde{j}_{23}$, etc. zijn aangesloten. Deze n-hoek zonder bronnen transformeren we met (3.1) naar een n-ster zonder bronnen (als dit niet mogelijk is, is derhalve de hele transformatie onuitvoerbaar); we krijgen dan het in fig. 5.4 weergegeven netwerk. Door nu (op soortgelijke wijze als bij de reductie van het aantal stroombronnen in een n-hoek) stroombronnen toe te voegen in de elementaire mazen, elimineren we de stroombronnen tussen de klemmen en krijgen stroombronnen parallel aan de takken van de n-ster; zie fig. 5.5.

Vervangen we nu in elke tak die twee stroombronnen bevat deze twee door

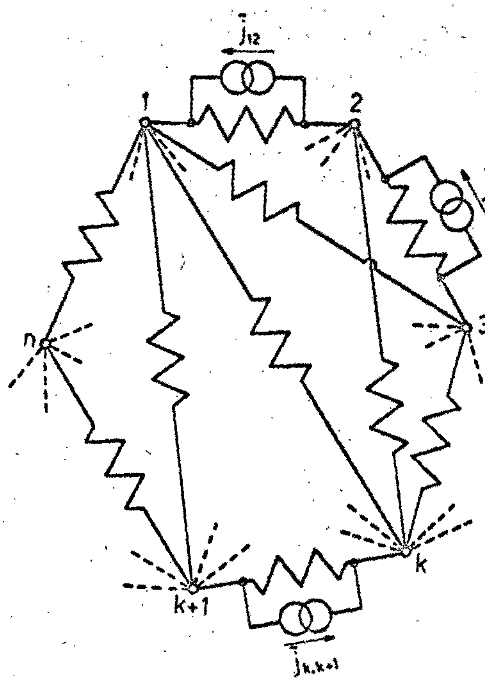


Fig. 5.3

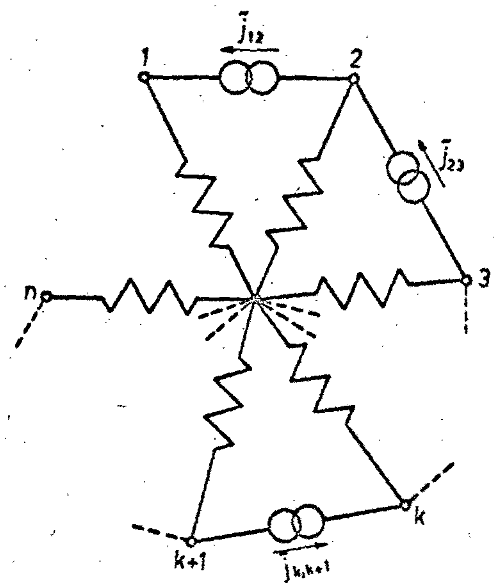


Fig. 5.4

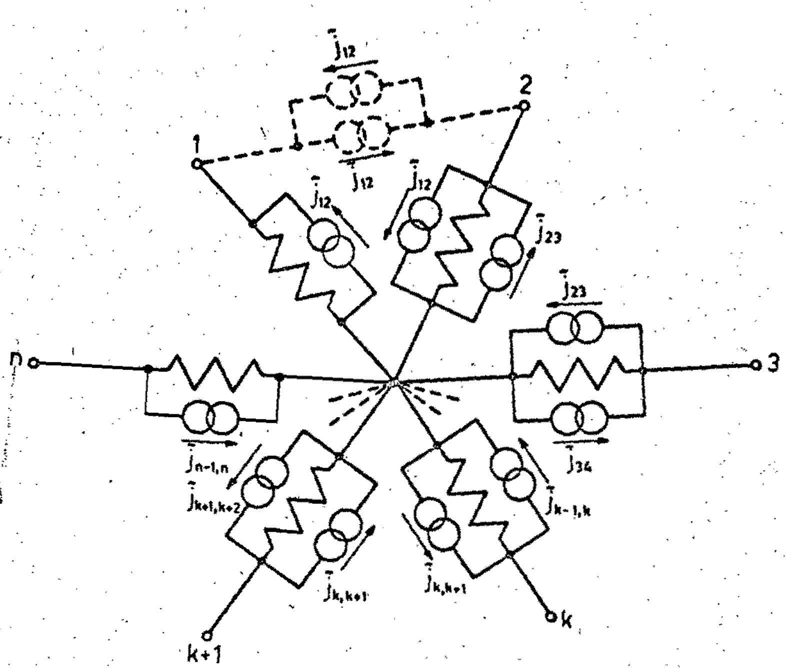


Fig. 5.5

één stroombron dan hebben we een n-ster met in iedere tak een stroombron verkregen, die equivalent is met de n-hoek met bronnen van fig. 4.3. De bronsterkten van de stroombronnen van de verkregen n-ster kunnen we m.b.v. (5.1) als volgt uitdrukken in de gegeven bronsterkten van de n-hoek van fig. 4.3.:

$$j_1 = \tilde{j}_{12} = \sum_{i=2}^{n} j_{1i}$$

$$j_2 = \tilde{j}_{23} - \tilde{j}_{12} = \sum_{i=3}^{n} j_{2i} - j_{12}$$

$$j_3 = \tilde{j}_{34} - \tilde{j}_{23} = \sum_{i=4}^{n} j_{3i} - j_{13} - j_{23} = \sum_{i=4}^{n} j_{3i} - \sum_{l=1}^{2} j_{l3}$$

$$\vdots$$

$$j_k = \tilde{j}_{k,k+1} - \tilde{j}_{k-1,k} = \sum_{i=k+1}^{n} j_{ki} - \sum_{l=1}^{k-1} j_{lk}$$

$$\vdots$$

$$j_n = -\tilde{j}_{n-1,n} = -\sum_{l=1}^{n-1} j_{ln}$$

Dus: j_k is de algebraïsche som van de stroombronnen die in de oorspronkelijke n-hoek met klem k verbonden zijn.
Desgewenst kunnen we nog overgaan naar spanningsbronnen en het aantal bronnen met één verminderen. (zie § 4.1).

6. ENIGE OPMERKINGEN; MOGELIJKE TOEPASSINGEN

6.1.

Als we uitgaan van een n-ster, resp. n-hoek met uitsluitend positieve geleidingen krijgen we na transformatie een n-hoek, resp. n-ster met eveneens uitsluitend positieve geleidingen; dit blijkt uit de formules (2.4) en (3.1).

6.2.

Als de netwerken admittanties i.p.v. geleidingen bevatten blijft alles wat in de voorgaande paragrafen behandeld is formeel hetzelfde, en dus geldig. Maar als we nu uitgaan van een n-ster resp. n-hoek met uitsluitend realiseerbare admittanties zullen we na transformatie in het algemeen geen netwerk met uitsluitend realiseerbare admittanties krijgen.

6.3.

In de paragrafen 4 en 5 is geen enkele beperking opgelegd aan het tijdsverloop van de bronsterkten. Ook als de netwerken admittanties i.p.v. geleidingen bevatten blijft dit zo omdat de manipulaties met de bronnen onafhankelijk zijn van de admittanties. Hierbij moet een uitzondering gemaakt worden voor de overgang van een spanningsbron in serie met een admittantie naar een stroombron parallel met die admittantie en omgekeerd. De enige eis die we dan, aan de bronsterkte waarvan we uitgaan, moeten stellen is dat hij geschreven moet kunnen worden als het reële deel van de som van een (eventueel oneindig) aantal e-machten, dus

$$e(t) = \mathrm{Re}\,\{\sum_{i=1}^{n} E_i e^{p_i t}\}$$

Na transformatie geeft dit een stroombron

$$j(t) = \mathrm{Re}\,\{\sum_{i=1}^{n} Y(p_i) E_i e^{p_i t}\}$$

waarin Y(p) de admittantie is die oorspronkelijk in serie stond met e(t); na transformatie komt Y(p) parallel met j(t) te staan.

6.4.

Mogelijke toepassingen:

a) Vereenvoudiging van berekeningen aan netwerken.

b) Vermindering van het aantal weerstanden (eventueel admittanties) in een te realiseren netwerk.

c) Het verkrijgen van gunstiger waarden van weerstanden (eventueel admittanties) voor een te realiseren netwerk.

d) Het transformeren van een netwerk met niet realiseerbare admittanties naar een netwerk met wel realiseerbare admittanties. Hierbij leidt het beschouwen van één n-hoek als de parallelschakeling van twee of meer (wel of niet volledige) n-hoeken, waarvan een aantal getransformeerd kunnen worden naar n-sterren, tot extra mogelijkheden.

Bijvoorbeeld: soms zal het mogelijk zijn een driehoek met niet realiseerbare admittanties zodanig te splitsen in twee parallele driehoeken, dat iedere driehoek na transformatie een realiseerbare drie-ster (T-schakeling) oplevert. Dit leidt dan tot een realiseerbare dubbel T-schakeling die equivalent is met de oorspronkelijke niet-realiseerbare driehoek.